ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

\- E P G E -

ENSAIOS ECONÔMICOS DA E P G E

Nº 19

OS MODELOS CLÁSSICOS E NEOCLÁSSICOS DE DALE W. JORGENSON

ELISEU R. DE ANDRADE ALVES

INSTITUTO BRASILEIRO DE ECONOMIA
DA FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
\- 1975 -

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

Nº 1 - Análise Comparada das Alternativas de Política Comercial de um País em Processo de Industrialização -Edmar Lisboa Bacha - 1970 (esgotado).

Nº 2 - Análise Econométrica do Mercado Internacional do Café e da Política Brasileira de Preços - Edmar Lisboa Bacha - 1970 (esgotado)

Nº 3 - A Estrutura Econômica Brasileira - Mario Henrique Simonsen 1971 - (esgotado).

Nº 4 - O Papel do Investimento em Educação e Tecnologia no Processo de Desenvolvimento Econômico - Carlos Geraldo Langoni - 1972.

Nº 5 - A Evolução do Ensino de Economia no Brasil - Luiz de Freitas Bueno - 1972.

Nº 6 - Política Anti-Inflacionária - A Contribuição Brasileira - Mario Henrique Simonsen - 1973. (esgotado)

Nº 7 - Análise de Série de Tempo e Modelo de Formação de Expectativas - José Luiz Carvalho - 1973.

Nº 8 - Distribuição da Renda e Desenvolvimento Econômico do Brasil: Uma Reafirmação - Carlos Geraldo Langoni - 1973.

Nº 9 - Uma Nota Sobre a População Ótima do Brasil - Edy Luiz Kogut - 1973.

Nº 10 - Aspectos do Problema da Absorção de Mão-de-Obra: Sugestões para Pesquisas - José Luiz Carvalho - 1974.

Nº 11 - A Força de Trabalho no Brasil - Mario Henrique Simonsen 1974.

Nº 12 - O Sistema Brasileiro de Incentivos Fiscais - Mario Henrique Simonsen - 1974.

Nº 13 - Moeda - Antonio Maria da Silveira - 1974.

Nº 14 - Crescimento do Produto Real Brasileiro - 1900/1947 - Claudio Luiz Haddad - 1974.

Nº 15 - Uma Nota Sobre Números Índices - José Luiz Carvalho -1974.

Nº 16 - Análise de Custos e Benefícios Sociais I - Edy Luiz Kogut - 1974.

Nº 17 - Distribuição da Renda: Resumo da Evidência - Carlos Geraldo Langoni - 1974.

Nº 18 - O Modelo Econometrico de St. Louis Aplicado ao Brasil: Resultados Preliminares - Antonio Carlos Lemgruber -1975.

Nº 19 - Os Modelos Clássicos e Neoclássicos de Dale W.Jorgenson Eliseu R. de Andrade Alves - 1975.

OS MODELOS CLÁSSICOS E NEOCLÁSSICOS DE DALE W.JORGENSON

Eliseu R. de Andrade Alves (*)

Introdução

Este trabalho apresenta os modelos clássicos e neoclássicos desenvolvido por Jorgenson. Procura suprir alguns detalhes que foram omitidos e resumir o argumento principal que é exposto com riqueza de informações. Visa, desta forma, facilitar a leitura dos trabalhos do celebrado autor sobre economia dual.

Modelo Neoclássico

I. Um setor - o setor tradicional. Economia Fechada.

São as seguintes as pressuposições do modelo:

1) A função de produção contém, apenas, terra e trabalho. A terra é fixa. Supõe-se, implicitamente, que a fronteira agrícola tenha-se esgotado.

2) Não existe desemprego voluntário. A população economicamente ativa cresce à mesma taxa que a população total. Esta hipótese permite introduzir a população total na função de produção.

3) O salário é constante e, assim, se mantém durante a evolução da economia. É institucionalmente fixado. Esta hipótese, conjugado com o fato de a economia ser fechada, implica que a população necessita crescer a mesma taxa que a produção

4) A função de produção é do seguinte tipo:

$$Y = \begin{cases} e^{at}\, T^{\beta}\, P^{1-\beta} & a > o;\ o < \beta < 1 \quad e\ P < A^* \\ e^{at}\, T^{\beta}\, (A^*)^{1-\beta} & \text{para} \quad P > A^* \end{cases}$$

(*) Doutor (Ph.D) em Economia Rural pela "Pardue University" (USA), Professor de "Economia Agrícola" nesta EPGE e atual Presidente da "Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA)

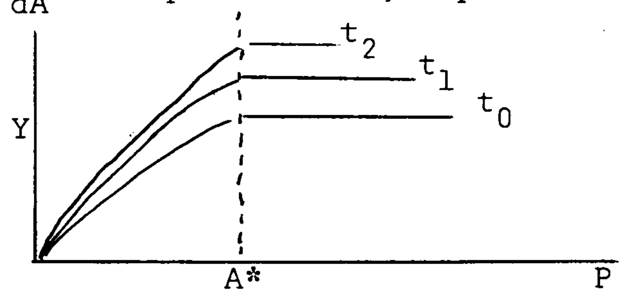
T: representa terra e P trabalho. Se $P > A^*$,

$P - A^* = M$ representa a quantidade de trabalho redundante. Dado que T é constante, podemos redefinir a unidade de medida, de forma que:

$$Y = \begin{cases} e^{at}\, P^{1-\beta}, & P < A^* \\ e^{at}\, (A^*)^{1-\beta} & P > A^* \end{cases}$$

O progresso tecnológico é do tipo neutro e se admite que as curvas se nivelem no mesmo ponto A^*. Formalmente:

$\frac{dY}{dA} = 0$ para $P > A^*$, e para todo t.(*)



Há dois casos: $P < A^*$ e $P > A^*$

(*) $P > A^*$, portanto existe desemprego disfarçado. Consequentemente:

$$Y = e^{at}\, (A^*)^{1-\beta}$$

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$$

$\dot{Y} = a\, e^{at}\, (A^*)^{1-\beta}$ A^* é constante

Portanto,

$\frac{\dot{Y}}{Y} = a$ (produção cresce a mesma taxa do progresso tecnológico).

Por outro lado

$$P = A^* + M$$

$$\dot{P} = \dot{M}$$

$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{M}{P} \cdot \frac{\dot{M}}{M} = a$ (porque a população cresce à mesma taxa da

(*) $\lim \frac{dY}{dA} = 0$ $A^* > A^*$

produção. $\frac{M}{P}$ representa a fração da população que está disfarçadamente desempregada. $\frac{\dot{M}}{M}$ é a taxa de crescimento da população disfarçadamente desempregada e $\frac{\dot{P}}{P}$, taxa de crescimento da população total

(*) $P < A^*$ Não existe desemprego disfarçado

$$Y = e^{at}\ P^{1-\beta}$$

$$\dot{Y} = a\ e^{at}\ P^{1-\beta} + (1-\beta)\ e^{at}\ P^{-\beta}\ \dot{P}$$

$$\dot{Y} = a\ e^{at}\ P^{1-\beta} + (1-\beta)\ e^{at}\ P^{e-\beta}\ \frac{\dot{P}}{P}$$

$$\dot{Y} = a\ Y + (-\beta)\ \frac{\dot{P}}{P}\ Y$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = a + (1-\beta)\ \frac{\dot{P}}{P}$$

Dada a hipótese de constância do salário,

$$a + (1-\beta)\ \frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{P}}{P}$$ Portanto,

$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{a}{\beta}$ A taxa de crescimento da População $(\frac{\dot{P}}{P})$ é superior à taxa de crescimento do progresso tecnológico ($\underline{a}$), por que $\frac{a}{\beta} > a$, visto que $o < \beta < 1$.

Então, numa economia onde as atividades se realizam no setor tradicional e não existe desemprego disfarçado, a população crescerá a uma taxa superior à do progresso tecnológico, enquanto a produtividade marginal do trabalho for positiva (ou seja, enquanto não for atingido o ponto A*). Quando esta se anular / ($P > A^*$), a taxa de crescimento da população cairá e se igualará àtaxa de progresso tecnológico. É evidente que a hipótese do salário constante é crucial para esta conclusão.

II. Dois Setores: Setor Tradicional e Moderno. Economia Fechada.

Pressuposições do Modelo:

1) Mantém-se as hipóteses 1-4. No que se refere ao salário, este é constante para toda a economia, quando medido em termos do bem do setor tradicional.

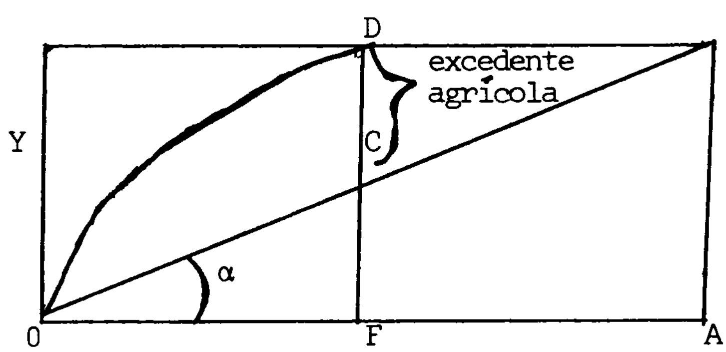
2) As hipóteses sobre o setor moderno serão aduzidas à medida que se explicita o modelo.

O Modelo

$$Y = \begin{cases} e^{at} A^{1-\beta} & \text{se } A < A^* \text{ e } a > 0 \\ e^{at} (A^*)^{1-\beta} & \text{se } A \geqslant A^* \quad 0 < B < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$S = Y - A\,\overline{W} \quad (2)$$

S é o excedente agrícola. $\overline{W}$: salário institucionalmente prefixado, medido em termos de bens da agricultura.* Este salário é o mesmo para os dois setores (tradicional e moderno)



No ponto F, por exemplo,

$S = DF - CF$

$\overline{W} = \frac{CF}{OF} = \text{tag}\ \alpha$

$\Longrightarrow CF = OF\,\overline{W}$

$\Longrightarrow S = DF - OF\,\overline{W}$

$$P = A + I \quad (3)$$

P: população

I: parte da população alocada ao setor moderno

A: parte da população alocada ao setor tradicional.

$$X = e^{bt} K^{c} I^{1-c} \quad , \quad b > 0 \ ; \quad 0 < c < 1 \quad (4)$$

* Agricultura é sinônimo de setor tradicional.

X: Produção do setor moderno;

K: capital

$$\frac{1 - c}{I} X = W \qquad (5)$$

Valor da produtividade marginal do trabalho igual ao salário (medido em termos do bem do setor moderno; note-se que tomamos $Px = 1$, preço do bem do setor moderno). O setor moderno é caracterizado pela presença de capital (K) na função de produção e pela equação (5).

Como não existe setor monetário (economia de troca), W pode ser interpretado como o número de unidades de X necessário para pagar uma hora de trabalho.

A relação de troca é definida pelo número de unidades de X que são trocadas por uma unidade de Y. Os trabalhadores do setor moderno gastam todo o salário na compra do excedente S. Sendo q a relação de troca e WI a folha de pagamento do setor moderno, $\frac{WI}{q}$ dá equivalência desta folha de pagamento em termos de unidade de Y. Logo,

$$S = \frac{WI}{q} \text{ ou}$$

$$qS = WI \qquad (6)$$

Num dado momento, K e P são conhecidos. Não há problemas de alocação de K. Todo ele é alocado ao setor moderno. Há, desta forma, 6 equações e 7 variáveis: Y, A, I, W, X, q e S. O sistema não determina todas as variáveis. A introdução da função de utilidade U (X,Y) e a hipótese que o consumidor maximiza a sua utilidade sujeito à linha de orçamento resolveria o problema, pois, ter-se-ia $\frac{U_Y}{U_X} = q$. Evita-se a introdução da função de utilidade no modelo, admitindo-se q constante. E, desta maneira, o sistema 1-6 fica determinado. Não é difícil mostrar que ele tem solução.

