MODELO DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA COM UMA VARIÁVEL AUXILIAR ADICIONAL

Augusto Ramalho de Morais[1]
Vivaldo Francisco da Cruz[2]

RESUMO-Com o objetivo de estudar a relação entre uma variável dependente e níveis de fatores quantitativos, através do uso da metodologia de superfície de resposta, desenvolveu-se um modelo de regressão polinomial quadrático considerando-se uma variável auxiliar adicional ao modelo, com vistas à obtenção de fórmulas que permitam avaliar seus efeitos no modelo. Através do método dos quadrados mínimos, desenvolveu-se a sequência de operações para a realização da análise estatística, considerando-se o modelo adaptado a um esquema fatorial completo, para três fatores com três níveis equidistantes. Foram determinados: os estimadores dos parâmetros, de suas variâncias e covariâncias e a análise da variância. A título de ilustração um exemplo é apresentado.

[1]Eng.-Agr., MSc., EMBRAPA/CNP Milho e Sorgo - Caixa Postal 151-CEP 35700 - Sete Lagoas-Minas Gerais.

[2]Eng.-Agr., Dr., Prof. ESALQ/USP/Deptº Matemática e Estatística-Caixa Postal 09 - CEP 13400 - Piracicaba - São Paulo

INTRODUÇÃO

A metodologia de superfície de resposta é essencialmente um conjunto de técnicas estatísticas que procura relacionar respostas com níveis de fatores quantitativos, com a finalidade de determinar condições ótimas e dar maior conhecimento sobre a natureza dessas respostas.

Sua aplicação deu-se inicialmente na indústria química, tendo sido seus fundamentos formalizados por Box & Wilson (1951).

No campo agronômico, sua utilização concentrou-se inicialmente no estudo do rendimento de cultivares como efeito de níveis de nutrientes aplicados ao solo; posteriormente incluem-se outros fatores, como densidade de plantio (Teixeira, 1969; Gomez et al., 1978).

Para analisar os resultados de um experimento envolvendo vários fatores, Cochran & Cox (1957) consideraram que se todos estes representam variáveis quantitativas, o método mais informativo consiste em relacionar as respostas como função dessas variáveis. O modelo matemático que expressa a relação entre fatores e resposta determina a superfície de resposta.

A utilização de modelos matemáticos para expressar a resposta aos nutrientes, sob a forma de superfície, teve grande progresso a partir da introdução dos fatoriais fracionados (Finney, 1945) e dos delineamentos compostos centrais e compostos rotacionais (Box e Wilson, 1951; Box e Hunter, 1957). Maiores detalhes podem ser vistos em Myers (1971).

No campo agronômico, Harder et al. (1957), Campos (1967), Vieira (1970) e Costa (1977) entre outros, verificaram que as estimativas dos parâmetros obtidas nas superfícies ajustadas são pouco precisas, com intervalos de confiança bastante amplos, dificultando a recomendação de fórmula de adubação e previsão de produções.

Desse modo, uma análise, considerando uma variável auxiliar adicional linearmente relacionada à variável dependente, pode contribuir para aumentar a precisão experimental e, consequentemente, obter estimativas mais eficientes, como ocorre nas análises de covariância (Cochran, 1957).

Assim, o objetivo foi apresentar uma análise de um modelo de regressão polinomial quadrático, com dez parâmetros, adaptado a um esquema fatorial completo para três fatores com três níveis equidistantes, considerando-se uma variável auxiliar adicional, através da metodologia de superfície de resposta.

MATERIAL E MÉTODOS

Utilizou-se a metodologia de superfície de resposta em um experimento em esquema fatorial para três fatores com três níveis equidistantes levando-se em consideração uma variável auxiliar adicional, através do seguinte modelo matemático:

$$y = a_{00} + a_{10}X_1 + a_{20}X_2 + a_{30}X_3 + a_{11}X_1 + a_{22}X_2 + a_{33}X_3 + a_{12}X_1X_2 + \\ + a_{13}X_1X_3 + a_{23}X_2X_3 + bZ + e \quad ,$$

onde: y representa os valores observados da variável dependente;

X_1 representa os níveis do fator A;

X_2 representa os níveis do fator B;

X_3 representa os níveis do fator C;

a_{00} representa a média geral;

a_{10}, $a_{20}, \ldots, a_{23}$ são os coeficientes dos parâmetros;

Z representa os valores da variável auxiliar adicional;

b é o coeficiente de regressão associado a variável auxiliar adicional;

e representa o erro experimental associado a y, tal que $e \sim N(0,\sigma^2)$.

