

Instrumentação avançada em ciência do solo

Ladislau Martin Neto
Carlos Manoel Pedro Vaz
Silvio Crestana
Editores

Exemplares dessa publicação podem ser adquiridos na:

Embrapa Instrumentação Agropecuária

Rua XV de novembro, 1452
Caixa Postal 741
CEP 13560-970 – São Carlos-SP
Fone: (16) 2107-2800
Fax: (16) 2107-2902
<http://www.cnpdia.embrapa.br>
e-mail: sac@cnpdia.embrapa.br

Comitê de Publicações da Unidade

Presidente: Dr. Carlos Manoel Pedro Vaz
Membros: Dra. Débora Marcondes Bastos Pereira Milori,
Dr. João de Mendonça Naime,
Dr. Washington Luiz de Barros Melo,
Valéria de Fátima Cardoso
Membro Suplente: Dr. Paulo Sérgio de Paula Herrmann Júnior

Supervisor editorial: Dr. Victor Bertucci Neto
Normalização Bibliográfica: Valéria de Fátima Cardoso
Capa: Alex Paixão e Valentim Monzane
Foto da capa: Lúcio André do Castro Jorge e Valentim Monzane
Editoração eletrônica: Carlos Manoel Pedro Vaz e Emerson de Stefani

1ª edição

1ª impressão (2007): tiragem: 350

Todos os direitos reservados.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação dos direitos autorais (Lei no 9.610).

**CIP-Brasil. Catalogação-na-publicação.
Embrapa Instrumentação Agropecuária**

I59 Instrumentação avançada em ciência do solo. / Ladislau Martin Neto, Carlos
Manoel Pedro Vaz, Sílvio Crestana editores. – São Carlos:
Embrapa Instrumentação Agropecuária, 2007.
438 p.

ISBN: 85-86463-14-0

1. Solos. 2. Métodos Avançados. 3. Equipamentos. 4. Instrumentos. 5. Modelamento
6. Imagem. I. Martin Neto, Ladislau. II. Vaz, Carlos Manoel Pedro. III. Crestana, Sílvio.

CDD 21 ED 681.763

©Embrapa 2007

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária 5
Embrapa Instrumentação Agropecuária)
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento 7
)
l
3
)
)
3
5
4
5

Instrumentação avançada em ciência do solo

Editores 5

Ladislau Martin Neto

Carlos Manoel Pedro Vaz 5

Sílvio Crestana 7
0
1
1
3
6
7

Embrapa Instrumentação Agropecuária 8

São Carlos, SP 9

2007 7

Tomografia Compton em aplicações agrícolas

Paulo Estevão Cruvinel

Fatai Akintunde Balogun

Introdução

O termo energia se refere ao potencial inato para executar trabalho ou realizar uma ação. O seu uso científico tem significado bem definido e preciso, designando por exemplo as reações de uma determinada condição de trabalho, como por exemplo o calor, trabalho mecânico (movimento) ou luz graças ao trabalho realizado por uma máquina (por exemplo motor, caldeira, refrigerador, alto-falante, lâmpada, vento), um organismo vivo (por exemplo a energia biológica) que também utilizam outras forma de energia para realizarem trabalho, como por exemplo o uso da energia de biomassa ou de fontes não renováveis como petróleo. A etimologia da palavra tem origem no idioma grego, onde $\epsilon\rho\gamma\omicron\varsigma$ (ergos) significa trabalho. O conceito traduzido pela palavra Energia foi cunhado no século XIX e pode ser encontrado em diferentes disciplinas das áreas do conhecimento.