Esta hipótese - q constante, conjugada com a hipótese da constância do salário do setor moderno em termos do bem do setor tradicional, implica que W é constante. Por (6)

$qS = WI$, ou

$\frac{S}{I} = \frac{W}{q}$; Como $\frac{S}{I} = \overline{W}$, é constante (salário industrial em termos do bem do setor tradicional), q constante impica $\underline{W}$ constante. Este fato é crucial às deduções que se seguem.

Relações Dinâmicas

$\dot{K} = cX$ (7)

Os capitalistas poupam toda a renda do capital (cX é a participação do capital no produto)

$P = Po\ e^{rt}$ $r > o$; $P(o) >$ (8).

Entretanto, r não é um parâmetro do modelo; é função de t e é endogeneamente determinado. Veremos que a hipótese ' dos salários constantes em termos do bem do setor tradicional determinará r. Enquanto houver trabalho redundante r=a. Quando todo o trabalho redundante for transferido para o setor moderno, veremos que $r < a$, que é taxa de progresso tecnológico da agricultura.

Em resumo, o modelo é o seguinte:

$$Y = \begin{cases} e^{at}\ A^{1-\beta}, & A < A^* \\ e^{at}\ (A^*)^{1-\beta}, & A > A^* \end{cases} \qquad (1)$$

$$S = Y - A\overline{W} \qquad (2)$$

$$P = A + I \qquad (3)$$

$$X = e^{bt}\ K^c\ I^{1-c} \qquad (4) \qquad b > o; \quad o < c < 1$$

$$X\ \frac{1 - c}{I} = W \qquad (5)$$

$$qS = WI \quad (6)$$

$$q = \text{constante} \quad (7)$$

$$\dot{K} = cX \quad (8)$$

$$P = Po\ e^{rt} \quad (9)$$

A seguir, procurar-se-á demonstrar a existência de Lewis Turning Point e do ponto de comercialização.

Proposição 1: A produtividade marginal do trabalho do setor moderno é constante.

$(1 - c)\ \frac{X}{I}$ é produtividade marginal do trabalho do setor moderno. Por hipótese, $\frac{(1-c)X}{I} = W$, como W é constante, segue-se que a produtividade marginal do trabalho é constante. Note-se que a constância de W é consequência da constância de q e da dos salários, em termos do bem do setor tradicional.

Proposição 2: A produtividade média do trabalho é constante e, assim, permanecerá.

$$(1-c)\ \frac{X}{I} = W$$

$\frac{X}{I} = \frac{W}{1-c}$, como W e c são constantes,

$\frac{X}{I}$ é também constante. Seja,

$x = \frac{X}{I} = \frac{W}{1-c}$; logo

$\dot{x} = 0$ Logo a produtividade média do trabalho permanece constante.

Proposição 3: Nas condições do modelo, a taxa de crescimento da força de trabalho do setor moderno (I) e da produção são iguais:

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{I}}{I}$$

Admitir-se-á, de início, que a função de produção do setor moderno seja linearmente homogenea e duas vezes diferenciavel. Fazendo-se, em seguida, a elasticidade de substituição igual 1, ter-se-á provado a proposição para função do tipo da especificada no modelo. Desta forma, mostrar-se-á que a proposição 3 depende da hipótese feita sobre a função de produção.

$$X = e^{bt}\ F(K,I) \qquad (1)$$

$$F(h\ K,\ h\ I) = h\ F(K,\ I) \qquad (2)$$

$$\frac{X}{bt} = F(K\ \ I) = F_1\ K + F_2\ I \qquad (3)$$: Consequência da hipótese de linearidade.

Demonstração.

<u>Primeiro passo</u>: Calcular $\frac{\dot{X}}{X}$

$$\dot{X} = b\ e^{bt}\ F(K,\ I) + e^{bt}\ (F_1\ \dot{K} + F_2\ \dot{I}\ )$$

$$\frac{\dot{X}}{X} = b + e^{bt}\ (\ \frac{F_1\ K}{X}\ \frac{\dot{K}}{K} + \frac{F_2\ I}{X}\ \frac{\dot{I}}{I}\ ) \qquad (4)$$

Por (3) $e^{bt}\ (\frac{F_1\ K + F_2\ I}{X}) = 1 \Longrightarrow \frac{F_2\ I}{X} = e^{bt} - \frac{F_1\ K}{X}$

Substituindo-se em (4)

$$\frac{\dot{X}}{X} = b + e^{bt}\left[\frac{K\ F_1}{X}\ \frac{\dot{K}}{K} + (e^{-bt} - \frac{F_1\ K}{X}\ )\ \frac{\dot{I}}{I}\right] \quad \text{ou}$$

$$\frac{\dot{X}}{X} = b + e^{bt}\ \frac{F_1\ K}{X}\ \left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{I}}{I}\right] + \frac{\dot{I}}{I} \qquad (5)$$

$$\frac{F_1\ K}{X} = \frac{F_1\ F_2\ F_{21}}{e^{bt}\ F\ F_{21}\ \bar{F}_2}\ K \qquad (X{=}F)$$

$$\frac{F_1 \, F_2}{F \, F_{21}} = e_s \quad \text{(elasticidade de substituição)}$$

$$\frac{F_1 \, K}{X} = K.\frac{e_s \, F_{21}}{e^{bt} \, F_2} \qquad (6) \quad \text{substituindo-se em} \quad (5)$$

$$\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{I}}{I} = b + \frac{K \, e_s \, F_{21}}{F_2} \left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{I}}{I}\right] \qquad (7)$$

<u>Segundo Passo</u>: Calcular $\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{I}}{I}$

$e^{bt} \, F_2 = W$ (Produtividade marginal = salário)

Derivando-se em relação a t:

$b \, e^{bt} \, F_2 + e^{bt} \, \dot{F}_2 = 0$ (W é constante)

$$b \, F_2 = \dot{F}_2 \qquad (8)$$

$$\dot{F}_2 = F_{21} \, \dot{K} + F_{22} \, \dot{I} \qquad (9)$$

Derivando-se (3) em relação I

$$F_{12} \, K + F_2 + I \, F_{22} = F_2$$

$$F_{12} \, K + I \, F_{22} = 0 \longrightarrow F_{22} = - F_{12} \, \frac{K}{I} \qquad (10)$$

Substituindo-se 10 em 9:

$$\dot{F}_2 = F_{21} \, \dot{K} + (-F_{12}) \frac{K}{I} . \, \dot{I}$$

$$\dot{F}_2 = F_{21} \, (\dot{K} - \frac{K}{I} . \, \dot{I})$$

$$\dot{F}_2 = F_{21} \, K \, (\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{I}}{I})$$

Como $\dot{F}_2 = -b\ F_2$ (Por 8)

$$- b\ F_2 = F_{21}\ K\ \left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{I}}{I}\right)$$

$$\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{I}}{I} = - \frac{b}{K}\ \frac{F_2}{F_{21}} = - \frac{b}{K}\ \frac{F_2\ F_1\ F}{F\ F_{21}\ F_1} = - \frac{b}{K}\ \frac{e_s\ F}{F_1} \qquad (11)$$

Substituindo-se 11 em 7, obter-se-á

$$\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{I}}{I} = b\ (1 - e_s)$$

No caso de $e_s = 1$ (função Cobb-Douglas)

$$\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{I}}{I} = 0 \Longrightarrow \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{I}}{I}$$

Logo, a iguladade só se verifica se $e_s = 1$. Esta prova foi oferecida por Stephen A. Marglin, e se encontra em: Adelman e Thorbecke (eds) The Theory and Design of Economic Development, Baltimore, The Jonhs Hopkins Press, 1966, p. 65-66. Nas condições do modelo, a proposição 3 é imediatamente demonstrada a partir de $\frac{(1-c)X}{I} = W$ (W é constante).

Proposição 4: A taxa de crescimento do produto do setor moderno é maior que a taxa de crescimento do capital. Consequentemente, nas condições do modelo, a razão capital produto é decrescente.

$$X = e^{bt}\ K^c\ I^{1-c} \qquad (1)$$

$$\frac{(1-c)X}{I} = W \Longrightarrow I = \frac{(1-c)X}{W}$$

Substituindo-se em (1), virá

$$X = e^{\frac{b}{c}t}\ \left(\frac{1 - c}{W}\right)^{\frac{1-c}{c}}\ K$$

$$\dot{X} = \frac{b}{c}\ e^{\frac{b}{c}t}\ \left(\frac{1 - c}{W}\right)^{\frac{1 - c}{c}} K + e^{\frac{b}{c}t}\ \left(\frac{1 - c}{W}\right)^{\frac{1 - c}{c}}\ \dot{K}$$

$$\dot{X} = \frac{b}{c} X + X \frac{\dot{K}}{K}$$

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{b}{c} + \frac{\dot{K}}{K} \qquad (2)$$

$$\dot{K} = cX$$

$$\dot{K} = c\, e^{\frac{b}{c}t} \left(\frac{1 - c}{W}\right)^{\frac{1 - c}{c}} K$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = c \left(\frac{1 - c}{W}\right)^{\frac{1 - c}{c}} e^{\frac{b}{c}t} \qquad (3)$$

Logo: $$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{b}{c} + c \left(\frac{1 - c}{W}\right)^{\frac{1 - c}{c}} e^{\frac{b}{c}t} \qquad (4)$$

Como $\frac{b}{c} > 0$, comparando-se 2 e 3 a proposição 4 é derivada.

Proposição 5: As taxas de crescimento do capital e do produto ultrapassam qualquer número prefixado. O mesmo ocorre com a taxa de crescimento da população alocada ao setor moderno,

Por (3)

$\lim \frac{\dot{K}}{K} = \infty$ visto que $\frac{b}{c} > 0$. Isto implica que $\frac{\dot{X}}{X} \to \infty$

$$\lim \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{I}}{I} = \infty$$

Proposição 6: Admitamos que, inicialmente, se tenha $A - A^* > 0$, então existe um t^*, tal que para $t = t^*$ $A(t^*) = A^*$. Este ponto é denominado: Lewis Turning Point.

1. Seja $Z = \frac{\dot{I}}{I}$

$$P = Po\ e^{at} \qquad \frac{\dot{P}}{P} = a$$

$$I = Io\ \ I^{zt}$$

$$A = P - I = Po\ e^{at} \left(1 - \frac{Io}{Po}\ e^{(z-a)t}\right)$$

$\frac{A}{P} = \frac{A}{P_o \ e^{at}} = h_A$ (fração da população vivendo no setor tradicional).

$$h_A = 1 - \frac{Io}{Po} \ e^{(z-a)t}$$

Como Z é crescente e ilimitado, existe um t_1 tal que para $t > t_1$ $z > a$, e para $t > t_1$ h_A é continua e decrescente. Logo, nas condições do modelo, existe um ponto no tempo em que a população do setor tradicional começa decrescer relativamente. Este ponto pode coincidir com a origem se $Z(o)>a$, $Z(o) = \frac{b}{c} + c(\frac{1-c}{w})^{\frac{1-c}{c}}$

2. $P = A - 1$ ou

$$\frac{\mathring{P}}{P} = h_A \frac{\dot{A}}{A} + h_I \frac{\dot{I}}{I} = a \qquad h_I = 1 - h_A \text{ é crescente.}$$

Como h_I e $\frac{\dot{I}}{I}$ são funções contínuas e crescentes e $\frac{\dot{I}}{I}$ ilimitado, existe um $\hat{t}$ tal que para $t > \hat{t}$ $h_I \frac{\dot{I}}{I} > a$ e para este $\hat{t}$, evidentemente, $h_A \frac{\dot{A}}{A} < 0$. Isto implica em se ter:

$$\frac{\dot{A}}{A} < 0 \text{ para } t > \hat{t} \ (h_A > 0)$$

Como para $t > \hat{t}$ $\frac{\dot{A}}{A} < 0$, a população alocada ao setor tradicional decresce absolutamente, evidentemente se atingirá $t = t^*$ em que $A = A^*$, e toda a força de trabalho redundante desaparece.

