

MÉTODO DE OBTENÇÃO DE ESTIMATIVAS PRELIMINARES DE PARÂMETROS DE MODELOS NÃO-LINEARES DE CRESCIMENTO¹

PAULO SILVEIRA JÚNIOR², ÉLIO PAULO ZONTA³, AMAURI ALMEIDA MACHADO³
e EDUARDO DOS SANTOS SOFFIONI⁴

RESUMO - É apresentado um método geral de obtenção de estimativas preliminares (valores iniciais) dos parâmetros de modelos de crescimento não-lineares usuais, tais como: Brody, raiz cúbica de Bertalanffy, Gompertz e von Bertalanffy. A utilização do método é ilustrada com dados de desenvolvimento ponderal de bovinos da raça Ibagé e de bubalinos da raça Murrah.

Termos para indexação: estimativas de parâmetros, curvas de crescimento.

A METHOD OF OBTAINING THE PRELIMINARY ESTIMATES OF THE NON-LINEAR PARAMETERS OF GROWTH MODELS

ABSTRACT - A generic method of obtaining preliminary estimates (initial values) of the parameters of non-linear growth models generally used, such as: Brody, Bertalanffy's cubic root, Gompertz and von Bertalanffy, is presented. The application of the method to the adjustment of these models is illustrated with growth weight data of bovines of the Ibagé race and of buffaloes of the Murrah race.

Index terms: parameter estimates.

INTRODUÇÃO

Em estudos de crescimento de animais e de plantas, através de modelos não-lineares, o processo de estimação requer o fornecimento de estimativas preliminares (valores iniciais) usualmente atribuídos arbitrariamente pelo pesquisador. O processo iterativo de estimação depende, fundamentalmente, de tais valores, uma vez que os mesmos exercem influência não só na velocidade de convergência mas também na própria convergência.

Poucas sugestões alternativas são abordadas na literatura, em contraste com a importância

da escolha dos valores iniciais para o sucesso do processo iterativo de estimação, principalmente em modelos com número elevado de parâmetros.

Alguns métodos analíticos e descritivos são disponíveis na literatura. Entretanto, os processos analíticos, via de regra, não são expeditos, além de compreender certo grau de dificuldade matemática na solução dos sistemas de equações resultantes (Causton 1969, Hartley & Booker 1965, Gallant 1975). Outro grupo de métodos têm tratamentos eminentemente empíricos. Segundo Gallant (1975), a escolha dos valores iniciais é um processo *ad hoc*. Esses valores podem ser obtidos através do conhecimento prévio da situação, da inspeção dos dados, etc.

Draper & Smith (1966) comentam que valores iniciais dos parâmetros podem ser sugeridos do ajustamento de uma equação semelhante de outro trabalho, ou através da experiência e do conhecimento do pesquisador.

Esses métodos são revisados e discutidos por Silveira Júnior et al. (1992), que apresentam um

¹ Aceito para publicação em 6 de abril de 1992. Trabalho financiado pelo CNPq.

² Eng. - Agr., M.Sc., Prof. - Titular, Dep. de Matemática, Estatística e Computação da UFPel. Caixa Postal 354, CEP 96100 Pelotas, RS. Bolsista do CNPq.

³ Eng. - Agr., M.Sc., Prof. - Adjunto, Dep. de Matemática, Estatística e Computação da UFPel.

⁴ Em curso de graduação em Engenharia Agrícola, UFPel. Bolsista do CNPq.

método objetivo de obtenção de estimativas preliminares de parâmetros de modelos de crescimento sazonais, o qual, além de evitar a arbitrariedade na tomada de valores iniciais, é desenvolvido com maior velocidade de convergência.

O que se observa, de maneira geral, em trabalhos de ajustamento de curvas de crescimento, é que o número de iterações é muito elevado, independentemente do modelo e do método de ajustamento utilizado.