Em 1923, Arthur Holly Compton, na Universidade Washington, em St. Louis (USA), fez com que um feixe de raios X, de comprimento de onda λ_1 , incidisse sobre um alvo de grafite. Ele mediu, em função do comprimento de onda, as intensidades dos raios X espalhados pelo alvo em certas direções selecionadas. Percebeu então que, embora o feixe incidente tivesse exclusivamente um único comprimento de onda, os raios X espalhados tinham picos de intensidade em dois comprimentos de onda. Um pico correspondia ao comprimento de onda λ_1 do raio incidente, e o outro a um comprimento de onda λ_2 , maior que λ_1 por uma certa quantidade $\Delta\lambda$. Esse deslocamento Compton (como hoje é chamado) dependia do ângulo de espalhamento dos raios X. Tal efeito observado por Compton fez com que ele recebesse o Prêmio Nobel de Física em 1927.

A experiência pôde ser entendida com facilidade em termos do modelo dos fótons para a luz, mas que não pode ser entendida, de nenhuma

forma, em termos do modelo ondulatório. Do ponto de vista histórico, tal experiência foi muito convincente sobre a realidade dos fótons, pois considerou experimentalmente não só a energia do fóton, mas também o seu momento. Mostrou, além disso, que o modelo do fóton se aplica não apenas à luz visível e ultravioleta (domínio do efeito fotoelétrico) mas também aos raios X.

O pico espalhado de comprimento de onda λ_2 é completamente incompreensível se o raio X incidente for imaginado como uma onda. Nesse modelo, a onda incidente, com frequência f , provoca uma oscilação nos elétrons do alvo com a mesma frequência f . Esses elétrons oscilantes, tal qual os elétrons que oscilam numa pequena antena transmissora, irradiam na mesma frequência de oscilação. Assim, o feixe espalhado deveria ter somente a mesma frequência, e o mesmo comprimento de onda, que o feixe incidente. Mas não tinha. Compton imaginou o feixe incidente como uma corrente de fótons, de energia E e momento p e admitiu que alguns desses fótons colidissem, como bolas de bilhar, com os elétrons livres do alvo. Uma vez que o elétron recebe alguma energia cinética na colisão, o fóton espalhado deve ter uma energia E' mais baixa que a do fóton incidente. Terá então uma frequência mais baixa f' e, portanto, um comprimento de onda maior λ_2 , exatamente como se observa. Esta é a explicação qualitativa do deslocamento Compton.

O deslocamento do comprimento de onda dos fótons espalhados $\Delta\lambda$ pode ser dado em função da grandeza h/mc (denominada o comprimento de onda Compton) que tem o valor $2,43 \cdot 10^{-12}$ m ou 2,43 pm. Tal deslocamento Compton depende, exclusivamente, do ângulo de espalhamento. O deslocamento previsto varia desde zero, uma colisão tangencial, quase sem desvio do fóton, até $2h/mc$ para uma colisão a 180° , uma colisão frontal, em que há inversão no sentido de propagação do fóton (BEISER, 1969).

O efeito Compton é o responsável pelo chamado pulso eletromagnético provocado pelas explosões termonucleares na alta atmosfera. Os raios X e os raios gama que são emitidos nessas explosões efetuam colisões Compton com os elétrons na atmosfera superior e os deslocam energicamente para a frente. Esse súbito aparecimento de uma grande carga elétrica acelerada provoca o surgimento de campos eletromagnéticos intensos que podem causar grandes perturbações nos circuitos elétricos sem blindagem, na superfície da Terra. O efeito foi observado pela primeira vez quando os circuitos de potência e de

comunicações no Havai sofreram um colapso durante um teste de explosão nuclear na atmosfera realizado sobre o oceano Pacífico, a muitos quilômetros de distância.

O espalhamento de Compton ocorre em todos os materiais e predominantemente com fótons de média-energia (entre 0,5 e 3,5 MeV). Também, pode ser observado com fótons de alta-energia, fótons de luz visível ou de frequências mais altas. A Figura 1 ilustra esquematicamente o efeito Compton.

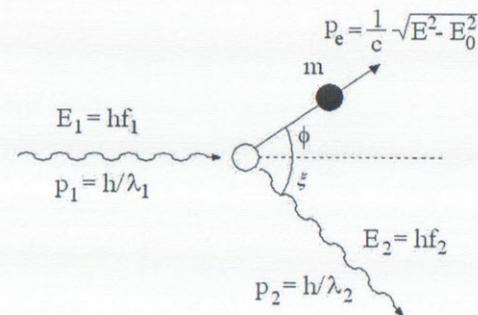


Figura 1. Representação esquemática do efeito Compton.