3. Se para $t = t^*$, $h_I < \beta$, segue-se que

$\frac{\dot{I}}{I} = \frac{a}{h_I} > \frac{a}{\beta}$. Logo, no "lewis Turning Point" se $h_I > \beta$, a população alocada ao setor moderno estará crescendo a uma taxa superior a $\frac{a}{\beta}$ e, portanto, superior a a. Enunciaremos este ponto na proposição abaixo*.

(*) A derivada em A* é definida do lado direito e é igual a 0.

$$\lim \frac{dy}{dA} = 0 \qquad A_+ \rightarrow A^*$$

Proposição 7: No "Lewis Turning Point" (t^*) a população do setor moderno está crescendo a uma taxa maior do que a do crescimento da população, que é igual a taxa de crescimento do progresso tecnológico do setor tradicional (a). E a população ' do setor tradicional está decrescendo absolutamente ($\frac{\dot{A}}{A} < 0$).

Para $A < A^*$, a produtividade marginal é positiva; em $A = A$ é nula (*)

Proposição 8: Se a taxa de crescimento da população ' alocada ao setor tradicional for negativa ($\frac{\dot{A}}{A} < 0$) a produtividade marginal do trabalho deste setor será crescente para $t > t^*$.

É fácil mostrar que a produtividade marginal do trabalho do setor tradicional (Q) é igual a:

$$Q = (1 - \beta)\,\frac{Y}{A}$$

Com algumas manipulações:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{A}}{A}$$

$$\text{mas} \quad \frac{\dot{Y}}{Y} = a + (1 - \beta)\frac{\dot{A}}{A}$$

$$\text{Logo:} \quad \frac{\dot{Q}}{Q} = -\,\beta\frac{\dot{A}}{A} + a$$

Ora $\beta > 0$ e $a > 0$, por hipótese

Se $\frac{\dot{A}}{A} < 0$, segue-se que $\frac{\dot{Q}}{Q} > 0$.

Proposição 9: Se para $t > t^*$, tivermos $\frac{\dot{A}}{A} < 0$, então existe um $t = t^{**}$, onde $Q = \overline{W}$ (Produtividade marginal do trabalho = salário institucional).

(*) Veja nota de rodapé da página anterior.

Este ponto é o ponto de comercialização.

Pela Proposição 7, para $t > t^*$ e $\frac{\dot{A}}{A} < 0$ tem-se $\frac{\dot{Q}}{Q} > 0$. Em $t = t^*$, $Q = 0$. Como Q é função contínua de t, crescente e não limitada, existe um $t = t^{**}$ e $t^{**} > t^*$ tal que $Q = \overline{W}$ (Por hipótese $\overline{W} > 0$).(*)

Observe que:

$$\lim_{A \to 0} Q = (1 - \beta) . \lim_{A \to 0} \frac{Y}{A} = (1-\beta) \lim_{A \to 0} Y' = e^{bt} \lim \left(\frac{1 - \beta}{A^{\beta}}\right) = \infty.$$

(por que t é fixo). Isto mostra que a produtividade marginal (Q) cresce sem limite à medida que $\underline{A}$ aproxima de $\underline{0}$. Portanto, a condição suficiente para que o ponto de comercialização exista é que $\frac{\dot{A}}{A} < 0$ para $t > t^*$

Já vimos que:

$\frac{\dot{Y}}{Y} = a + (1 - \beta) \frac{\dot{A}}{A}$. Se $\frac{\dot{A}}{A} < 0$, tem-se $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{Y}}{Y} < a$. Isto nos permite enunciar a próxima proposição.

<u>Proposição 9:</u> Se para $t > t^*$ se tiver $\frac{\dot{A}}{A} < 0$, a população crescerá para $t > t^*$ a uma taxa menor que o progresso tecnológico do setor tradicional até se atingir o ponto de comercialização ($t = t^{**}$)

Como $Z(t)$ é crescente e $Z(t^*) > a$, pelo já visto, segue-se que para $t \geqslant t^*$ a população alocada ao setor moderno crescerá a uma taxa maior que o do progresso tecnológico do setor tradicional, taxa aquela que se distanciará cada vez mais de $\underline{a}$.

É importante investigar-se se as condições do modelo implicam que para $t \geqslant \hat{t}$(anteriormente definido) se tem $\frac{\dot{A}}{A} < 0$. É claro que para $\hat{t} \leqslant t \leqslant t^*$ esta condição é verificada. Resta, então, saber-se se para $t > t^*$, $\frac{\dot{A}}{A} < 0$.

(*) Função contínua para $t > t^*$. Em t^* existe um ponto de descontinuidade

Proposição 10: Nas condições do modelo, se $h_I < \beta$ para $t = t^*$, então $\frac{\dot{A}}{A} < 0$ para $t > t^*$.

1. Por hipótese:

$$S = \frac{WI}{q} \text{ (W e q constantes)}$$

$$\dot{S} = \frac{W}{q} \cdot I \cdot \frac{\dot{I}}{I}$$

$\Longrightarrow \frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{I}}{I}$ logo S cresce à mesma taxa que I e, portanto, S é crescente, e:

$$\lim \frac{\dot{S}}{S} = \lim \frac{\dot{I}}{I} \cdot \infty$$

2. $S = Y - A\overline{W}$

$$S = Y(o)e^{N_y t} - A(o)\,\overline{W}\,e^{N_a t} \qquad N_y = \frac{\dot{Y}}{Y}\,;\; N_a = \frac{\dot{A}}{A}$$

Por hipótese $A(o)\overline{W} = Y(o)$

$$S = Y(o)\,e^{N_y t} - Y(o)\,e^{N_a t}$$

$$S = Y(o)\,e^{N_y t}\left[1 - e^{(N_a - N_y)t}\right]$$

Como S é positivo e crescente $\Longrightarrow N_a < N_y$, ou seja

$$\frac{\dot{A}}{A} < \frac{\dot{Y}}{Y}$$

3. Vimos, anteriormente, que se $h_I < \beta$ em $t = t^*$, neste ponto se tem $\frac{\dot{I}}{I} > \frac{a}{\beta}$. Por outro lado,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = a + (1 - \beta)\,\frac{\dot{A}}{A} \quad \text{para } t > t^*$$

Como $\frac{\dot{A}}{A} < \frac{\dot{Y}}{Y}$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} < a + (1 - \beta)\,\frac{\dot{Y}}{Y} \qquad\qquad \frac{\dot{Y}}{Y} < \frac{a}{\beta}$$

4. Então, se segue que, para $t > t^*$, $\frac{\dot{I}}{I} > \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{P}}{P}$, visto $\frac{\dot{I}}{I}$ ser função contínua e crescente. Isto implica que h_I é crescente para $t > t^*$, pois:

$$A = Po\ e^{rt} - Io\ e^{zt}$$

$$h_A = 1 - \frac{Io}{Po}\ e^{(z-r)t} \qquad \text{Como } 1-h_a = h_I,$$

$$h_I = \frac{Io}{Po}\ e^{(z-t)t} \qquad r = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{P}}{P}$$

para $z > r$, h_I é crescente.

5. Já vimos que

$$\frac{\dot{P}}{P} = a + (1 - \beta)\frac{\dot{A}}{A} \quad \text{para } t > t^*. \text{ Por outro lado}$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = (1 - h_I)\frac{\dot{A}}{A} + h_I\frac{\dot{I}}{I} \quad \text{logo,}$$

$$a + (h_I - \beta)\frac{\dot{A}}{A} = h_I\frac{\dot{I}}{I}$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{-a + h_I\frac{\dot{I}}{I}}{h_I - \beta}$$

No "Lewis Turning Point" $h_I\frac{\dot{I}}{I} > a$, como já foi visto. Como h_I e $\frac{\dot{I}}{I}$ são funções crescentes, $h_I\frac{\dot{I}}{I} > a$ para $t > t^*$, logo, o numerador da expressão acima é positivo. O denominador é negativo ($h_I < \beta$, por hipótese) Consequentemente, se em $t = t^*$ $h_I < \beta$, $\frac{\dot{A}}{A} < 0$ para $t \geq t^*$, pois em $t = t^*$ $\frac{\dot{A}}{A} < 0$.

Proposição 11: Nas condições do modelo, se $h_I < \beta$, a produtividade marginal se igualará a $\overline{W}$, quando $h_I = \beta$; e neste ponto, tem-se $t = t^{**}$.

1. É claro quando a produtividade marginal se igualar ao salário se tem $t = t^{**}$, por definição. Por outro lado, h_I é contínua e crescente.(*) Eventualmente se igualará a β.

2. A constância do salário em termo do bem agrícola, exige que

$\overline{W}I = S$; como $\overline{W} = \frac{Y}{P}$, segue-se que

$\frac{Y}{P} \cdot I = S$ ou

$\frac{I}{P} \cdot Y = S = h_I Y$

3. Logo o setor tradicional receberá $(1 - h_I)$ Y. Como h_I é crescente e $h_I < \beta$ para $t = t^*$, eventualmente o setor tradicional receberá $(1 - \beta)$ Y, que coincide com a fatia que lhe toca quando a produtividade marginal se iguala ao salário ($\overline{W}$). Consequentemente, quando $t = t^{**}$, $h_I = \beta$.

Com a proposição 12, terminamos a exploração dedutiva do modelo Clássico de Jorgensen. Mostrou-se que, nas condições do modelo, existindo algo do setor moderno, a economia evoluirá de tal forma a atingir o ponto $t = t^*$ (Lewis Turning Point), quando todo o trabalho redundante é retirado do setor tradicional. Neste ponto, a produtividade marginal do trabalho começará a crescer, e, eventualmente, chegar-se-á ao ponto $t = t^{**}$, quando se iguala ao salário institucional $\overline{W}$. Este é o <u>ponto de comercialização</u>. A condição do <u>mínimo esforço</u> é supérflua, neste caso. Esta condição exige que a população cresça a uma taxa menor que a do crescimento da população do setor moderno.

Outro aspécto importante é que o salário do setor industrial permanecerá constante, em vista da hipótese da constância da relação da troca e dos salários, quando medido em termo do bem do setor tradicional.

Viu-se que:

$qS = WI$

(*) A continuidade de h_I decorre de A e I serem, por hipótese, / funções contínuas de t. Note-se que $h_I = \frac{I}{I+A}$

$q\frac{S}{I} = W$, ora $\frac{S}{I}$ é constante, por hipótese, e o mesmo ocorre com q.

Logo,

$\dot{W} = 0$, que indica que o salário do setor industrial permanece constante.

Atingido o ponto de comercialização, conforme Lewis, a teoria clássica deixa de se aplicar e a economia prossegue sua evolução dentro de condições descritas pela análise neoclássica,em que todos os fatores tem oferta inelástica e são remunerados de acordo com a produtividade marginal. Conforme Fei e Ramis, o ponto de comercialização, é o mais importante marco histórico do processo de evolução da economia dual, ou seja, coincide com o desaparecimento do dualismo. Os salários não serão mais constantes à medida que a acumulação de capital prossegue. Os benefícios da tecnologia já não são apenas incorporados aos lucros e, a margem de lucros não é necessáriamente sempre crescente.

Finalmente, é fácil verificar que o critério do <u>esforço mínimo</u> é sempre obedecido:

Já vimos que:

$$\frac{\dot{P}}{P} = a + (1 - \beta)\frac{\dot{A}}{A} = (1 - h_I)\frac{\dot{A}}{A} + h_I\frac{\dot{I}}{I}$$

como $0 < h_I < 1$ e $\frac{\dot{A}}{A} < 0$ para $t \geqslant \hat{t}$,

$$\frac{\dot{P}}{P} < h_I\frac{\dot{I}}{I} \quad \text{visto que} \quad 0 < h_I < 1$$

$$\frac{\dot{P}}{P} < \frac{\dot{I}}{I}$$

Na seção seguinte, discutiremos o modelo neoclássico de Jorgenson.

O MODELO NEOCLÁSSICO

I. Pressuposições.

1. População e força de trabalho.

a. O crescimento da população é o mesmo da força de trabalho. Não existe desemprego, nem voluntário e nem disfarçado. Por esta razão, pode-se tomar a força de trabalho como igual à população.

b. Crescimento da população.

Pressupõe-se que: (*) se não houver produção a taxa de natalidade cai a 0 e a de mortalidade mantém-se constante e igual a m.