Para facilidade de cálculos os valores dos níveis dos fatores foram transformados, do seguinte modo:

$$x_i = (X_i - \overline{X})/q$$

onde: X_i são os valores dos níveis dos fatores $(i = 1,2,3)$;

$\overline{X}$ média desses valores;

q diferença entre dois níveis sucessivos.

Fêz-se, também: $z = Z - \overline{Z}$,

onde: Z são os valores da variável auxiliar adicional;

$\overline{Z}$ média desses valores.

Os parâmetros correspondentes aos efeitos quadráticos não são independentes da média. Para que tal independência ocorra, fez-se nova parametrização

(Jorge, 1980; Myers, 1971) e, o modelo passou a ser da forma:

$$y = a'_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3 + a_{11}(x_1^2 - \frac{\Sigma x_1^2}{n}) + a_{22}(x_2^2 - \frac{\Sigma x_2^2}{n}) +$$

$$+ a_{33}(x_3^2 - \frac{\Sigma x_2^2}{n}) + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + bz + e ;$$

onde: $a'_{00} = a_{00} + \frac{\Sigma x_1^2}{n} + \frac{\Sigma x_2^2}{n} + \frac{\Sigma x_3^2}{n}$

n = número de níveis.

O modelo matemático adotado pode ser apresentado, em forma matricial, na forma:

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} ,$$

onde: $\underset{\sim}{y}$ é o vetor das observações, de dimensão N x 1;
X é a matriz dos coeficientes dos parâmetros, de dimensão N x p;
$\underset{\sim}{\beta}$ é o vetor dos parâmetros, de dimensão p x 1;
$\underset{\sim}{\varepsilon}$ é o vetor dos erros experimentais, de dimensão N x 1;
p é o número de parâmetros (no caso p = 11).

Os estimadores dos parâmetros e das somas de quadrados foram obtidos através do método dos quadrados mínimos. Os parâmetros são estimados por

$\underset{\sim}{\beta} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$.

Para facilidade de cálculos considerou-se a seguinte notação:

$Y_{...} = \Sigma y$ soma geral;

$Y_{0..}$, $Y_{1..}$ e $Y_{2..}$ soma das parcelas em que ocorrem os níveis 0, 1 e 2 respectivamente, do fator A;

$Y_{00.}$ soma das parcelas em que ocorrem o nível o dos fatores A e B simultaneamente;

$Y_{0.2}$ soma das parcelas em que ocorrem o nível o do fator A e o nível 2 do fator C simultaneamente;

$Z_{0..}$, $Z_{1..}$ e $Z_{2..}$ soma da parcelas em que ocorrem os níveis 0, 1 e 2 respectivamente, do fator A da variável auxiliar adicional;

$Z_{0.2}$ soma das parcelas em que ocorrem o nível o do fator A e o nível 2 do fator C simultaneamente, para a variável auxiliar adicional; as demais são obtidas por analogia.

As somas de quadrados dos efeitos ajustados, foram obtidas através do princípio do resíduo condicional introduzido por Fisher (1950).

RESULTADOS

Os estimadores dos parâmetros são dados por:

Média

$\hat{a}_{00} = Y.../(27r)$

Coeficiente de regressão

$\hat{b} = SPRes(YZ)/SQRes(Z)$

onde: SPRes(YZ) é a soma de produtos de resíduo das variáveis Y e Z;
SQRes(Z) é a soma de quadrados de resíduo da análise da variância da variável auxiliar adicional.

Efeito linear do fator A

$$\hat{a}_{10} = \frac{Y_{2..} - Y_{0..}}{18r} - \frac{Z_{2..} - Z_{0..}}{18r}\hat{b}$$

Efeito linear do fator B

$$\hat{a}_{20} = \frac{Y_{.2.} - Y_{.0.}}{18r} - \frac{Z_{.2.} - Z_{.0.}}{18r}\hat{b}$$

Efeito linear do fator C

$$\hat{a}_{30} = \frac{Y_{..2} - Y_{..0}}{18r} - \frac{Z_{..2} - Z_{..0}}{18r}\hat{b}$$