Compton usou uma combinação de três fundamentais fórmulas representando os diversos aspectos da física clássica e moderna, combinando-os para descrever o procedimento quântico da luz, ou seja a Luz com uma partícula, a dinâmica relativística e a trigonometria. A equação do Espalhamento de Compton é dada por:

$$\lambda_2 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \xi) + \lambda_1 \dots\dots\dots [1]$$

onde λ_1 é o comprimento de onda do fóton antes do espalhamento, λ_2 é o comprimento de onda do fóton depois do espalhamento, m_e é a massa do elétron, $h/(m_e c)$ é conhecido como comprimento de onda de Compton, ξ é o ângulo pelo qual a direção do fóton muda, h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz, ϕ é o ângulo de espalhamento do elétron.

A tomografia Compton e as técnicas de reconstrução

Tomografia é a denominação dada ao ato de se iluminar um objeto com um feixe de radiação em várias direções e capturar os dados resultantes

para reconstruir o objeto através dos cortes iluminados. Estes dados são na verdade, uma média de alguns parâmetros inerentes do caminho do raio de propagação no objeto. Através da tomografia é possível então observar, depois da reconstrução das imagens as características físicas dos objetos tomografados de forma não destrutiva e não evasiva (CORMACK, 1963; HOUNSFIELD, 1973)

No contexto agrícola, têm sido desenvolvidas, nesses últimos anos, novas metodologias que utilizam técnicas da tomografia e do processamento de imagens (PETROVIC et al., 1982; HAINSWORTH e AYLMOORE, 1983; CRESTANA et al., 1985; CRESTANA, 1986). Nesse desenvolvimento tem-se destacado o uso das técnicas de tomografia para estudo da água e características físicas do solo e de plantas, bem como instrumentos dedicados e algoritmos para a reconstrução das imagens. (CRUVINEL, 1987; CRUVINEL et al., 1990; NAIME, 1994; NAIME et al., 2000; MACEDO, 1997).

Uma das dificuldades que aparecem nos algoritmos de reconstrução de imagens a partir de suas projeções é a estimação das distribuições de densidade internas do objeto de estudo, é por esta razão para cada área de aplicação há especificidades a serem consideradas (GORDON e HERMAN, 1975).

Como resultado de cada propagação dos feixes que partem da fonte para o detector na tomografia são gerados valores que dão origem às projeções. A partir do conjunto de projeções e com um algoritmo adequado para a reconstrução da imagem é possível gerar um mapa de informações físicas do objeto em estudo, a exemplo de mapas de coeficientes de atenuação linear, ou outros, da secção sob estudo. Quando a resolução espacial é muito alta, pode-se também obter mapas da distribuição elemental das amostras ensaiadas.

O mapa de coeficientes é representado através de pixels (2D) ou voxels (3D) das imagens reconstruídas, cujos valores são dados pelos chamados números CT (*Computerized Tomography*). Esses números são normalizados em função do coeficiente de atenuação da água.

A obtenção de imagens tomográficas de um objeto tridimensional $f(x,y,z)$ ocorre a partir da reconstrução de suas projeções. Os dados necessários para a reconstrução do corte $f(x,y,0)$ são na realidade conjuntos de integrais ao longo dos raios que se encontram no trajeto entre fonte e detector. O uso da transformada inversa de Radon viabiliza a reconstrução da imagem do objeto (RADON, 1917; BRACEWELL,

1956). A Figura 2 apresenta esquematicamente este procedimento utilizado em algoritmos de reconstrução.