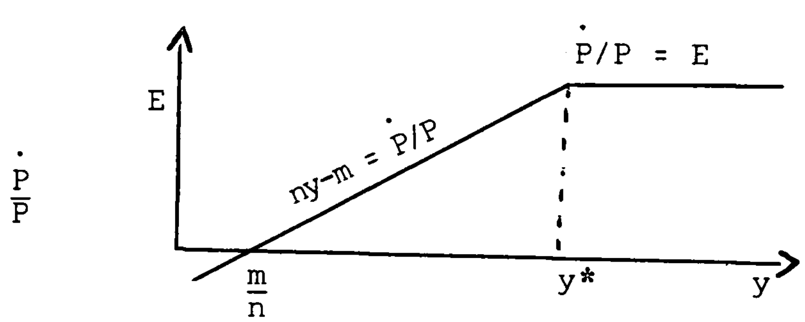
(*) Se a produção percapita $y = \frac{Y}{P}$ for menor que y*, a população crescerá a uma taxa igual a:

$\frac{\dot{P}}{P} = ny - m$ para $y < y^*$. Portanto, a taxa de reprodução bruta (n y) é proporcional à produção percapita. na é constante de proporcionalidade.

(*) Se $y \geqslant y^*$ o crescimento da população se processará a taxa máxima E. Portanto,

$$\frac{\dot{P}}{P} = E \quad \text{para} \quad y \geqslant y^*$$

A representação gráfica é a seguinte:



$$\frac{\dot{P}}{P} = 0 \Longrightarrow y = \frac{m}{n}$$

As constantes n, m e E só podem ser modificadas havendo mudança das instituições e da assistência médica. Admitir-se-á que não ocorrerão estes tipos de mudanças.

2. Trata-se de economia fechada.

3. Admite-se a existência de dois setores: um tradicional e outro moderno, que serão caracterizados a seguir:

Setor tradicional:

a. A função de produção é igual a anteriormente especificada, quando da discussão do modelo clássico:

$Y = e^{at} A^{1 - \beta}$ $a > 0$ $0 < \beta < 1$. Capital não está presente. O progresso tecnológico é neutro no sentido de Hicks. Além do mais, $A < A^*$, ou seja, a produtividade marginal do trabalho é positiva. A terra é fixa e tida como os poderes indestrutíveis da natureza, não podendo ser aumentada ou destruída.

b. O salário do setor tradicional é proporcional ao do setor moderno.

Setor moderno: É descrito por:

$X = e^{bt} K^c M^{1-c}$ $\quad 0 < c < 1 \quad b > 0$

ou $x = \frac{X}{M}$ e $k = \frac{K}{M}$

$x = e^{bt} k^c$

$\dot{K} = cX$, ignorando-se a depreciação.

4. Toda produção é consumida para $y \leq y^*$. Para $y > y^*$, o aumento do consumo percapita é em termos do bem do setor moderno. Neste sentido a produção do setor tradicional, em excesso de y^*, constitue o excedente

$$s = y - y^* \qquad \text{para} \qquad y \geqslant y^*.$$

Enquanto $s > 0$, trabalho pode ser retirado do setor tradicional e transferido para o moderno, sem redução da taxa de crescimento da população que é fixa e igual a E para $y \geqslant y^*$.

5. $P = A + M$

II. Implicações do modelo quando só existe o setor tradicional.

Neste caso A = P e não vale a hipótese da constância do consumo percápita.

1. $y < y^* \Longrightarrow \frac{\dot{P}}{P} = ny - m$

$$y = \frac{Y}{A} = e^{at} A^{-\beta}$$

$$\dot{y} = a\, e^{at} A^{-\beta} - \beta\, e^{at} A^{-\beta} \frac{\dot{A}}{A}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{y}}{y} = a - \beta \frac{\dot{A}}{A}$$

Como $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A}$ (A = P) e $\frac{\dot{P}}{P} = ny - m$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{y}}{y} = a - \beta\,(ny - m)$$

$$\Longrightarrow \dot{y} = (a + \beta m)y - \beta\, n\, y^2$$

Esta equação diferencial descreve a evolução da produção percapita quando $y < y^*$. A solução da mesma é dada por:

$$y(t) = y_2 + \frac{1}{e^{(a+\beta m)t}\left[\left(\frac{\beta n}{a + \beta m}\right) + \left(\frac{1}{y(o)\ y_2}\right)\right] + \left(\frac{-\ \beta n}{a + \beta m}\right)}$$

para $y(o) \neq y_2$

com $a + \beta m > 0$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = y_2 = \frac{a + m\beta}{\beta n}$$

Esta equação admite duas soluções estacionárias (produção percapita constante), dadas por $\dot{y} = 0$.

$$\dot{y} = 0 \Longrightarrow (a + \beta m)y - \beta n\, y_2 = 0$$

$$\Longrightarrow y(a + \beta m - \beta n y) = 0$$

$$y_1 = 0; \qquad a + \beta m - \beta n y_2 = 0 \implies y_2 = - \frac{a + \beta n}{\beta n}$$

A primeira solução $y_1 = 0$, corresponde à morte generalizada. A população desaparece à taxa constante m:

$$\frac{\dot{P}}{P} = n\,y - m \qquad\qquad y = 0$$

$$\implies \frac{\dot{P}}{P} = -m$$ (-m é taxa de desaparecimento da população.)

A segunda solução $y_2 = \frac{a + \beta m}{\beta n} > 0$, indica que a população cresce à taxa constante

$\frac{\dot{P}}{P} = n\,y_2 - m$, e a produção percapita permanece constante, visto que $\dot{y} = 0$.

2. $y \geqslant y^*$

Neste caso, $\frac{\dot{P}}{P} = E > 0$ e,

$$\frac{\dot{y}}{y} = a - \beta\frac{\dot{A}}{A} = a - \beta E \qquad (\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{P}}{P})$$

Ou seja,

$y(t) = y(0)\ e^{(a - \beta E)t}$ é solução da equação diferencial acima:

Por hipótese:

$$\frac{\dot{P}}{P} = n\,y^* - m = E \qquad (\text{quando } y = y^*)$$

$$\implies y^* = \frac{m + E}{n}$$

O valor crucial para análise da evolução do setor tradicional é y^*. A seguir efetuaremos esta análise.

Análise da evolução do setor tradicional

Para $y < y^*$.

$$y(t) = y_2 + \cfrac{1}{e^{(a + \beta m)t}\left[\cfrac{\beta\, n}{a + \beta m} + \cfrac{1}{y(o) - y_2}\right] + \cfrac{-\beta n}{a + \beta m}}$$

(2) Para $y \geqslant y^*$

$$y(t) = y(o)\, e^{(a - \beta E)t}$$

As duas equações acima descrevem a evolução do setor tradicional. Note-se que:

$$y_2 = \frac{a + m\beta}{\beta n} \quad \text{e} \quad y^* = \frac{m + E}{n}$$

Existem as seguintes possibilidades:

(a) $y_1 = 0$. A população desaparece a taxa m, como já se viu. Este caso não tem maior interesse.

(b) $y^* < y_2$

(*) Se $y(o) < y^*$, o sistema evoluirá segundo a equação 1. Antes de convergir para y_2 (solução estacionária) atingirá $y(t) = y^*$ (porque $y^* < y_2$) e, então, evoluirá segundo a equação (2) acima. Como, neste caso, $a - \beta E > 0$ $y(t)$ continuará crescendo, sem limite. Deste modo a economia tradicional não se verá presa a uma armadilha de produção percapita baixa. É, entretanto, necessário mostrar-se que $a - \beta E > 0$

$$y^* < y_2 \Longrightarrow \frac{m + E}{n} < \frac{a + m\beta}{\beta n} \qquad \text{como} \quad \beta > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\beta m + E}{\beta n} < \frac{a + m\beta}{\beta n} \Longrightarrow a - \beta E > 0$$

(**) $y(o) \geqslant y^*$ Neste caso, o sistema tradicional evoluirá de acordo com a equação (2). Como $a - \beta E > 0$, a produção percapita $y(t)$ crescerá sem limite.

Deste modo, se $y^* < y_2$, o sistema não se verá preso a uma situação de produção percapita estacionária, com a população crescendo a uma taxa positiva.

(c) $y^* > y_2$

$$\Longrightarrow \frac{m + E}{n} > \frac{a + m\beta}{n\beta} \Longrightarrow a - \beta E < 0$$

(*) Se $y(o) < y^*$, o sistema evoluirá de acordo com a equação (1) e tenderá para a solução estacionária y_2, visto que $y^* > y_2$

(**) Se $y(o) > y^*$, o sistema evoluirá segundo a equação (2). Como $a - \beta E < 0$, $y(t)$ decrescerá continuamente, eventualmente atingirá o valor y^*, quando passará a evoluir conforme a equação (1), tendendo para a solução estacionária y_2.

Logo, se $y^* > y_2$, qualquer que seja o valor $y(o)$,o sistema tenderá para o equilíbrio y_2. Logo, a solução estacionária y_2 é globalmente estável. Assim, se $y^* < y_2$, o setor tradicional se verá preso à situação de produção percapita estacionária, embora tendo a população crescendo. Este tipo de equilíbrio é conhecido na literatura por <u>Lowel Level of Equilibrium Trap</u>.

(d) $y^* = y_2$ $\qquad a - \beta E = 0$

(*) $y(o) < y^*$, o sistema evoluirá de acordo com 1 e atingirá o valor $y_2 = y^*$. Como $a - \beta E = 0$, ele permanecerá neste valor.

(*) $y(o) > y^*$, o sistema evoluirá de acordo com (2), como $a - \beta E = 0$, e $y(t)$ permanecerá sempre constante e igual a $y(o)$

No caso <u>d</u>, há duas possibilidades de armadilha:

(*) $y(t) = y_2 = y^*$, se $y(o) < y^*$

(*) $y(t) = y(o)$ se $y(o) > y^*$

<u>Proposição 1</u>. A condição necessária e suficiente para que o "Low Level of Equilibrium Trap" não exista é que $a - \beta E > 0$.

1. Admita-se que $a - \beta E > 0$

$$y^* = \frac{m + E}{n} = \frac{\beta m + \beta E}{\beta n} = \frac{a + \beta m - (a - \beta E)}{\beta n} = \frac{a + \beta m}{\beta n} - \frac{a - \beta E}{\beta n}$$

$$y^* = y_2 - \frac{a - \beta E}{\beta n}$$

Como $a - \beta E > 0 \implies y^* < y_2$ e por (b), acima, verificamos que qualquer que seja y(o), y(t) crescerá sem limite

2. Por outro lado, $y^* < y_2 \implies a + \beta E > 0$;

<u>Proposição 2</u>. A condição necessária e suficiente para que o <u>Lowel Level of Equilibrium Trap</u> exista e seja globalmente estável é que $a - \beta E < 0$.

1. Vimos acima

$$y^* = y_2 - \frac{a - \beta E}{\beta n} \qquad \text{se} \quad a - \beta E < 0$$

$$y^* > y_2, \text{ visto que } \quad - \frac{a - \beta E}{\beta n} > 0$$

Qualquer que seja y(o), y_2 será alcançado

2. Por outro lado $y^* > y_2 \implies a - \beta E < 0$ e, também, qualquer que seja y(o), y_2 será alcançado.

Nota: $a - \beta E = 0$, $y_2 = y^*$ e y_2 será alcançado se $y(o) < y_2 = y^*$. Se $y(o) > y^*$, y_2 não será alcançado. O sistema permanecerá em equilíbrio; em $y(t) = y(o)$ para qualquer t.

Observações:

A equação diferencial (1) pode ser escrita:

$$y(t) = y_2 + \frac{1}{e^{(a + \beta m)t} \cdot \left[\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y(o) - y_2}\right] - \frac{1}{y_2}}$$

ou

$$y(t) = y_2 + \frac{1}{e^{(a + \beta m)t} \left[\frac{y(o)}{y_2 \; (y(o) - y_2)}\right] - \frac{1}{y_2}} \qquad (*)$$

(1) Então, no caso de

$y(o) = 0$ e, portanto, $\neq y_2$

$y(t) = 0$ para todo t. Portanto, estamos admitindo que $y(o) > o$, que é uma exigência do modelo, pois, caso contrário, não haveria produção, quando $t = 0$.