Efeito quadrático do fator A

$$\hat{a}_{11} = \frac{Y_{0..} - 2Y_{1..} + Y_{2..}}{18r} - \frac{Z_{0..} - 2Z_{1..} + Z_{2..}}{18r}\hat{b}$$

Efeito quadrático do fator B

$$\hat{a}_{22} = \frac{Y_{.0.} - 2Y_{.1.} + Y_{.2.}}{18r} - \frac{Z_{.0.} - 2Z_{.1.} + Z_{.2.}}{18r}\hat{b}$$

Efeito quadrático do fator C

$$\hat{a}_{33} = \frac{Y_{..0} - 2Y_{..1} + Y_{..2}}{18r} - \frac{Z_{..0} - 2Z_{..1} + Z_{..2}}{18r}\hat{b}$$

Efeito da interação linear dos fatores A e B

$$\hat{a}_{12} = \frac{Y_{00.} + Y_{22.} - Y_{02.} - Y_{20.}}{12r} - \frac{Z_{00.} + Z_{22.} - Z_{02.} - Z_{20.}}{12r}\hat{b}$$

Efeito da interação linear dos fatores A e C

$$\hat{a}_{13} = \frac{Y_{0.0} + Y_{2.2} - Y_{0.2} - Y_{2.0}}{12r} - \frac{Z_{0.0} + Z_{2.2} - Z_{0.2} - Z_{2.0}}{12r}b$$

Efeito da interação linear dos fatores B e C

$$\hat{a}_{23} = \frac{Y_{.00} + Y_{.22} - Y_{.02} - Y_{.20}}{12r} - \frac{Z_{.00} + Z_{.22} - Z_{.02} - Z_{.20}}{12r}b$$

As somas de quadrados e de produtos são calculadas através das seguintes expressões:

Somas de quadrados e de produto do efeito linear do fator A

$$SQa_{10} = \frac{(Y_{2..} - Y_{0..})^2}{18r} \quad , \quad SQa^*_{10} = \frac{(Z_{2..} - Z_{0..})^2}{18r} \quad \text{e} \quad SPa_{10} = \frac{(Y_{2..} - Y_{0..})(Z_{2..} - Z_{0..})}{18r}$$

Somas de quadrados e de produto do efeito linear do fator B

$$SQa_{20} = \frac{(Y_{.2.} - Y_{.0.})^2}{18r} \quad , \quad SQa^*_{20} = \frac{(Z_{.2.} - Z_{.0.})^2}{18r} \quad \text{e} \quad SPa_{20} = \frac{(Y_{.2.} - Y_{.0.})(Z_{.2.} - Z_{.0.})}{18r}$$

Somas de quadrados x de produto do efeito linear do fator C

$$SQa_{30} = \frac{(Y_{..2} - Y_{..0})^2}{18r} \quad , \quad SQa^*_{30} = \frac{(Z_{..2} - Z_{..0})^2}{18r} \quad \text{e} \quad SPa_{30} = \frac{(Y_{..2} - Y_{..0})(Z_{..2} - Z_{..0})}{18r}$$

Somas de quadrados e de produto do efeito quadrático do fator A

$$SQa_{11} = \frac{(Y_{0..} - 2Y_{1..} + Y_{2..})^2}{54r} \quad , \quad SQa^*_{11} = \frac{(Z_{0..} - 2Z_{1..} + Z_{2..})^2}{54r} \quad \text{e}$$

$$SPa_{11} = \frac{(Y_{0..} - 2Y_{1..} + Y_{2..})(Z_{0..} - 2Z_{1..} + Z_{2..})}{54r}$$

Somas de quadrados e de produto do efeito quadrático do fator B

$$SQa_{22} = \frac{(Y_{.0.} - 2Y_{.1.} + Y_{.2.})^2}{54r} \quad , \quad SQa^*_{22} = \frac{(Z_{.0.} - 2Z_{.1.} + Z_{.2.})^2}{54r} \quad \text{e}$$

$$SPa_{22} = \frac{(Y_{.0.} - 2Y_{.1.} + Y_{.2.})(Z_{.0.} - 2Z_{.1.} + Z_{.2.})}{54r}$$

Somas de quadrados e de produto do efeito quadrático do fator C

$$SQa_{33} = \frac{(Y_{..0} - 2Y_{..1} + Y_{..2})^2}{54r} \quad , \quad SQa^*_{33} = \frac{(Z_{..0} - 2Z_{..1} + Z_{..2})^2}{54r} \quad \text{e}$$

$$SPa_{33} = \frac{(Y_{..0} - 2Y_{..1} + Y_{..2})(Z_{..0} - 2Z_{..1} + Z_{..2})}{54r}$$