Todos os algoritmos de reconstrução têm como entrada, dados de projeção e produzem como saída uma imagem estimada do objeto original baseando-se nos dados disponíveis. A estimativa da imagem varia de método para método. Contudo a qualidade dos resultados depende de como os dados foram coletados e do objeto que está sendo estudado. Esses algoritmos do ponto de vista matemático e computacional determinam como reconstruir o objeto de estudo. Porém as dificuldades matemáticas e computacionais na reconstrução são aumentadas pelo fato das projeções serem ruidosas ou possuírem erros sistemáticos, causados por erros no ajuste das direções das projeções e no posicionamento dos feixes de iluminação do objeto, bem como erros instrumentais que ocorrem ao longo do processo reconstutivo.

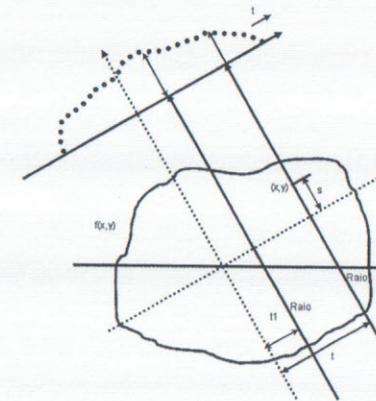


Figura 2. Projeção paralela de $f(x,y)$ para a transformada de Radon.

No plano $z = 0$, t_1 pode ser expresso matematicamente por:

$$t_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \dots\dots\dots [2]$$

onde t_1 é a distancia perpendicular da origem até a linha. Com o uso desta equação do raio, a integral do raio é dada por:

$$P_z(t_1) = \int_{\text{raioAB}} f(x,y,0) dx dy = \int_{-y_m-x_m}^{y_m-x_m} f(x,y,0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t_1) dx dy .. [3]$$

Rotacionando-se o eixo das coordenadas x sobre o eixo z

por um ângulo θ , o eixo t e a projeção pode ser escrita por:

$$P_{\theta}(t_1) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t_1, s, 0) ds \dots\dots\dots [4]$$

onde

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \text{ e } s = -x \sin \theta + y \cos \theta \dots\dots\dots [5]$$

Com $P_{\theta_i}(t)$ sendo uma função de t representando a projeção paralela com ângulo θ_i . Para θ contínuo, a função $P_{\theta}(t)$ é a transformada de Radon de $f(x, y, 0)$. No caso tridimensional, um raio pode ser descrito pela intersecção de dois planos, ou seja, uma vez que $t_1 = x \cos \theta + y \sin \theta$, nas coordenadas (t, s', r) tem-se:

$$r_1 = -(-x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \gamma + z \cos \gamma \dots\dots\dots [6]$$

Este novo sistema de coordenadas é obtido por duas rotações dos eixos (x, y, z) . A primeira rotação a mesma do caso bidimensional, com o ângulo θ com o eixo z , resultando no eixo (t, s, r) . A segunda rotação do ângulo γ com o novo eixo t , resultando em (t, s', r) . Estas equações podem ser representadas com uso da notação matricial na forma:

$$\begin{bmatrix} t \\ s' \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Uma projeção paralela tridimensional pode ser representada por

$$P_{\theta, \gamma}(t_1, r_1) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t_1, s', r_1) ds' \dots\dots\dots [7]$$

A projeção resultante é agora bidimensional e obtida pela integração das linhas paralelas no eixo s' . Assim a integral de linha pode ser matematicamente expressa na forma apresentada.

Métodos de reconstrução bidimensional

A função imagem descreve a distribuição dos coeficientes de atenuação na área da secção transversal em estudo. Após a varredura tomográfica, é construída a matriz de contagens. A partir dessa matriz é possível

reconstruir a imagem tomográfica utilizando diferentes métodos de reconstrução. Os principais métodos que têm sido utilizados são:

Método de reconstrução algébrica (ART)

O ART é um método iterativo. A reconstrução da imagem é estimada a partir de aproximações sucessivas até que as projeções calculadas se aproximem daquelas medidas, dentro de uma determinada margem de erro. A metodologia utilizada para verificar a correção da imagem calcula as integrais de linha e compara-as com aquelas medidas. Cada medida é utilizada como referência para melhorar a estimativa da reconstrução (GORDON e HERMAN, 1975; RIBEIRO, 1994).