(2) Para $t = 0$, ter-se-á

$$\frac{1}{\frac{y(o)}{y_2\,(y(o)-y_2)}-\frac{1}{y_2}} = \frac{1}{\frac{y(o)-y(o)\;+y2}{y_2(y(o)\;y_2)}} = \frac{1}{\frac{1}{y(o)-y_2}} = y(o)-y_2$$

Logo, como não poderia deixar de ser, o segundo membro de (*) é igual a y(o).

(3) Se $y(o) < y_2$

$$r(t) = \frac{1}{e^{(a+\beta m)t}\left[\frac{y(o)}{y_2\cdot(y(o)-y_2}\right]} < 0 \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

e $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 0$ (porque $e^{(a+\beta m)t}$ tende para o infinito: $a + \beta m > 0$)

Logo $y(t) = y_2 + r(t)$, aproxima de y_2 através de valores inferiores a y_2 (por que $r(t) < 0$ e tende para $\underline{0}$).

(4) Se $y(o) > y_2$

$r(t) > 0$, pois

$r(o) = y(o) - y_2 > 0$ e a parcela

$e^{(a\,+\,\beta m)t}\left(\frac{y(o)}{y_2\;(y(o)\,-\,y_2)}\right)$ cresce com t,

tornando-se cada vez maior que $\frac{1}{y_2}$

Logo, para $y(o) > y_2$

$y(t) = y_2 + r(t)$, $y(t)$ aproxima de y_2 através de valores maiores que y_2 ($r(t) > 0$) e $r(t)$ tende para 0.

(5) A seguir mostrar-se-á como é possível encontrar a solução da equação diferencial

$\dot{y} = (a + \beta m)\,y + \beta n y^2$

fazendo-se

$a + \beta m = A > 0$

$\beta n = D > 0$

$\dot{y} = Ay - Dy^2$. Esta equação é denominada de equação diferenciavel de Bernouilli. Possui, como indicado anteriormente, duas soluções estacionárias

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{A}{D}$$

Para $y \neq 0$, a técnica de solução consiste em:

(a) $\div\ y^2$

$$y^{-2}\,\dot{y} - \frac{A}{y} = -D \qquad (1)$$

(b) Fazer $Z = \frac{1}{y}$ $\qquad \dot{Z} = -\frac{\dot{y}}{y^2}$

$$\dot{y} = -y^2 \qquad \dot{Z} = \frac{1}{Z^2}\ \dot{Z}$$

(c) Substituindo-se em (1)

$$-Z^2\ \frac{1}{Z^2}\ \dot{Z} - AZ = -D$$

$$\dot{Z} + AZ = D \quad (2)$$

Esta equação é linear. Resolve-se primeiro a equação homogênea: $\dot{Z} + A\,Z = 0$. De posse da solução da equação homogênea e de uma solução particular de (2), obter-se-á a solução geral.

$$\dot{Z} = -AZ \quad \text{ou}$$

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = -A$$

$$\Longrightarrow \frac{dZ}{Z} = -Adt$$

$$\int \frac{dZ}{dZ} = -A\int dt + \text{constante}$$

$$\log Z = -At + \text{constante}$$

para $t = 0$

$$\log Z_o = \text{constante}$$

Logo:

$\log Z = -At + \log Z_0 \Longrightarrow Z = e^{-At + \log Z_o} = e^{\log Z_o} e^{-At}$

É óbvio que $Z_o = e^{\log Z_o}$. Então,

$Z = Z_o e^{-At}$

Toma-se $Z_o = 1$ e obtem-se

$Z_1 = e^{-AT}$ (3)

Portanto, e^{-At} é com a solução de (2)

(d) Para encontrar-se uma solução particular de (2), faz-se

$Z = uZ_1$ e determina-se, a seguir, u(t).

$Z = u\, e^{-At}$

$\dot{Z} = \dot{u}\, e^{-At} - A\, u\, e^{At}$. Substitue-se em (2)

$\dot{u}\, e^{-At} - A\, u\, e^{-At} + A\, u\, e^{-At} = D$

$\Longrightarrow \dot{u}\, e^{-At} = D$

$\dot{u} = D\, e^{At}$

$\dot{u} = \frac{d\,u}{d\,t} = D\, e^{At}$

$du = D\, e^{At}\, dt$

$\int du = \int D\, e^{At}\, dt + \text{constante}$

$u = \frac{D}{A}\, e^{At} + \text{constante}$

Como $Z = u\, e^{-At}$

$Z = (\frac{D}{A} e^{At} + c)\, e^{-At}$ constante = c

$Z = \frac{D}{A} + c\, e^{-At}$ esta é a solução da equação 2.

(e) $y = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{\frac{D}{A} + C\, e^{-At}}$$

(f) Determina-se agora o valor de C, constante, de integração.

para $t = 0$

$$y(o) = \frac{1}{\frac{D}{A} + C} \qquad \frac{D}{A} = \frac{1}{y_2}$$

$$y(o) = \frac{1}{\frac{1}{y_2} + C}$$

$$\Longrightarrow \quad C = \frac{y_2 - y(o)}{y(o).\ y_2}$$

Como $y = \dfrac{1}{\frac{D}{A} + C\, e^{-At}}$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{\frac{1}{y_2} + \frac{y_2 - y(o)}{y_o \cdot y_2}\, e^{-At}}$$

(g) Somando-se e subtraindo-se y_2

$$y = y_2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{y_2} + \frac{y_2 - y(o)}{y(o).\ y_2}\, e^{-At}} - y_2 \right)$$

Operando-se no termo entre parêntesis e, depois de algumas manipulações, virá

$$y = y_2 + \frac{1}{\left[\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y(o) - y_2}\right] e^{At} - \frac{1}{y_2}}$$ que é a solução anteriormente mencionada.

(6) A interpretação do "Low.Level of Equilibrium Trap" na teoria moderna e inteiramente diferente da formulada por / Leibenstein. Na teoria exposta por este autor, este equilíbrio é

estável para qualquer mudança no produto percapita até o nível assomado com o esforço mínimo. Na teoria neoclássica, acima exposta, é globalmente estável desde que exista.

Para que a economia escape do "Low level of equilibrium trap" da economia neoclássica mudanças nas taxas de crescimento da tecnologia e/ou mudanças na assistência médica são necessárias e de tal modo que reduzam a taxa de crescimento da população. Outra possibilidade é a introdução de capital, mas o modelo discutido / não analisa esta possibilidade. Schultz preconiza a introdução de novas formas de capital como solução para os problemas da agricultura tradicional.

(7) Até agora consideramos a economia como tendo um único setor o tradicional. Em consequência disto, todo acréscimo de produção teria que ser consumido, visto que o sistema é fechado. Em sequida será considerada uma economia com dois setores: um tradicional (sem capital) e outro moderno. O consumo percapita do bem do setor tradicional será mantido constante e igual a y^*. O excedente agrícola aparecerá se $S = y - y^* > 0$. A condição necessária e suficiente para que exista e seja crescente é que:

$a - \beta E > 0$, como já foi anteriormente estabelecido. Pois se $a - \beta E > 0$, $y(t)$ crescerá sem limites.

O excedente poderá existir se $a - \beta E = 0$ e $y(o) > y^*$, mas, neste caso será constante. Por conseguinte, na análise que se segue, admitir-se-á que $a - \beta E > 0$.

<u>O modelo neoclássico de dois setores</u>: $a - \beta E > 0$.

<u>Relações Estáticas</u> (t fixo)

$Y = e^{at} A^{1-\beta}$ (1) função de produção do setor tradicional $a > 0$ $0 < \beta < 1$

$Y = Py^*$ (2) O consumo percapita é fixo e igual a y^*.

Conhecido P, (1) e (2) determinam Y e A, pois y^* é dado.

$P = A + M$ (3) Como P é dado e A foi anteriormente calculado, (3) determina M, população alocada ao setor moderno.

$X = e^{bt} K^{c} M^{1-c}$ (4) $0 < c < 1$ $b > 0$. Dados P e K esta relação determina X.

$\frac{(1 - c)X}{M} = W$ (5) Produtividade marginal do trabalho igual ao salário W (medido em termos de unidade de X). Como X e M são conhecidos,(5) determina W.

$\frac{c\ X}{K} = r$ (6) Produtividade marginal do capital igual ao preço do mesmo (valor alocativo). (6) determina r, visto que X e K serem conhecidos.

$WM + uWA = (1-c)X + qy$ (7) Esta relação dá o balanço entre os dois setores. O lado direito dá a produção que é consumida. (1-c)X é participação dos trabalhadores do setor moderno no produto deste setor. Como, por hipótese, toda a produção do setor tradicional é consumida, q^{y} é valor desta produção em termos do bem do setor moderno: q unidades de X trocam-se por uma unidade de Y. Observe que se admite que os trabalhadores do setor moderno não poupam. Consomem toda a participação no produto (1-c)X. O lado esquerdo dá folha de pagamento. WM é a folha de pagamento do setor moderno. Supõe-se que o salário do setor tradicional é proporcional ao do setor moderno e u representa a proporcionalidade. $u < 1$, por hipótese. Logo uWA é a folha de pagamento do setor tradicional em termos do bem do setor moderno. Por hipótese, os empresários poupam toda a renda. Consequentemente, a relação (7) equilibra todo o fluxo do consumo e de salários que há entre os dois setores. A formação ' de capital é oriunda da poupança do setor moderno cX, que é o que toca aos capitalistas. É claro que (7) determina q.X,Y,A,M e W foram anteriormente determinados.

Relações dinâmicas

Como se viu, a poupança do sistema é igual a cX

$\dot{K} = cX$ (8)

$P = P(o)\ e^{Et}$ (9) $E > 0$

Implicações do modelo

Proposição 1. A produção do setor tradicional cresce à mesma taxa que a da população, ou seja:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = E$$

$$Py^* = Y$$

$$\dot{P}y^* = \dot{Y}$$

$$\frac{\dot{P}}{P} Py^* = \dot{Y}$$

$$\frac{\dot{P}}{P} Y = \dot{Y}$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{Y}}{Y} = E$$

Esta conclusão é óbvia, porque toda a produção do setor tradicional é consumida, por hipótese.

Proposição 2: A força de trabalho do setor tradicional (sinônimo de população) crescerá a uma taxa menor que a população P.

É fácil ver que

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = a + (1 - \beta)\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{P}}{P} = E$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{A}}{A} = \frac{E - a}{1 - \beta}$$

Mas, $\frac{E - a}{1 - \beta} = \frac{E - a + \beta E - \beta E}{1 - \beta} = \frac{E - \beta E}{1 - \beta} - \frac{a - \beta E}{1 - \beta} = E - \frac{a - E}{1 - \beta}$

Como $a - \beta E > 0$ e $1 - \beta > 0$

$$\Longrightarrow \frac{E - a}{1 - \beta} < E$$

Como $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{E - a}{1 - \beta}$, em termos absolutos, a população do setor tradicional crescerá se $E > a$. Declinará se $E < a$. Permanecerá estacionária se E = a. No modelo clássico, esta população declinava absolutamente.

Proposição 3: A fração da população alocada ao setor tradicional é decrescente (em termos relativos, a população alocada ao setor tradicional declinará)

$$P = A + M$$

$$\Longrightarrow M = P - A = P(o)\, e^{Et} - A(o)\, e^{\frac{E-a}{1-\beta}t}$$ Na origem do tempo, podemos tomar P(o) = A(o)

$$\frac{M}{P(o)\, e^{Et}} = 1 - e^{\left[\frac{E-a}{1-\beta} - E\right]t} \quad \text{ora} \quad \frac{M}{P(o)\, e^{Et}} = 1 - h_A$$

$$1 - h_A = - e^{\left[\frac{E-a}{1-\beta} - E\right]t} \qquad h_a = \frac{A}{P} \qquad 1 - h_A = \frac{M}{P}$$

$$\Longrightarrow h_A = e^{\left[\frac{E-a}{1-\beta} - E\right]t}$$

Como $\frac{E - a}{1 - \beta} < E$, o expoente é negativo e, consequentemente, h_A declinará com a passagem do tempo. Logo, $h_m = 1 - h_A$ é crescente.