Com o propósito de evitar a arbitrariedade na tomada de valores iniciais dos parâmetros e o uso de processos apenas descritivos e processos analíticos com grau de dificuldade relativamente alto na solução matemática dos sistemas de equações resultantes, apresenta-se a aplicação do método de obtenção de estimativas preliminares de parâmetros em modelos de crescimento sazonais proposto originalmente por Silveira Júnior (1979), aos modelos não-lineares de crescimento Brody, Gompertz e von Bertalanffy.

MÉTODO

O método consiste, basicamente, em uma análise preliminar de diferenças que conduza à eliminação de um ou mais parâmetros e a um modelo linearizável por transformação logarítmica. Estimativas de quadrados mínimos obtidas por regressão linear simples são tomadas como valores preliminares.

Apresenta-se, a seguir, o procedimento, passo a passo, desse método quando aplicado aos modelos de crescimento não lineares usuais tais como: Brody, Gompertz e von Bertalanffy.

Modelo Brody (raiz cúbica): Tomando-se como exemplo o modelo Brody para a raiz cúbica do peso $\sqrt[3]{W_t} = A' - B' \cdot e^{-kt}$, onde $A' = A^{1/3}$ e $B' = A^{1/3}B$, o método de obtenção de estimativas preliminares dos parâmetros apresentado originalmente por Silveira Júnior (1979) fundamenta-se nos seguintes passos:

a) Determinação das diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos dos meses correspondentes de dois anos consecutivos. O modelo para essa análise de diferenças é, então,

$$d_t = \sqrt[3]{W_{t+n}} - \sqrt[3]{W_t} = B' \cdot (1 - e^{-nk}) \cdot e^{-kt},$$

uma vez que o termo A' se cancela.

O número de pesagens no período básico é representado por n (ano, mês, dia, etc).

b) Linearização, por anamorfose, da equação das diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos d_t , resultando em:

$$\log d_t = \log B' \cdot (1 - e^{-nk}) - (K \cdot \log e) \cdot t,$$

que é uma equação de regressão linear simples, da forma:

$$\log d_t = a + b \cdot t,$$

onde $a = \log [B' \cdot (1 - e^{-nk})]$, $b = -K \cdot \log e$, $t = 1, 2, \dots, m$, e m igual ao número de diferenças. No caso de se trabalhar com animais de dois anos de idade, $m = n$.

c) Determinação das estimativas \hat{a} e \hat{b} dos parâmetros a e b do modelo de regressão linear simples, pelo método dos quadrados mínimos.

d) Obtenção das estimativas preliminares dos parâmetros B' e K , através das seguintes expressões:

$$\hat{K} = \frac{-\hat{b}}{\log e} \text{ e } \hat{B}' = 10^{\hat{a}} - \log (1 - e^{-\hat{n}\hat{k}})$$

e) Cálculo da estimativa preliminar para o parâmetro A' , como segue, a partir da seguinte equação:

$$\hat{A}' = \left[\frac{\sum_{t=1}^{2n} \sqrt[3]{W_t} + \hat{B}' \cdot \sum_{t=1}^{2n} e^{-\hat{k}t}}{2n} \right]$$

obtida a partir do modelo $\sqrt[3]{W_t} = A' - B' \cdot e^{-kt}$, para a soma de $2n$ valores consecutivos de $\sqrt[3]{W_t}$.

Modelo Brody: Não utilizando a transformação raiz cúbica, e sim, a expressão original do modelo Brody, $W_t = A - B \cdot e^{-kt}$, onde A é o valor assintótico, B uma constante de integração, e K , a taxa de crescimento, o método conduz às seguintes expressões:

a) diferenças entre as variáveis resposta W_t ;

$$d_t = W_{t+n} - W_t = B \cdot (1 - e^{-nk}) \cdot e^{-kt},$$

onde n é o número de observações no período básico (ano, mês, dia, etc);

b) linearização do modelo d_t , ou seja:

$$\log d_t = a + b \cdot t, \text{ onde}$$

$$a = \log B \cdot (1 - e^{-nk}) \text{ e } b = -K \cdot \log e$$

c) As estimativas dos parâmetros A , B e K :

$$\hat{K} = \frac{-\hat{b}}{\log e}, \hat{B} = 10^{\hat{a}} - \log(1 - e^{-\hat{nk}}) e$$

$$\hat{A} = \left[\sum_{t=1}^{Zn} W_t + \sum_{t=1}^{Zn} e^{-\hat{kt}}/2n \right]$$