Este método foi utilizado por Hounsfield na primeira tomografia realizada da cabeça de um ser humano. Apresenta como vantagem a não necessidade do conhecimento do conjunto complexo dos dados das projeções, fato que permite minimizar o tempo de varredura e torna possível reconstruir a imagem completa de uma amostra que tem em seu interior um material opaco à radiação utilizada. Como desvantagens, o método apresenta baixa precisão e tempo de processamento maior que os demais métodos para a mesma resolução espacial (BROOKS e DI CHIRO, 1976).

Teorema das secções de Fourier

O Teorema de Fourier para a secção tomográfica é a base das técnicas de reconstrução para a maioria dos algoritmos de reconstrução. A Transformada de Fourier de uma projeção paralela de uma imagem $g(x, y)$ tomada de um ângulo θ é equivalente para a fatia de uma transformada bidimensional de $g(x, y)$, $G(x, y)$, subentendendo-se um ângulo θ com o eixo. Em outras palavras, a Transformada de Fourier de $P_{\theta}(t)$ fornece os valores de $G(\omega_1, \omega_2)$ sobre a linha BB' mostrada na Figura 3.

Neste teorema a Transformada de Fourier unidimensional da função $g(x, y)$ é matematicamente relacionada com sua Transformada de Fourier bidimensional.

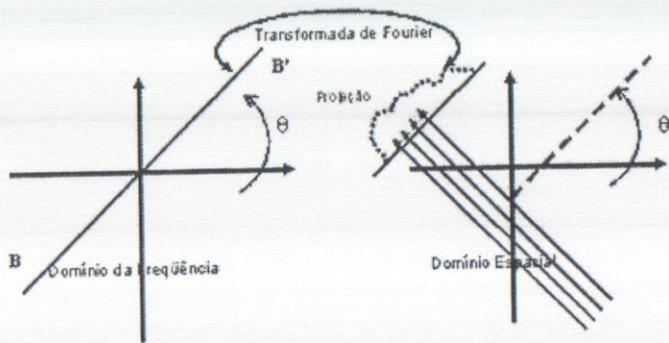


Figura 3. Teorema das secções de Fourier.

O teorema diz que se diferentes projeções são armazenadas em diferentes posições ao redor do objeto, o objeto da Transformada de Fourier pode ser gerado. Se todas as projeções forem obtidas o objeto pode ser reconstruído diretamente pela inversão de Fourier. Na realidade a reconstrução não é feita desta maneira e sim algoritmos de retroprojeções filtradas são usados para a reconstrução por causa de suas grandes precisões e facilidade de implementação.

O Teorema de Fourier para a secção tomográfica pode ser provado de forma que dado $G(\omega_1, \omega_2)$ como sendo a Transformada de Fourier da imagem $g(x, y)$, podendo ser implementada por:

$$G(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \dots\dots\dots [8]$$

e sua inversa por:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_1, \omega_2) e^{j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \dots\dots\dots [9]$$

A partir deste ponto podem ser considerados os valores de $G(\omega_1, \omega_2)$ na linha $\omega_2 = 0$ no plano (ω_1, ω_2) . Assim, $G(\omega_1, 0)$ é expresso como:

$$G(\omega_1, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j\omega_1 x} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy \right] e^{-j\omega_1 x} dx \dots\dots [10]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-j\omega_1 t} dt = S_{\theta}(\omega_1) \dots\dots\dots [11]$$

A Eq. 11 é resultante de $P_{\theta}(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy \right)$, com $\theta = 0$ e $t = x$. Pode-se observar que $S_{\theta}(\omega)$ é a transformada de Fourier da projeção $P_{\theta}(t)$. O resultado $G(\omega_1, 0) = S_0(\omega)$ implica que a transformada de Fourier da projeção calculada perpendicular ao eixo y , $S_0(\omega_1)$, é igual à transformada de Fourier do objeto sobre o eixo ω_1 . O resultado pode ser expandido para se obter um outro resultado similar para θ diferente de zero. Para tanto, rotaciona-se os eixos de coordenadas (x, y) por um ângulo θ para formar o eixo t e s , ou seja:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