Proposição 4: No longo prazo, a população alocada ao setor moderno crescerá à mesma taxa que a população total.

Vimos que:

$$\frac{M}{P(o)\, e^{Et}} = 1 - e^{\frac{E-a}{1-\beta} - E\ t}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{P(o)\, e^{Et}} = 1, \text{ porque } \frac{E - a}{1 - \beta} - E < 0$$

Logo, no longo prazo, $M = P(o)\, e^{Et}$ e a taxa de crescimento de M, $(\frac{\dot{M}}{M})$ é igual a $\underline{E}$ ou $\frac{\dot{M}}{M} = E$.

Proposição 5: Seja $g = \frac{\dot{M}}{M}$; então g é função decrescente de t. Ou seja, a taxa de crescimento da população alocada ao setor moderno decresce até igualar-se a da população (E).

Partindo-se de $P = A + M$, é fácil ver que

$$\frac{\dot{P}}{P} = (1 - h_M)\ \frac{\dot{A}}{A} + \ h_M\ \frac{\dot{M}}{M} = E$$

$$\frac{\dot{M}}{M} = g = \frac{E - \left(1 - h_M\right)\left(\frac{E - a}{1 - \beta}\right)}{h_M}$$

Derivando-se g em relação a h_M, virá:

$$\frac{d\ g}{d\ h_M} = \frac{- E + \frac{E - a}{1 - \beta}}{(h_M)^2} < 0 \quad \text{pois} \quad -E + \frac{E - a}{1 - \beta} < 0$$

Como h_A decresce, pela proporção 3, segue-se que h_M cresce.

Como $\frac{dg}{dh_M} < 0$, segue-se que g é função decrescente em relação a t.

Proposição 6: Numa visinhança da origem do tempo, $\frac{\dot{M}}{M} > E$.

É fácil ver que:

$$\frac{\dot{M}}{M} = \frac{E - \frac{E - a}{1 - \beta}}{h_M} + \frac{E - a}{1 - \beta}$$

$$\frac{E - \frac{E - a}{1 - \beta}}{h_M} > 0 \qquad \text{pois} \qquad E - \frac{E - a}{1 - \beta} > 0$$

Logo para h_M pequeno, a primeira parcela pode ultrapassar qualquer número, inclusive E.

A proposição 6 diz-nos que a taxa de crescimento da população alocada ao setor moderno é decrescente e, no longo prazo, iguala-se a da população total.

A fim de derivarmos as demais proposições é necessário obter a equação que descreve a acumulação de capital. Isto será feito a seguir.

$$X = e^{bt} K^{c} M^{1-c}$$

$$\dot{K} = cX$$

de $\frac{\dot{P}}{P} = E$; $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{E - a}{1 - \beta}$ e $M = P - A$, obtém-se:

$$M = P(o)\, e^{Et} \left[1 - e^{\left(\frac{E - a}{1 - \beta} - E\right) t} \right]$$

Substituindo-se em $\dot{K} = cX$, virá

$$\dot{K} = cK^{c}\, (P(o)^{1 - c}\, e^{(b + (1 - c)\, E)t} \left[1 - e^{(\frac{E - a}{1 - \beta}) - E)t} \right]^{1-c}$$

Pondo $b + (1 - c)\, E = r_1 > 0$

$$\frac{E - a}{1 - \beta} - E = r_2 < 0$$

$$\dot{K} = cK^{c}\, (P(o)^{1 - c}\, e^{r_1 t} \left[1 - e^{r_2 t} \right]^{1 - c}$$

ou

$$\frac{\dot{K}}{K^{c}} = c(P(o)^{1 - c}\, e^{r_1 t} \left[1 - e^{r_2 t} \right]^{1 - c}$$

<u>Proposição 7</u>: $\frac{\dot{K}}{K^{c}}$ aproxima-se, assintoticamente, de

$$c(P(o))^{1 - c}\, e^{r_1 t}$$

$$\lim \frac{\dot{K}}{K^{c}} = c\, (P(o))^{1 - c} \lim e^{r_1 t} \lim (1 - e^{r_2 t})^{1 - c}$$

Como $\lim e^{r_2 t} = 0$, pois $r_2 < 0$

$$\Longrightarrow \lim \frac{\dot{K}}{K^{c}} = c(P(o))^{1 - c} \lim e^{r_1 t}$$

Logo, no longo prazo, a acumulação de capital se processa de acordo com:

$$\frac{\dot{K}}{K^{c}} = c(p(o))^{1 - c}\, e^{r_1 t}$$

Proposição 8: No longo prazo, o capital acumular-se-á a uma taxa igual a $\frac{r_1}{1-c} = \frac{b}{1-c} + E = \frac{\dot{K}}{K}$

$$\dot{K} = K^c \quad c(p(o))^{1-c} \quad e^{r_1 t} \; (1-e^{r_2 t})^{1-c} \qquad (*)$$

Pondo-se $u = K^{1-c}$

$$\Longrightarrow \dot{K} = \frac{\dot{u}}{1-c} K^c \qquad (**)$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{u}}{1-c} K^{c-1} = \frac{1}{1-c} \; \frac{\dot{u}}{u}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{u}}{u} = (1 - c) \frac{\dot{K}}{K}$$

Substituindo-se (**) em (*), virá:

$$\dot{u} = (1-c) \, c\big(P(o)\big)^{1-c} \, e^{r_1 t} \, (1 - e^{r_2 t})^{1-c}$$

$$\int_{u(o)}^{u(v)} du = (1-c) \, c\big(P(o)\big)^{1-c} \int_o^v e^{r_1 t} \; (1-e^{r_2 t})^{1-c} \, dt$$

$$u(v) = (1-c) \, c\big(P(o)\big)^{1-c} \int_o^v e^{r_1 t} (1-e^{r_2 t})^{1-c} \, dt + u(o)$$

Portanto,

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{(1-c) \, c\big(P(o)\big)^{1-c} \, e^{r_1 v} \Big(1- e^{r_2 v}\Big)^{1-c}}{c(1-c)\big(P(o)\big)^{1-c} \int_o^v e^{r_1 t} \Big(1 - e^{r_2 t}\Big)^{1-c} dt + u(o)}$$

(note que v = t)

É fácil ver:

(*) Numerador e denominador são diferenciáveis (a função a ser integrada é contínua)

(*) Numerador e denominador tendem para o infinito com v. Logo, a regra de L'Hospital pode ser aplicada.

$$\lim \frac{\dot{u}}{u} = \lim \frac{(1-c)c\big(P(o)\big)^{1-c} \Big[r_1 \, e^{r_1 v}\Big(1-e^{r_2 v}\Big)^{1-c} - r_2 \, e^{r_1 v}\Big(1-e^{r_2 v}\Big)^{-c} (1-c) e^{r_2 v}\Big]}{(1-c) \, c\big(P(o)\big)^{1-c} \; e^{r_1 v} \; \Big(1 - e^{r_2 v}\Big)^{1-c}}$$

$$= r_1 - \lim \frac{r_2 (1 - c)}{\left(1 - e^{r_2 v}\right)^c e^{-r_2 v}}$$

Como, $1 - e^{r_2 v} \to 1$ e $e^{-r_2 v} \to \infty$ $\quad (-r_2 > 0)$

Segue-se que:

$$\lim \frac{\dot{u}}{u} = r_1$$

Como, $\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\frac{\dot{u}}{u}}{1-c}$

Segue-se que, $\lim \frac{\dot{K}}{K} = \frac{r_1}{1-c} = \frac{b}{1-c} + E$

Proposição 9: No longo prazo, o produto do setor moderno cresce a mesma taxa que o capital. Ou seja:

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{K}}{K}$$

Diferenciando-se $X - e^{bt} K^c M^{1-c}$, virá

$$\frac{\dot{X}}{X} = b + c \frac{\dot{K}}{K} + (1 - c) \frac{\dot{M}}{M}$$

Mas, $\lim \frac{\dot{K}}{K} = \frac{b}{1-c} + E$; $\quad \lim \frac{\dot{M}}{M} = E$

$$\Longrightarrow \lim \frac{\dot{X}}{X} = \frac{b}{1-c} + E$$

Esta proposição indica que, no longo prazo, a relação capital-produto permanece constante. Vimos que, isto não aconte no modelo clássico. O produto cresce a uma taxa maior que o capital.

Proposição 10: No longo prazo, os salários crescem a uma taxa igual a

$$\frac{b}{1-c}, \text{ ou seja } \frac{\dot{W}}{W} = \frac{b}{1-c}$$

$$(1 - c) \frac{X}{M} = W$$

$$\Longrightarrow (1 - c) X = MW$$

$$(1 - c)\ \dot{X} = \dot{M}W + \dot{W}M$$

$$\div\ MW = X(1-c)$$

$$(1-c)\ \frac{\dot{X}}{X(1-c)} = \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{W}}{W}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{W}}{W}$$

$$\frac{b}{1-c} + E = E + \frac{\dot{W}}{W}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{W}}{W} = \frac{b}{1-c} > 0$$

Logo, no longo prazo, os salários crescerão a uma taxa positiva. No modelo clássico, os salários permanecem constantes.

Proposição 11: A relação de troca, no longo prazo, pode cfescer, declinar ou permanecer constante.

$$WM + uWA = (1 - c)X + qY$$

Se u permanecer fixo, $(1-c)X = WM$

$$\Longrightarrow uWA = q\ Y$$

$$uA\dot{W} + uW\dot{A} = q\dot{Y} + Y\dot{q}$$

$$uAW\ \frac{\dot{W}}{W} + uAW\ \frac{\dot{A}}{A} = q\ y\ (\frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\dot{q}}{q}) \quad \text{como } q\ Y = uWA$$

$$\frac{\dot{W}}{W} + \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\dot{q}}{q}$$

$$\frac{b}{1-c} + \frac{E - a}{1 - \beta} = E + \frac{\dot{q}}{q}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{q}}{q} = \frac{b}{1-c} + (\frac{E - a}{1 - \beta} - E)$$

Ora, $\frac{b}{1-c} > 0$ e

$\frac{E - a}{1 - \beta} - E < 0$. Logo, o membro da direita pode ser: positivo: $\frac{b}{1-c} > \frac{E - a}{1 - c} - E$; negativo: $\frac{b}{1-c} < \frac{E - a}{1 - \beta} - E$ e nulo: $\frac{b}{1-c} = \frac{E - a}{1 - \beta} - E$. No modelo clássico, por hipótese, a relação de troca é constante.

Proposição 12: A produtividade média do setor moderno cresce à mesma taxa que os salários.

$$\frac{X}{M} = x$$

$$(1 - c)\ x = W$$

$$(1 - c)\ \dot{x} = \dot{W}$$

$$(1 - c)\ x\ \frac{\dot{x}}{x} = W\ \frac{\dot{W}}{W}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{W}}{W}$$

No caso do modelo clássico, a produtividade média permanece constante.

Proposição 13: A relação capital-produto, no longo prazo, é constante e igual a:

$$\frac{K}{K} = \frac{c\ (1-c)}{b + (1-c)E}$$

$$\dot{K} = cX$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = c\ \frac{X}{X}$$

$$\Longrightarrow \frac{X}{K} = \frac{1}{c}\ \frac{\dot{K}}{K} = \frac{1}{c}\ (\frac{b}{1-c} + E) = \frac{b + (1-c)E}{c(1-c)}$$

$$\Longrightarrow \frac{K}{X} = \frac{c(1-c)}{b + (1-c)E}$$

Proposição 14: A taxa de juros é constante, no longo prazo, e igual a $r = \frac{b + (1-c)E}{1 - c}$

$$\frac{dX}{dK} = r \qquad \Longrightarrow \qquad c\frac{X}{K} = r$$

Como, pela proporção 13, $\frac{X}{K}$ é constante, segue-se que r é constante. Por outro lado, $\frac{X}{K} = \frac{b + (1-c)E}{c\ (1-c)}$ $r = c.\frac{b + (1-c)E}{c(1-c)} = \frac{b + (1-c)E}{1 - c}$

Proposição 15: A taxa de poupança é crescente, no longo prazo.