Modelo Gompertz: $W_t = e^{A - BK^t}$. Para este modelo, onde W_t é a variável resposta no instante t , A é o logaritmo neperiano do valor assintótico, B é a constante de integração, e K é a taxa de crescimento; o método conduz aos seguintes cálculos para a obtenção das estimativas preliminares:

a) Logaritmos neperianos dos pesos, ou seja,

$$\ln W_t = A - B \cdot K^t$$

b) Diferenças entre os pesos transformados, tal como:

$$d_t = \ln W_{t+n} - \ln W_t = B \cdot (1 - K^n) \cdot K^t$$

c) Linearização do modelo d_t , ou seja, $\log d_t = a + b \cdot t$, com $a = \log B \cdot (1 - K^n)$ e $b = \log K$.

d) As estimativas dos parâmetros A , B e K :

$$\hat{K} = 10^{\hat{b}}, \hat{B} = 10^{\hat{a}} - \log(1 - \hat{K}^n) e$$

$$\hat{A} = \left[\sum_{t=1}^{Zn} \ln W_t + \hat{B} \sum_{t=1}^{Zn} \hat{K}^t/2n \right]$$

Raiz cúbica de von Bertalanffy: $\sqrt[3]{W_t} = A' - B' \cdot e^{-kt}$, onde $A' = A^{1/3}$ é a raiz cúbica do valor assintótico, $B' = A^{1/3}B$ é a constante de integração multiplicada por A' ; K é a taxa de crescimento, e W_t é a variável resposta no tempo t . Este modelo corresponde ao modelo Brody para a raiz cúbica da variável resposta, e portanto, o processo é o mesmo.

Modelo von Bertalanffy: $W_t = A \cdot (1 - B \cdot e^{-kt})^3$, onde W_t é a variável resposta no instante t , A é o valor assintótico, B é a constante de integração e K é a taxa de crescimento.

Para este modelo, as estimativas preliminares dos parâmetros A , B e K podem ser obtidas a partir daquelas para o modelo raiz cúbica de von Bertalanffy, ou seja:

$$\sqrt[3]{W_t} = A' - B' \cdot e^{-kt},$$

uma vez que $A = A'^3$, $B = B'/A'$ e K , a taxa de crescimento, tem o mesmo significado em ambos os modelos.

ILUSTRAÇÃO

São utilizados, para ilustração do método, dados de desenvolvimento ponderal de bovinos da raça Ibagé (5/8 Angus - 3/8 Zebú), Chagas et al. (1972) e Silveira Júnior (1979) e de bubalinos da raça Murrah (Silveira Júnior et al. 1990). Os dados foram obtidos junto ao Centro Nacional de Pesquisa de Ovinos - CNPO, Bagé, RS, e do Centro de Pesquisa de Terras Baixas de Clima Temperado - CPATB -, Capão do Leão, RS, ambos da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - EMBRAPA.

São apresentados, a seguir (Tabelas 1 e 2), os desenvolvimentos ponderais médios dos bovinos e dos bubalinos, que servirão como exemplos para a aplicação do método de obtenção de estimativas preliminares de parâmetros de modelos de crescimento.

1 - Modelo Brody: $W_t = A - B \cdot e^{-kt}$

O método de obtenção de estimativas preliminares conduz aos resultados da Tabela 3 para as diferenças d_t e para os logaritmos dessas diferenças, onde $n = 13$.

Os dados utilizados na ilustração do método correspondem ao desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos da raça Ibagé.

TABELA 1. Desenvolvimento ponderal médio de bovinos da raça Ibagé, 73 machos e 55 fêmeas.