Transcrevendo para as coordenadas (x, y) tem-se:

$$S_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) ds e^{-j(x\omega \cos \theta + y\omega \text{sen} \theta)} dx dy = G(\omega \cos \theta, \omega \text{sen} \theta) \dots [12]$$

Com o uso conveniente de coordenadas polares, (ω, θ) pode-se obter $G(\omega, \theta)$ de forma que:

$$G(\omega, \theta) = S_{\theta}(\omega) \dots\dots\dots [13]$$

A Transformada de Fourier da projeção $P_{\theta}(t)$ corresponde no domínio da freqüência os valores de $G(\omega_1, \omega_2)$ sobre a linha BB' com ângulo θ .

Retroprojeção filtrada

Um dos principais algoritmos de reconstrução é o algoritmo da retroprojeção filtrada. Vários fatores contribuem para a ampla divulgação desse algoritmo, dentre eles a rapidez, precisão e facilidade de implementação. Ele utiliza um hardware simples, o que se torna uma vantagem sobre outros algoritmos de reconstrução. Entretanto, a precisão do método é limitada a qualidade da imagem reconstruída, a qual é freqüentemente degradada pela presença de diferenças agudas nos coeficientes de atenuação nas regiões externas a de interesse. Neste tipo de varredura o detector recebe as projeções de uma estrutura de várias direções, mas todas as projeções são feitas em um único plano transversal ou longitudinal (OLDENBORG, 1961).

Neste caso, o algoritmo usa coordenadas polares (ω, θ) no plano (ω_1, ω_2) , de forma que se possa escrever a equação:

$$g(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta = \dots [14]$$

$$\left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta + \pi) e^{j\omega(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))} \right\} d\omega d\theta$$

Usando $G(\omega, \theta + \pi) = G(-\omega, \theta)$ e $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ pode-se escrever $g(x, y)$ com a ajuda do teorema de secções de Fourier e a expressão para t em termos de x e y , ou seja:

$$g(x, y) = \int \left[\int G(\omega, \theta) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \right] d\theta = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \right] d\theta \dots [15]$$

Para construir sua forma filtrada retro-projetada é necessário separar a equação em duas operações diferentes. A primeira é a filtragem dos dados de projeção para cada ângulo θ , como se segue:

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) |\omega| e^{j\omega t} d\omega \dots [16]$$

Depois as projeções filtradas são retro-projetadas para se obter a função objeto

$$g(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \dots [17]$$

A filtragem descrita seria fisicamente impossível de ser implementada se não fosse pelo fato das projeções serem praticamente limitadas em banda para a máxima frequência de W radianos/segundo. Dada à propriedade do teorema de Nyquist (GONZALEZ e WOODS, 1993), o valor de W será utilizado como frequência de forma que ω_s como $2W \leq \omega_s = 2\pi / \tau$.

Desta forma, se os dados de projeção descritos forem amostrados com um intervalo de amostragem τ , os dados amostrados não sofrem erros de *aliasing*. Por fazer a limitação por banda, pode-se expressar como o uso de funções de transferências de filtros, $H(\omega)$, como se segue:

$$H(\omega) = \begin{cases} |\omega|, & |\omega| < W \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \dots [18]$$

A substituição de $H(\omega)$ fornece

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \dots [19]$$

O impulso resposta do filtro, $h(t)$, é obtido pela transformada inversa de Fourier $H(\omega)$ descrito como:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \dots [20]$$

$$= \frac{1}{2\tau^2} \left[\frac{\text{sen}(2\pi / 2\tau)}{2\pi / 2\tau} \right] - \frac{1}{4\tau^2} \left[\frac{\text{sen}(\pi / 2\tau)}{\pi / 2\tau} \right]^2$$