Taxa de Poupança $= \frac{cX}{X + \frac{Y}{q}} = c.\frac{1}{1 + q\frac{Y}{X}}$

Basta estudar o comportamento de $q\,\frac{Y}{X} = p$

$$\dot{p} = \dot{q}\,\frac{Y}{X} + q\,\frac{\dot{X}Y - Y\dot{X}}{X^2}$$

$$= \dot{q}\,\frac{Y}{X} + q\frac{XY}{X^2}\left(\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X}\right) = \dot{q}\,\frac{Y}{X} + q\,\frac{Y}{X}\left(\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X}\right)$$

$$\dot{p} = q\,\frac{Y}{X}\left(\frac{\dot{q}}{q} + \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X}\right)$$

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{q}}{q} + \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X} \qquad \frac{\dot{X}}{X} = \frac{b}{1-c} + E$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = E$$

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{b}{1-c} + \frac{E - a}{1 - \beta} - E$$

$\Longrightarrow \frac{\dot{p}}{p} = \frac{E - a}{1 - \beta} - E < 0$. Logo, a taxa de crescimento de p é decrescente. Isto implica que $q\frac{Y}{X}$ é decrescente. Consequentemente, $c\ \frac{1}{1 + q\frac{Y}{X}}$ (a taxa de poupança) é crescente.

Proposição 16: A produção do setor moderno no longo prazo, cresce mais rapidamente que a do setor tradicional. Consequentemente, a participação da produção do setor tradicional na produção total é decrescente.

Participação $= \frac{\frac{Y}{q}}{X + \frac{Y}{q}} = \frac{1}{1 + \frac{X}{\frac{Y}{q}}}$

A proposição 15 mostrou que $q\frac{Y}{X}$ é decrescente. Logo $\frac{X}{q^Y}$ é crescente. Consequentemente,

$1 + \frac{1}{\frac{X}{q^Y}}$ é decrescente, pois o denominador é crescente.

Proposição 17: Dado t > 0, é possível escolher K(o) > 0 de modo que a taxa de acumulação de capital, para este t, seja / maior do que $\frac{b}{1-c} + E$

Vimos que,

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{D\, e^{r_1 v}\left(1 - e^{r_2 v}\right)^{1-c}}{D\int_o^v e^{r_1 t}\left(1-e^{r_2 t}\right)^{1-c} + u(o)}$$

$e^{r_1 t}$ e $\left(1-e^{r_2 t}\right)^{1-c}$ são contínuas e monótonas crescentes. Aplicando-se o teorema do valor médio do cálculo integral:

$$\int_o^v e^{r_1 t}\left(1-e^{r_2 t}\right)^{1-c} dt = \left(1-e^{r_2 i}\right)^{1-c}\int_o^v e^{r_1 t}\, dt = \frac{\left(1-e^{r_2 i}\right)^{1-c}}{r_1}\left(e^{r_1 t} - 1\right)$$

Como para qualquer u(o) > 0, o sistema crescerá, pode-se tomar $u(o) < \frac{\left(1 - e^{r_2 i}\right)^{1-c}}{r_1}$. Dado que as funções são monótonas, 0 < i < v.

$$\frac{\dot{u}}{u} \geqslant \frac{D^{r_1}\ e^{r_1 v}\left(1 - e^{r_2 v}\right)^{1-c}}{} = \left(\frac{1 - e^{r_2 v}}{1 - e^{r_2 i}}\right)^{1-c}$$ Como

$r_2 v > r_2 i$, segue-se que o numerador é maior que o denominador e, consequentemente,

$\frac{\dot{u}}{u} > r_1$. Isto implica que

$\frac{\dot{K}}{K} > \frac{r_1}{1-c}$, para v > 0 e finito.

<u>Proposição 18</u>: A taxa de crescimento do produto $(\frac{\dot{X}}{X})$ é decrescente.

Anteriormente vimos que

$$X = (P(o))^{1-c} \; K^c \; e^{r_1 t} \; (1 - e^{r_2 t})^{1-c} \qquad (*)$$

$$\dot{K} = c\;(P(o))^{1-c} \; K^c \; e^{r_1 t} \; (1 - e^{r_2 t})^{1-c} \qquad (**)$$

Derivando-se a relação acima (**), e depois de algumas manipulações, virá:

$$\ddot{K} = \dot{K} \left(\frac{c}{K} + r_1 - (1 - c)\, r_2 \, \frac{e^{r_2 t}}{1 - e^{r_2 t}} \right) \qquad (***) \text{ ou}$$

Por outro lado,

$$\dot{k} = cX$$

$$\ddot{K} = c\dot{X}$$

ou

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{1}{c} \; \frac{\ddot{K}}{\dot{X}} = \frac{c}{K} + r_1 - (1 - c)\, r_2 \, \frac{e^{r_2 t}}{1 - e^{r_2 t}} \qquad (****)$$

(Porque $\dot{K} = cX$)

O membro da direita de (****) é decrescente porque $r_2 < 0$ e K crescente.

<u>Proposição 19</u>: No longo prazo, a taxa de crescimento da produção do setor moderno é maior que a taxa de crescimento do emprego.

Já vimos que $\frac{\dot{M}}{M} \to E$

$\frac{\dot{X}}{X} \to \frac{b}{1-c} + E$, comparando-se os dois limites, segue-se que,

$\frac{\dot{X}}{X} > \frac{\dot{M}}{M}$ Logo, a produtividade média do setor moderno é crescente no longo prazo.

Retomemos a equação diferencial:

$$\frac{\dot{K}}{K^c} = c(P(o))^{1-c} \quad e^{r_1 t}\left[1 - e^{r_2 t}\right]^{1-c} \qquad r_1 > 0,\ r_2 < 0$$

Fazendo-se

$$Z = e^{r_2 t} \Longrightarrow dz = r_2 \, e^{r_2 t} \, dt = r_2 \, Z \, dt \Longrightarrow dt = \frac{dz}{r_2 z}$$

$$0 < Z < 1$$

$$e^{r_1 t} = \left(e^{r_2 t}\right)^{\frac{r_1}{r_2}} = Z^{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{\dot{K}}{K^c} = c\big(P(o)\big)^{1-c} \; Z^{\frac{r_1}{r_2}} \cdot (1 - Z)^{1-c} \qquad \text{ou,}$$

$$\frac{dK}{K^c} =. \; c\big(P(o)\big)^{1-c} \; Z^{\frac{r_1}{r_2}} \; (1 - Z)^{1-c} \; dt$$

$$\Longrightarrow \frac{dK}{K^c} = c\,\big(P(o)\big)^{1-c} \; Z^{\frac{r_1}{r_2}} \, (1 - Z)^{1-c} \; \frac{dz}{r_2 z}$$

$$\Longrightarrow \frac{dK}{Kc} = \frac{c\big(P(o)\big)^{1-c}}{r_2} \; Z^{\frac{r_1}{r_2} - 1} \, (1-Z)^{1-c} \, dZ \qquad 0 < Z \leqslant 1$$

pondo $\frac{r_1}{r_2} = v_1 < 0$

$1-c = (2-c)-1 = v_2 - 1 \quad (2-c = v_2)$

$$\frac{dK}{K^c} = \frac{c\big(P(o)\big)^{1-c}}{r_2} \; Z^{v_1 - 1} (1-Z)^{v_2 - 1} \qquad v_1 < 0 \ \text{ e } \ v_2 > 1, \quad 0 < Z \leqslant 1$$

Note que: $t = 0 \quad Z = e^{r_2 t} = 1$

$t \to \infty \qquad Z \to 0 \qquad (r_2 < 0)$

$$\int_{K(1)}^{K(o)} \frac{dK}{K^c} = \frac{e\big(P(o)\big)^{1-c}}{r_2} \int_1^0 Z^{v_1 - 1} \; (1-Z)^{v_2 - 1} \; dZ$$

$$\int_{K(1)}^{K(o)} \frac{dK}{K^c} = \frac{c\left(P(o)\right)^{1-c}}{-r_2} \int_0^1 Z^{v_1-1} (1-Z)^{v_2-1}\, dZ \qquad (*)$$

Como $r_2 < 0$ $\qquad \dfrac{c\left(P(o)\right)^{1-c}}{-r_2} > 0$

Como $v_1 < 0$,

$$\lim_{E\to 0} \int_E^1 Z^{v-1} (1-Z)^{v_2-1}\, dZ \to \infty$$ (Veja função Beta, num livro de cálculo avançado).

$$\int_{K(1)}^{K(u)} \frac{dK}{K^c} = \frac{(K(u))^{1-c}-(K(1))^{1-c}}{1-c} = \frac{c\,(P(o))^{1-c}}{-r_2} \int_u^1 Z^{v_1-1} (1-Z)^{v_2-1}\, dZ$$

$$\Longrightarrow \quad K(u) = \left[\frac{c(1-c)\ (P(o))^{1-c}}{-r_2} \int_u^1 Z^{v_1-1} (1-Z)^{v_2-1} dZ + (K(1))^{1-c}\right]^{\frac{1}{1-c}} \qquad (**)$$

Proposição A: Se $P(o) > 0$ e $K(1) > 0$, $K(u)$ tenderá para o infinito a medida que u tende para 0 (ou t para infinito)

É claro que se $P(o) > 0$ e $K(1) > 0$, $K(u)$ tenderá para o infinito, visto que a integral da direita tende para o infinito.

Por outro lado, se $P(o) = 0$, $K(u) = K(1)$ para qualquer u, não havendo, protanto, acumulação de capital. Entretanto, por que é necessário ter

$K(1) > 0$?

Ora

$X = e^{bt} K^c M^{1-c}$ se $K(1) = 0$ (Valor inicial de capital), $X_0 = 0$.

Logo,

$\left[K = c^X\right]_{t=0} = 0$, e a acumulação de capital não será possível. Por isto, é necessário ter-se $K(1) > 0$ (A construção da da equação diferencial, que estamos discutindo, exigem que $X_0 > 0$ e isto requer $K(1) > 0$, além de $P(o) > 0$).

Portanto, dado $P(o) > 0$, qualquer que seja o estoque inicial de capital, o setor moderno crescerá sem limites.

Proposição B: A influência do estoque inicial de capital na acumulação de capital torna-se cada vez menor e desaparece no longo prazo.

Em (**), fazendo-se

$$G(u) = \frac{c\ (1-c)\ (P(o))^{1-c}}{-r_2} \int_u^1 Z^{v_1 - 1}\ (1-Z)^{v_2 - 1}\ dZ$$

e notando-se que

$$\lim_{u \to 0} G(u) = \infty,$$

$$K(u) = \left(G(u)\right)^{\frac{1}{1-c}} \left[1 + \frac{(K(1))^{1-c}}{G(u)}\right]^{\frac{1}{1-c}} \qquad (***)$$

Como $G(u)$ cresce sem limites, a parcela $\frac{(K(1))^{1-c}}{G(u)}$ fica cada vez menor, e, no limite, se anulará. Note-se que $K(1)$ é o estoque inicial de capital e que $t \to \infty \Longrightarrow u \to 0$. É claro que a influência de $P(o)$ perdurará e, para ver isto, basta inspecionar $G(u)$

Por (***)

$$\lim_{u \to 0} K(u) = \lim_{u \to 0} \left(G(u)\right)^{\frac{1}{1-c}}$$

O CONFRONTO DOS MODELOS CLÁSSICO E NEOCLÁSSICO COM A REALIDADE

Este confronto foi feito por Jorgenson, tendo por base os dois modelos que desenvolveu. O clássico não coincide inteiramente com os modelos de Lewis, Fei e Ramis. Procura, todavia, captar as características principais destes modelos e apresenta a vantagem de ser rigorosamente formulado.