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Machos | 44 | 66 | 86 | 107 | 127 | 150 | 172 | 184 | 187 | 183 | 176 | 174 | 192 |
| | 215 | 247 | 255 | 272 | 279 | 291 | 303 | 311 | 310 | 303 | 291 | 305 | 328 |
| | 358 | 379 | 392 | | | | | | | | | | |
| Fêmeas | 41 | 58 | 80 | 99 | 118 | 140 | 161 | 175 | 182 | 180 | 175 | 169 | 168 |
| | 182 | 199 | 214 | 224 | 231 | 240 | 252 | 257 | 260 | 249 | 242 | 243 | 245 |
| | 264 | 281 | 303 | | | | | | | | | | |

TABELA 2. Desenvolvimento ponderal médio de búfalos da raça Murrah nascidos nos períodos outono-inverno (18 animais) e primavera-verão (60 animais).

| | | | | | | | | | | | | | |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Out.-Inv. | 60 | 84 | 108 | 134 | 159 | 182 | 206 | 223 | 238 | 246 | 250 | 250 | 252 |
| Prim.-Ver. | 250 | 250 | 257 | 269 | 291 | 310 | 331 | 354 | 372 | 386 | 390 | 392 | 394 |
| | 59 | 91 | 121 | 148 | 173 | 194 | 211 | 223 | 240 | 250 | 264 | 280 | 294 |
| | 309 | 322 | 336 | 344 | 343 | 344 | 345 | 349 | 356 | 370 | 385 | 407 | 433 |

TABELA 3. Diferenças entre os pesos, d_t , e $\log d_t$ para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos da raça Ibagé (Modelo Brody).

| | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Medidas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| d_t | 171 | 181 | 169 | 165 | 152 | 141 | 131 | 127 |
| $\log d_t$ | 2,233 | 2,258 | 2,228 | 2,217 | 2,182 | 2,149 | 2,117 | 2,104 |
| Medidas | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| d_t | 123 | 120 | 115 | 131 | 136 | 143 | 142 | 137 |
| $\log d_t$ | 2,090 | 2,079 | 2,061 | 2,117 | 2,134 | 2,155 | 2,121 | 2,138 |

As estimativas dos coeficientes a e b do modelo de regressão, para o exemplo são:

$$\hat{a} = 2,2212 \text{ e } \hat{b} = -0,0085.$$

As estimativas dos parâmetros A, B e K são obtidas, também, de modo análogo, ou seja:

$$\hat{K} = \frac{\hat{b}}{\log e} = \frac{0,0085}{0,4343} = 0,0196$$

$$\hat{B} = 10^{\hat{a}} - \log(1 - e^{-\hat{a}}) = 10^{2,2212} - \log(1 - e^{-0,2548}) = 739,87$$

e |

$$\hat{A} = \left[\sum_{t=4}^{29} W_t + (739,87) \sum_{t=4}^{29} e^{-(0,0196)t} \right] / 26 = 790,89$$

Na Tabela 4 encontram-se os valores das estimativas preliminares dos parâmetros A, B e K para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos Ibagé (machos e fêmeas) e dos bubalinos Murrah (outono-inverno e primavera-verão).

2 - Raiz cúbica de von Bertalanffy: $\sqrt[3]{W_t} = A' - B' \cdot e^{-kt}$.

TABELA 4. Estimativas preliminares dos parâmetros A, B e K (modelo Brody), para o desenvolvimento ponderal médio de bovinos e bubalinos.

| Animais | Parâmetros | | |
|------------------|------------|--------|-------|
| | A | B | K |
| Bovinos | | | |
| Machos | 790,89 | 739,87 | 0,020 |
| Fêmeas | 371,09 | 313,64 | 0,043 |
| Bubalinos | | | |
| Out.-Inv. | 1017,34 | 919,80 | 0,014 |
| Prim.-Ver. | 486,35 | 434,31 | 0,062 |

Este modelo é o mesmo que o modelo Brody para a raiz cúbica da variável resposta, e os resultados, tanto das diferenças d_t como dos logaritmos dessas diferenças para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos da raça Ibagé, encontram-se na Tabela 5.