Somas de quadrados e de produto da interação linear dos fatores A e B

$$SQa_{12} = \frac{(Y_{00.} + Y_{22.} - Y_{02.} - Y_{20.})^2}{12r} \quad , \quad SQa^*_{12} = \frac{(Z_{00.} + Z_{22.} - Z_{02.} - Z_{20.})^2}{12r} \quad \text{e}$$

$$SPa_{12} = \frac{(Y_{00.} + Y_{22.} - Y_{02.} - Y_{20.})(Z_{00.} + Z_{22.} - Z_{02.} - Z_{20.})}{12r}$$

Somas de quadrados e de produto da interação linear dos fatores A e C

$$SQa_{13} = \frac{(Y_{0.0} + Y_{2.2} - Y_{0.2} - Y_{2.0})^2}{12r} \quad , \quad SQa^*_{13} = \frac{(Z_{0.0} + Z_{2.2} - Z_{0.2} - Z_{2.0})^2}{12r} \quad e$$

$$SPa_{13} = \frac{(Y_{0.0} + Y_{2.2} - Y_{0.2} - Y_{2.0})(Z_{0.0} + Z_{2.2} - Z_{0.2} - Z_{2.0})}{12r}$$

Somas de quadrados e de produto da interação linear dos fatores B e C

$$SQa_{23} = \frac{(Y_{.00} + Y_{.22} - Y_{.02} - Y_{.20})^2}{12r} \quad ; \quad SQa^*_{23} = \frac{(Z_{.00} + Z_{.22} - Z_{.02} - Z_{.20})^2}{12r} \quad e$$

$$SPa_{23} = \frac{(Y_{.00} + Y_{.22} - Y_{.02} - Y_{.20})(Z_{.00} + Z_{.22} - Z_{.02} - Z_{.20})}{12r}$$

A soma de quadrados de parâmetros é obtida por

$$SQPar = \underset{\sim}{\beta}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y} = SQa_{10} + SQa_{20} + SQa_{30} + SQ_{11} + SQ_{22} + SQ_{33} + SQa_{12} + SQa_{13} + SQa_{23} + SQReg$$

onde: $SQReg = [SPRes(YZ)]^2/SQRes(Z)$ é a soma de quadrado de regressão linear

A soma de quadrados de resíduo ajustada para regressão linear é

$$SQRes(aj) = SQRes(Y) - SQReg$$

onde: $SQRes(Y)$ é a soma de quadrados de resíduo.

A soma de quadrados do efeito $a_{ii'}$ $(i,i' = 0,1,2)$, ajustada para regressão, é obtida pela expressão:

$$SQa_{ii'}(aj) = SQRes(Y)^* - [SPRes(YZ)^*]^2/SQRes(Z)^* - SQRes(aj) \quad ou$$

$$SQa_{ii'}(aj) = SQa_{ii'} - [SPRes(YZ)^*]^2/SQRes(Z)^* + [SPRes(YZ)]^2/SQRes(Z)$$

onde: $[SPRes(YZ)^*]^2/SQRes(Z)^*$ é a soma de quadrados de regressão do modelo reduzido (sem o efeito do parâmetro para o qual está se fazendo o ajuste);

$[SPRes(YZ)]^2/SQRes(Z)$ é a soma de quadrados de regressão;

$SQRes(Y)^* = SQRes(Y) + SQa_{ii'}$

$SPRes(YZ)^* = SPRes(YZ) + SPa_{ii'}$

$SQRes(Z)^* = SQRes(Z) + SQa^*_{ii'}$

sendo: $SQRes(Y)$ e $SQa_{ii'}$ somas de quadrados de resíduo e do efeito $a_{ii'}$, relativas a variável dependente;

$SPRes(YZ)$ e $SPa_{ii'}$ somas de produtos de resíduo e do efeito $a_{ii'}$ entre as variáveis dependente e adicional respectivamente;

$SQRes(Z)$ e $SQa^*_{ii'}$ somas de quadrados de resíduo e do efeito $a_{ii'}$, relativas a variável auxiliar adicional, respectivamente.

As somas de quadrados e de produtos, bem como o esquema de análise da va riância estão apresentados na Tabela 1. Os quadrados médios são obtidos da maneira usual.