O teste é feito em dois planos. No primeiro, testam-se as pressuposições básicas que diferenciam o modelo clássico do neoclássico; a existência de desemprego disfarçado e a constância do salário, durante período em que existe desemprego disfarçado.

(1) Desemprego disfarçado. Está presente de duas formas. Antes de atingir o "Lewis Turning Point", a produtividade marginal do trabalho é nula, e, portanto, existe trabalho redundante. Na fase que se estende do "Lewis Turning Point" até o ponto de comercialização (não inclusive), a produtividade marginal do trabalho é menor que o salário, que caracteriza a segunda forma.

A hipótese da produtividade marginal do trabalho igual a zero tem sido rejeitada na literatura. Mesmo os estudos que mostraram a existência de trabalho redundante tiveram suas conclusões modificadas quando se escolheu sistema de medida mais adequado.

A existência de trabalho redundante é essencial a fixação ao salário institucional, variável exogênea fundamental ao modelo.

(2) Resta a possibilidade da existência de desemprego disfarçado, considerando-se que o salário é superior à produtividade marginal do trabalho do setor tradicional. O modelo clássico pressupõe que o salário é fixo nesta fase. O Japão é o país escolhido para teste desta hipótes, em vista de dispor de dados para um período mais longo. A hipótese da constância dos salários parece não subsistir em face das evidências que o quadro seguinte apresenta.

QUADRO: Renda percapita do trabalho na agricultura japonesa, média de 5 anos, período 1878-1917.

Período de 5 anos	Renda Percapita.
1878-82	18.0
1883-87	18.1
1888-92	18.2
1893-97	21.1
1898-1902	27.0
1903-07	31.3
1908-12	39.4
1913-17	42.0

Fonte: Computado por K. Ohhawa e H. Rosovsky. "The Role of Agriculture in Modern Japanese Economic Development" em Eicher e Witt (eds) Agriculture in Economic Development p. 129-43.

A série termina em 1917. Neste ano, segundo Fei e Ramis, desaparece o desemprego disfarçado na economia japonesa.

No segundo plano, testam-se as implicações que distinguem no modelo do outro.

No que respeita ao setor agrícola, a mais importante delas é que a força de trabalho, deste setor, pelo modelo clássico, declinará absolutamente. O modelo neoclássico é consistente com o declínio, crescimento ou constância desta força de trabalho, dependendo da magnitude de certos parâmetros. Na Europa, verificou-se um ligeiro crescimento da população agrícola, antes e durante o período em que, relativamente, a população urbana ficou maior do que a agrícola. Subsequentemente, esta começou a cair absolutamente, padrão que é também característico do Japão.

No que respeita ao setor moderno, as seguintes implicações são relevantes.

(1) A teoria clássica implica que a produtividade do trabalho do setor moderno é constante, na fase de desemprego disfarça-

do. A teoria neoclássica afirma que esta produtividade é crescente.

QUADRO: Produtividade média do trabalho dos setores secundário e terciário da economia japosena. Período 1878-1917.

Período de 5 anos	Setor secundário	Setor terciário
1878-82	137	156
1883-87	173	199
1888-92	189	197
1893-97	217	227
1898-1902	268	261
1903-07	237	261
1908-12	266	313
1913-17	327	333

Fonte: Ohhawa, The Growth Rate of the Japanese Economy Since 1878 (Tokyo, 1957) p. 34.

Estes dados suportam fortemente a teoria neoclássica e contrapõem-se a teoria clássica. Mas, aqui, vale a ressalva de Stephen A. Marglin. A conclusão da constância da produtividade ' média do trabalho é consequência da fórmula admitida para função de produção, onde a elasticidade de substituição é constante e igual a 1. Se for constante e diferente de 1, esta conclusão não é mais verdadeira como se mostrou. Marglin afirma que estes dados rejeitam é a hipótese que a elasticidade de substituição seja 1, dado que exista desemprego disfarçado na agricultura.

(2) O sistema clássico implica que capital e produto ' tem suas taxas de crescimento aumentando com o tempo. No sistema neoclássico, emprego e produto tem taxas decrescentes que convergem para determinado valor

QUADRO: Taxas de crescimento do produto, emprego e capital na indústria japonesa, médias de 5 anos, 1878-1917.

Períodos	Produto	Emprego	Capital.
1878.82 a	10.1	5.4	-
1883-87 a	4.4	4.4	4.7
1888-92 a	6.3	3.8	5.2
1893-97 a	6.7	3.4	5.7
1898-1902 a	1.9	3.0	4.6
1903-07 a	5.8	2.6	6.5
1908-12 a 1913-17	5.2	2.4	5.8

Fonte: Veja Jorgenson -"Testing Alternatives Theories of Development of Dual Economy".

No período 1878-1917 as taxas de crescimento do produto do setor moderno apresenta uma tendência que é claramente decrescente. Com relação ao capital, as taxas de crescimento não apresentam nenhuma tendência. As taxas de emprego são decrescentes. Estes resultados são consistentes com a teoria neoclássica e inconsistentes com a teoria clássica, pela qual, todas estas taxas são crescentes.

(3) O sistema clássico implica que a razão capital-produto seja a decrescente. O sistema neoclássico indica que a mesma é crescente, tendendo a se estabilizar no limite. Os dados do quadro abaixo são inconsistentes com a teoria clássica e suportam fortemente a teoria neoclássica de Jorgenson.

QUADRO: Razão capital-produto da indústria japonesa,média de 5 anos, 1883-1917.

Período	Ohkawa (renda real)	Ishiwata (renda real)
1883-87	1.96	1.56
1888-92	1.99	1.51
1893-97	1.88	1.53
1898-1902	1.80	1.52
1903-07	2.03	1.72
1908-12	2.10	1.82
1913-17	2.24	1.79

Fonte: Computado de K.Ohkawa, p.34 e S.Ishiwata, _Estimation_, p.15.

Críticas aos Modelos Clássico e Neoclássico.

As críticas mais específicas ao modelo clássico já foram vistas. As que se seguirão aplicam-se aos dois modelos.

(1) O modelo é fechado. Comércio internacional pode representar um substituto tanto para o excedente agrícola como para o setor moderno.

(2) Mudanças descontínua na elasticidade-renda de alimentos.

Até atingir uma certa magnitude, toda a produção agrícola é consumida. Atingindo esse valor, o consumo permanece constante. Isto significa que neste momento a elasticidade-renda cai bruscamente para 0 e todo aumento da produção percapita é excedente disponível para o setor moderno. A experiência histórica é consistente com um decréscimo mais gradual da elasticidade-renda de alimentos.

(3) Os modelos ignoram recursos que são consumidos entre a fazenda e o produto na mesa do consumidor. A mudança da população para os setores urbanos tipicamente requer um cresci-

mento rápido dos recursos empregados no processo de comercialização.

(4) A relação de troca move-se contra a indústria constantemente. Isto é inconsistente com a experiência histórica dos Estados Unidos e outros paises (entretanto este ponto não pesa muito como crítica aos dois modelos, pois podem incorporar qualquer hipótese neste respeito).

(5) A taxa de crescimento da população é a mesma da força de trabalho. Uma relação, com retardamento, entre essas duas variáveis descreveria melhor a realidade nas proximidades do ponto em que a população atinge a taxa máxima de crescimento.

(6) Terra não é parte da função de produção do setor moderno. A menos que se queira ignorar setores importantes do setor moderno como mineração, exploração florestal, as fazendas de alta tecnologia (tipo plantation), etc, a função de produção do setor moderno necessita incluir terra, como uma das variáveis.

(7) Capital na agricultura:

A noção de que terra não pode ser produzida não suporta a menor análise. Aliás, uma grande parte do esforço dos países ' em desenvolvimento visa a produzir terra. Conforme Frank Knight, a única diferença entre terra e outros insumos, que é significante para a política econômica, são as diferenças relativas da elasticidade de oferta e de produção. A experiência de muitos países em desenvolvimento tem mostrado que maior parte do aumento da produção pode ser explicado pelo aumento da quantidade de terra,como fator de produção.

Os modelos são também imcompletos, porque não descrevem como capital, a partir de um certo ponto, passa a fazer parte da função de produção da agricultura.

(8) Tecnologia é tomada como taxa de crescimento constante, em ambos os setores, e exogênea ao modelo. Os seguintes / pontos são relevantes:

(*) Tecnologia é uma importante variável política, sendo portanto, altamente indesejável tratá-la como uma constante do modelo.

(*) Hayami e Ruttan mostravam que a produção de tecnologia na agricultura demanda muito capital e depende da variação dos preços relativos. Desta forma, tecnologia não deve ser considerada exogênea ao modelo. É, outrossim, duvidoso que a tecnologia seja do tipo neutro, no sentido de Hicks ou Harrod.

Dada a dependência do setor tradicional em relação ao moderno para produção de novos conhecimentos e difusão dos mesmos, modelos que não atentam para possibilidade de transferência de recursos do setor moderno para o tradicional deixam muito a desejar.

(9) Na agricultura tradicional, uma medida mais apropriada para o salário é em termos da renda percapita. Jorgenson assume que o salário na agricultura é proporcional ao salário na indústria, e, isso, não descreve bem a realidade, principalmente quando a maior parte da produção é oriunda de pequenos proprietários.

(10) A teoria da população de Jorgenson tem muita semelhança com as idéias de Malthus que tem sido rejeitadas pela experiência atual. Há evidências que, a curto prazo, o crescimento da população dos países em desenvolvimento é mais ou menos exogêneo e determinado pelas altas taxas de redução da mortalidade e não dependente de grandes mudanças institucionais. Embora Jorgenson dê grande importância à relação entre a produção percapita de alimentos e a taxa bruta de natalidade, isto parece só ser relevante no caso em que a produção agrícola decrescer substancialmente.

(11) Os modelos de Lewis, Fei e Ramis implicitamente admitem mercado de trabalho imperfeito na agricultura. A descrição de como agricultor aloca seu tempo entre lazer e trabalho, nestas condições, é implicitamente feita, admitindo-se uma função de utilidade onde lazer não está presente, como variável. Esta é uma hipótese difícil de ser aceita.

(12) É altamente questionável representar a parte dinâmica da economia por apenas um setor. É possível que haja diferenças tão marcantes entre um ramo industrial e outro, como entre a agricultura e os setores urbanos.

(13) Os modelos não incoroporam o setor monetário. Descrevem uma economia de trocas. Como os países em desenvolvimento

apresentam altas taxas de inflação, a não incorporação do setor ' monetário é pecado mortal.

(14) Stephen A. Marglin afirma que a essência do excedente agrícola, é que o salário é determinado exogeneamente, não refletindo o custo de oportunidade de empregar um trabalhador adicional. A. Lewis, Fei e Ramis e Jorgenson particularizam essa idéia para o caso da existência de trabalho redundante e desemprego disfarçado, e a partir daí constroem os respectivos modelos. É possível que a particularização feita não capte adequadamente a idéia dos economistas clássicos, que em síntese, admitem uma diferença entre o salário vigente e o custo de empregar um trabalhador adicional.

(15) Nos modelos estudados não há possibilidade do excedente agrícola ser usado para formação de capital no setor moderno. Toda produção agrícola é consumida pela população. A experiência mostra que esta hipótes não se coaduna adequadamente com as evidências. Isto ocorre porque o modelo é fechado. Não existem, consequentemente, possibilidades para o comércio internacional, através do qual haveria troca de alimentos e fibras por bens de capital. Não é possível, no tipo de economia estudada, trocar alimentos e fibras por bens de capital produzidos pelo setor moderno e aplicar este no setor tradicional.

BIBLIOGRAFIA

Jorgenson, Dale W. "The Development of a Dual Economy" Economic Journal, Vol. 71, Nº 282, junho 1961, p. 309-34.

_________________ "The role of Agriculture in Economic Developmente: Classical Versus Neoclassical Models of Growth" em Whaton Jr., Clifton R. (ed) Subsistence Agriculture ande Economic Developement, Chicago, Aldine, p. 320-348

Adelman e Thorbecke (eds) The Theory and Design of Economic Developmente, Baltimore, The Johns Hopkins Press, 1966, p. 65-66 (Artigo de Stephen Marglin).