As estimativas dos coeficientes a e b do modelo de regressão para o exemplo são: $\hat{a} = 0,32239$ e $\hat{b} = -0,02442$.

TABELA 5. Diferenças entre as raízes cúbicas dos pesos d_t e $\log d_t$, para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos da raça Ibagé, (modelo raiz cúbica de von Bertalanffy).

| | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| Medidas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| d_t | 2,460 | 2,233 | 1,927 | 1,732 | 1,508 | 1,313 | 1,155 | 1,087 |
| $\log d_t$ | 0,391 | 0,349 | 0,285 | 0,239 | 0,178 | 0,118 | 0,063 | 0,036 |
| Medidas | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| d_t | 1,049 | 1,039 | 1,023 | 1,149 | 1,127 | 1,110 | 0,963 | 0,977 |
| $\log d_t$ | 0,021 | 0,017 | 0,010 | 0,060 | 0,052 | 0,045 | -0,016 | -0,010 |

As estimativas dos parâmetros A' , B' e K são assim calculadas:

$$\hat{K} = \frac{\hat{a}}{\log e} = \frac{0,02442}{0,4343} = 0,0562$$

$$\hat{B} = 10^{\hat{a}} - \log(1 - e^{-\hat{K}}) = 10^{0,32239} - \log(1 - e^{-(13)(0,0562)}) = 4,0527$$

$$\hat{A} = \left[\sum_{t=4}^{29} W_t + (4,0527) \sum_{t=4}^{29} e^{-(0,0562)t}/26 \right] = 7,9735$$

São apresentadas na Tabela 6 as estimativas preliminares desses parâmetros, tanto para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos como dos bubalinos.

3 - Modelo Gompertz: $W_t = e^{A - BK^t}$.

De acordo com a metodologia, são apresentados, na Tabela 7, os resultados das diferenças e dos logaritmos dessas diferenças para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos da raça Ibagé.

As estimativas dos coeficientes a e b do modelo de regressão linear simples, para o exemplo são: $\hat{a} = 0,0975$ e $\hat{b} = -0,0330$.

TABELA 7. Diferenças entre os pesos transformados d_t e $\log d_t$, para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos machos da raça Ibagé, (modelo Gompertz).

| | | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Medidas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| d_t | 1,5864 | 1,3197 | 1,0870 | 0,9330 | 0,7870 | 0,6627 | 0,5662 | 0,5249 |
| $\log d_t$ | 0,200 | 0,120 | 0,036 | -0,030 | -0,104 | -0,179 | -0,247 | -0,280 |
| Medidas | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| d_t | 0,5055 | 0,5042 | 0,5028 | 0,5612 | 0,5355 | 0,5099 | 0,4281 | 0,4300 |
| $\log d_t$ | -0,296 | -0,297 | -0,299 | -0,251 | -0,271 | -0,293 | -0,368 | -0,367 |

TABELA 6. Estimativas preliminares dos parâmetros A' , B' e K (modelo raiz cúbica de von Bertalanffy) para o desenvolvimento ponderal médio de bovinos e bubalinos.

| Animais | Parâmetros | | |
|------------------|------------|-------|-------|
| | A' | B' | K |
| Bovinos | | | |
| Machos | 7,974 | 4,053 | 0,056 |
| Fêmeas | 6,873 | 2,925 | 0,076 |
| Bubalinos | | | |
| Out.-Inv. | 7,850 | 3,406 | 0,063 |
| Prim.-Ver. | 7,574 | 3,521 | 0,101 |

As estimativas dos parâmetros A , B e K são obtidos do seguinte modo:

$$\hat{K} = 10^{\hat{b}} = 0,9268$$

$$\hat{B} = 10^{\hat{a}} - \log(1 - \hat{K}^B) = 10^{0,0975} - \log(1 - 0,9268^{13}) = 1,9939$$

$$\hat{A} = \left[\sum_{t=4}^{29} \ln W_t + (1,9939) \sum_{t=4}^{29} (0,9268)^t/26 \right] = 6,1324$$

Na Tabela 8 encontram-se os resultados das estimativas preliminares dos parâmetros A, B e K, do modelo Gompertz, para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos Ibagé e dos bubalinos da raça Murrah.