A partir da matriz de variâncias e covariâncias $(X'X)^{-1}\sigma^2$, obtem-se as expressões para cálculo das estimativas das variâncias e covariâncias entre os parâmetros ajustados.

As estimativas das variâncias das estimativas ajustadas dos parâmetros são obtidas através da expressão:

$$\hat{V}(\hat{a}'_{ii'}) = \hat{\sigma}^2[1 + SQa^*_{ii'}/SQRes(Z)]/Cr \quad ,$$

onde: C são os coeficientes dos termos lineares, quadráticos e interações lineares; respectivamente, 18, 6 e 12, no presente caso, obtidos na diagonal principal da matriz X'X;

$\hat{\sigma}^2$ é o quadrado médio do resíduo ajustado;

r é o número de repetições.

As estimativas das covariâncias entre as estimativas ajustadas dos parâmetros são obtidas através da expressão:

$$Cov(\hat{a}_{ii'}, \hat{a}_{jj'}) = \hat{\sigma}^2[SPa^*_{ii'}a^*_{jj'}/SQRes(Z)]/Cr$$

onde: $SPa^*_{ii'}a^*_{jj'}$ é a soma de produtos entre os parâmetros $a_{ii'}$ e $a_{jj'}$ relativos à variável auxiliar adicional.

Por exemplo, a covariância entre os efeitos lineares dos fatores A e B é dada por:

$$Cov(a_{10}, a_{20}) = \frac{1}{18r} \cdot \frac{(Z_{2..} - Z_{0..})(Z_{.2.} - Z_{.0.})}{18r} \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{SQRes(Z)}$$

A estimativa da variância do coeficiente de regressão é obtida pela expressão:

$$\hat{V}(\hat{b}) = \hat{\sigma}^2/SQRes(Z)$$

EXEMPLO NUMÉRICO

A título de ilustração, considerou-se um conjunto de dados fictícios de um experimento de adubação, em esquema fatorial 3^3, sem repetição. Os valores observados (Tabela 2) de produção de massa seca (variável dependente) e pH do solo obtido antes da aplicação dos tratamentos (variável auxiliar adicional), foram submetidos à análise da variância de acordo com modelo proposto (Tabela 3).

A análise da variância (Tabela 3) mostrou que os tratamentos, em geral, fóram beneficiados pela inclusão da variável auxiliar adicional, pois, houve uma redução no erro experimental de $\frac{3421,1579 - 2247,0719}{3421,1579} = 0,3338$, ou seja, a precisão experimental foi aumentada em 33,38%. Nota-se, também, que o valor do teste F para tratamento ajustado foi superior ao não ajustado ($F_{aj} = 14,98 > F = 11,19$) e, que a interação A' x C' passou a apresentar significância ($F_{aj} = 5,89$) quando considerou-se a variável auxiliar adicional.

As estimativas dos parâmetros para os modelos com e sem a variável auxiliar adicional estão apresentadas na Tabela 4. Verificaram-se que, os desvios-padrão das estimativas ajustadas dos parâmetros a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{11}, a_{22}, a_{12} e a_{23} foram inferiores aos desvios-padrão das estimativas do modelo sem a variável auxiliar adicional, evidenciando que os valores das estimativas ajustadas dos parâmetros, relativas a esses parâmetros, foram obtidas com maior precisão.

Para maior detalhes de compreensão, apresenta-se a seguir, o procedimento de cálculo das estimativas ajustadas das variâncias e covariâncias. Por exemplo, a estimativa ajustada da variância do efeito $\hat{a}_{33}$ é:

$$\hat{V}(\hat{a}_{33}) = QmRes(aj)\ [1 + SQa^{*}_{33}/SQRes(Z)]\ C.r =$$

$$= 2247,0719[1 + 6,0669/11,3608]/6 =$$

$$= 2247,0719\ .\ 0,2557 = 574,5091$$

A estimativa da covariância entre os efeitos $\hat{a}_{10}$ e $\hat{a}_{20}$ é:

$$\hat{Cov}(\hat{a}_{10}, \hat{a}_{20}) = QmRes(aj)\ .\ SPa^{*}_{10}a^{*}_{20}/[C\ .\ SQRes(Z)] =$$

$$= 2247,0719\ .\ \frac{2,6\ .\ 6,7}{18}/(18\ .\ 11,3608) =$$

$$= 2247,0719\ .\ 0,004733 = 10,6344$$

As demais são obtidas por analogia.

REFERÊNCIAS

BOX, G.E.P. & HUNTER, J.S. Multifactor experimental designs for exploring response surfaces. Ann. Math. Stat., Hayward, 28(1):195-241, 1957.

BOX, G.E.P. & WILSON, K.B. On the experimental attainment of optimum conditions. J. R. Statist. Soc. B., Londres, 13:1-45, 1951.

CAMPOS, H. Aspectos da aplicação das superfícies de resposta a ensaios fatoriais 3^3 de adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 1967. 82p. Tese Livre-Docência.

COCHRAN, W.G. Analysis of covariance: its nature and uses. Biometrics, Raleigh, 13:261-281, 1957.

COCHRAN, W.G. & COX, G.M. Experimental designs. 2ª ed. New York, John Wiley, 1957. 611p.

COSTA, R.A. da. Funções de produção ajustadas a ensaios fatoriais 3^3 de adubação de arroz. Piracicaba, ESALQ/USP, 1977. 80p. Tese Mestrado.

FINNEY, D.J. The fractional replication of factorial arrangements. Annals of Eugenics, 12:291-301, 1945.

FISHER, R.A. Statistical methods for research workers. 11ª ed. Edinburgh, Oliver and Boyd, 1950. 354p.

GOMEZ, J.H.; MENDEZ, I.R.; MORALES, A.C. & O'REILLY, F.T. Aplicaciones agronomicas de la metodologia de superficie de respuesta. Agrociência, Chapingo, 32: 125-135, 1978.

HADER, R.J.; HARWARD, M.E.; MASON, D.D. & MOORE, D.P. An investigation of some of the relationships of cooper, iron and molybdenum in the growth and nutrition of lettace: I. Experimental design and statistical methods for characterizing the response surface. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., Madison, 21:59-64, 1957.

JORGE, J. de N.P. Delineamento guadalupe para três fatores, analisado através de modelo de regressão polinomial quadrática. Piracicaba, ESALQ/USP, 1980. 56p. Dissertação Mestrado.

MYERS, R.H. Response surface methodology. Boston, Allynand Bacon, 1971. 246p.

TEIXEIRA, T.D. Superfície quadrática e suas aplicações na análise econômica de experimentos. Viçosa, U.F.V., 1969. 164p. Tese Mestrado.

VIEIRA, S. Aspectos das funções de produção ajustadas aos ensaios fatoriais 3^3 de adubação. Piracicaba, ESALQ/USP, 1970. 160p. Tese Doutoramento.

TABELA 1. Esquema de análise da variância para um modelo de superfície de resposta, com dez parâmetros, em um ensaio fatorial 3^3, com uma variável auxiliar adicional.

Fontes de Variação	GL	Somas de Quadrados, de Produtos e Somas de Quadrados Ajustadas			
		YY	YZ	ZZ	YY(aj)
Total	N	ΣY^2	ΣYZ	ΣZ^2	-
Média (a_{00})	1	$Y^2_{\cdot\cdot\cdot}/27r$	$Y_{\cdot\cdot\cdot}Z_{\cdot\cdot\cdot}/27r$	$Z^2_{\cdot\cdot\cdot}/27r$	-
Parâmetros	(p-1)	SQPar(Y)	SPPar(YZ)	SQPar(Z)	-
A linear(a_{10})	1	SQa_{10}	SPa_{10}	SQa^*_{10}	SQa_{10}(aj)
B linear(a_{20})	1	SQa_{20}	SPa_{20}	SQa^*_{20}	SQa_{20}(aj)
C linear(a_{30})	1	SQa_{30}	SPa_{30}	SQa^*_{30}	SQa_{30}(aj)
A quadrático(a_{11})	1	SQa_{11}	SPa_{11}	SQa^*_{11}	SQa_{11}(aj)
B quadrático(a_{22})	1	SQa_{22}	SPa_{22}	SQa^*_{22}	SQa_{22}(aj)
C quadrático(a_{33})	1	SQa_{33}	SPa_{33}	SQa^*_{33}	SQa_{33}(aj)
Int. A x B(a_{12})	1	SQa_{12}	SPa_{12}	SQa^*_{12}	SQa_{12}(aj)
Int. A x C(a_{13})	1	SQa_{13}	SPa_{13}	SQa^*_{13}	SQa_{13}(aj)
Int. B x C(a_{23})	1	SQa_{23}	SPa_{23}	SQa^*_{23}	SQa_{23}(aj)
Resíduo	N-p	SQRes(Y)	SPRes(YZ)	SQRes(Z)	-
Regressão	1	SQReg.	-	-	-
Resíduo(aj)	N-p-1	-	-	-	SQRes(aj)

TABELA 2. Valores observados de produção de massa seca(Y) e pH do solo(Z) em função dos vários tratamentos. Dados fictícios.