4 - Modelo von Bertalanffy: $W_t = A \cdot (1 - B \cdot e^{-kt})^3$.

A partir das estimativas preliminares dos parâmetros A', B' e K do modelo raiz cúbica (Tabela 6) podem ser obtidas as estimativas preliminares dos parâmetros A, B e K do modelo von Bertalanffy. Para o exemplo considerado tem-se que:

$$A = A'^3 = (7,974)^3 = 507,02 \quad B = B'/A' = \frac{4,053}{7,974} = 0,508 \quad K = 0,056$$

TABELA 8. Estimativas preliminares dos parâmetros A, B e K (modelo Gompertz), para o desenvolvimento ponderal médio de bovinos e bubalinos.

| Animais | Parâmetros | | |
|------------------|------------|-------|-------|
| | A | B | K |
| Bovinos | | | |
| Machos | 6,133 | 1,995 | 0,927 |
| Fêmeas | 5,745 | 1,608 | 0,910 |
| Bubalinos | | | |
| Out.-Inv. | 6,056 | 1,620 | 0,915 |
| Prim.-Ver. | 6,033 | 1,782 | 0,884 |

Na Tabela 9 são apresentadas as estimativas preliminares dos parâmetros A, B e K, do modelo von Bertalanffy, tanto para o desenvolvimento ponderal médio dos bovinos da raça Ibagé como para o dos bubalinos da raça Murrah.

TABELA 9. Estimativas preliminares dos parâmetros A, B e K (modelo von Bertalanffy), para o desenvolvimento ponderal médio de bovinos e bubalinos.

| Animais | Parâmetros | | |
|------------------|------------|-------|-------|
| | A | B | K |
| Bovinos | | | |
| Machos | 507,02 | 0,508 | 0,056 |
| Fêmeas | 324,67 | 0,426 | 0,076 |
| Bubalinos | | | |
| Out.-Inv. | 483,74 | 0,434 | 0,063 |
| Prim.-Ver. | 434,49 | 0,465 | 0,101 |

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. João Gilberto Corrêa da Silva, Prof. Titular do Departamento de Matemática, Estatística e Computação da Universidade Federal de Pelotas, pela revisão deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- CAUSTON, D.R. A computer program for fitting the Richards function. *Biometrics*: v.25, n.2, p.401-409, 1969.
- CHAGAS, E.C.; CAGGIANO FILHO, P.; GARCIA, J.T.C. Formação do 5/8 Angus e 3/8 Zebú. [S.l.]:IPEAS, 1972. (Circular IPEAS, 57).
- DRAPER, N.; SMITH, H. *Applied regression analysis*. New York: John Wiley e Sons, Inc., 1966. 407p.
- GALLANT, A.R. Nonlinear regression. *The American Statistician*, v.29, n.2, p.73-81, 1975.
- HARTLEY, H.O.; BOOKER, A. Non-linear least squares estimation. *The annals of Mathematical Statistics*, v.36, p.638-650, 1965.
- SILVEIRA JÚNIOR, P. Modelo de crescimento para bovinos da raça Ibagé tendo em conta a oscilação sazonal. Pelotas, RS: UFPEL, 1979. Tese Professor Titular em Estatística Experimental.
- SILVEIRA JÚNIOR, P.; MACHADO, A.A.; SILVA, M.A. Modelos exponenciais com componente sazonal ajustados ao crescimento de búfa-

los da raça Murrah. *Ciência e Cultura*, v.42, n.1, p.36-47, jan. 1990.

SILVEIRA JÚNIOR, P.; ZONTA, E.P.; MACHADO, A.A.; COSTA, R.F.S. Método de obtenção

de estimativas preliminares de parâmetros de modelos de crescimento sazonais. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Brasília, v.27, n.12, p.1597-1605, 1992.