Tratamento	Y	Z	Tratamento	Y	Z	Tratamento	Y	Z	Soma	
									Y	Z
000	40	7,1	100	53	5,9	200	68	5,7	161	18,7
001	140	6,9	101	349	4,4	201	342	4,8	831	16,1
002	230	5,0	102	276	6,2	202	269	7,3	175	18,5
010	41	7,0	110	92	5,6	210	77	6,4	171	19,0
011	166	6,1	111	326	5,2	211	390	5,2	880	16,5
012	150	5,0	112	412	6,8	212	300	7,2	862	19,0
020	50	6,9	120	62	8,0	220	71	6,8	183	21,7
021	153	6,2	121	353	4,9	221	326	6,2	832	17,3
022	299	4,8	122	255	8,2	222	282	8,0	836	21,0
Soma	1269	55,0		2178	55,2		2125	57,6	5572	167,8

TABELA 3. Somas de quadrados e de produtos das variáveis produção de massa seca(Y), e pH do solo(Z) e, a análise da variância, para o exemplo considerado.

Fontes de Variação	GL	Somas de Quadrados, de Produtos e Valores do Teste F					
		YY	F	YZ	ZZ	YY(aj)	F(aj)
Total	26	402 818,2956		-1 128,6482	30,3141		
Tratamento	(9)	344 658,6111	11,19**	- 626,3694	18,3533	303 036,9011	14,98**
A linear(A')	1	40 707,5556	11,90**	123,6444	0,3756	50 698,7589	22,56**
B linear(B')	1	392,0000	< 1,00	31,2667	2,4939	6 585,7443	2,93
C linear(C')	1	204 586,7222	59,80**	- 63,9667	0,0200	198 620,0201	88,39**
A quadrático(A")	1	17 137,8519	5,01*	- 39,1926	0,0896	13 739,0554	6,11*
B quadrático(B")	1	1 557,4074	< 1,00	- 23,0926	0,3424	179,3571	0,080
C quadrático(C")	1	78 814,2407	23,04**	-691,4870	6,0669	19 249,9855	8,57**
Interação A' x B'	1	705,3333	< 1,00	- 32,9667	1,5408	706,2693	0,314
Interação A' x C'	1	630,7500	< 1,00	71,0500	8,0033	13 234,0349	5,89*
Interação B' x C'	1	126,7500	< 1,00	- 1,6250	0,0208	23,6756	0,011
Resíduo	17	58 159,6845		-502,2788	11,3608	35 953,1504	
QM Resíduo		3 421,1579					
Regressão	1	-				22 206,5341	9,88**
QM Resíduo(aj)	16	-				2 247,0719	
CV em %		28,34				22,97	

TABELA 4. Estimativas dos parâmetros para modelos sem e com a variável auxiliar adicional e respectivos desvios-padrão e coeficiente de determinação, para o exemplo considerado.

Parâmetro	Estimativa ± desvio-padrão	Estimativa ajustada ± desvio-padrão
a_{00}	206,3704 ± 11,2565	206,3704 ± 9,1228
a_{10}	47,5556 ± 13,7864	53,9417 ± 11,3563
a_{20}	4,6667 ± 13,7864	21,1232 ± 12,3386
a_{30}	106,6111 ± 13,7864	105,1374 ± 11,1829
a_{11}	- 53,4444 ± 23,8787	- 48,0408 ± 19,4285
a_{22}	- 16,1111 ± 23,8787	- 5,5495 ± 19,6418
a_{33}	-114,6111 ± 23,8787	- 70,1539 ± 23,9689
a_{12}	- 7,6667 ± 16,8848	8,1758 ± 14,5826
a_{13}	7,2500 ± 16,8848	43,3561 ± 17,8654
a_{23}	3,2500 ± 16,8848	1,4079 ± 13,6967
b		- 44,2116 ± 14,0638
r^2	0,8556	0,9107