Com base no uso do teorema da convolução pode-se escrever:

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(\zeta) h(t - \zeta) d\zeta \dots [21]$$

A Eq 21 pode ser implementada na sua forma discreta como:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n\tau - k\tau) P_{\theta}(k\tau) \dots [22]$$

Como cada projeção é finita, trabalha-se com uma versão truncada da Eq. 22, a qual pode ser escrita como:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} h(n\tau - k\tau) P_{\theta}(k\tau) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \dots [23]$$

sendo $P_{\theta}(k\tau) = 0$ para $k < 0$ e $k > N-1$. Esta filtragem dos dados de projeção pode ser conseguida pela convolução discreta no domínio do tempo ou como uma multiplicação no domínio da frequência. O método no domínio da frequência é mais rápido que a convolução no domínio do tempo devido ao uso de algoritmos para FFT (DUDA e HART, 1973). O próximo problema encontrado é na natureza periódica do filtro implementado no domínio da frequência. Pode-se observar que a convolução no espaço do tempo é aperiódico. A implementação no domínio da frequência sofreria interferências devido a intersecções entre períodos. Para eliminar este problema associado ao uso de algoritmo FFT para computar a convolução, as seqüências de dados $P_{\theta}(n\tau)$ e $h(n\tau)$ são completados com zeros (ZP) antes de serem transformados pela transformada de Fourier. Se um elemento de projeção n é completado com zeros para torná-lo com $(2N-1)$ elementos, ele pode ser mostrado

sem interferências por inter-períodos. Normalmente o preenchimento com zeros é necessário para deixar seqüências de dados em potência de 2 caso algoritmos de FFT com potência de 2 sejam usados.

Assim, a implementação no domínio da freqüência, sob forma de equação, pode ser expressa como:

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \times IFFT \{ FFT [P_\theta(n\tau) \text{comZP}] \times FFT [h(n\tau) \text{comZP}] \} \dots \quad [24]$$

Na Eq. 24 FFT e IFFT são as Transformadas Rápidas de Fourier e sua inversa, respectivamente, e ZP é o preenchimento por zero, o que adicionalmente à multiplicidade de 2 também suaviza o efeito *aliasing*. O passo seguinte no algoritmo de reconstrução é a retroprojeção das projeções filtradas que tem sua aproximação discretizada por:

$$\hat{g}(x, y) = \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K Q_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) \dots \dots \dots \quad [25]$$

De forma que, os K ângulos θ_i são os valores discretos de θ para cada $P_\theta(t)$ conhecido. Cada ponto (x, y) no processo de retroprojeção que esteja sobre o plano de reconstrução na linha t possui o valor $Q_{\theta_i}(t)$. A adição de cada valor de $Q_{\theta_i}(t)$ no ponto (x, y) com i variando de 1 até K constitui o valor do ponto em uma escala de π/K .

O valor de $Q_{\theta_i}(t)$ é uma constante sobre a linha e cada ponto no plano de reconstrução que tem o valor de $Q_{\theta_i}(t)$ a ele adicionado. Em outras palavras, a imagem da reconstrução é gerada pela soma de todos os valores t de $Q_{\theta_i}(t)$, para cada valor θ_i , projetados e multiplicados por π/K . Quando o valor de t calculado não corresponde a algum dos valores de t na função discretizada $Q_{\theta_i}(t)$, há a necessidade de interpolação. Uma interpolação linear é, em muitos casos, suficiente.

Aquisição e reconstrução de dados em três dimensões

A principal diferença entre a aquisição de dados tomográficos tridimensionais e a aquisição de dados bidimensionais é a redundância de dados e a variância espacial. A redundância de dados tem origem no fato de que dados bidimensionais são suficientes. Portanto a aquisição tridimensional contém informações repetidas. A variância espacial é uma consequência do uso de dados redundantes. A intensidade aparente de um ponto depende de sua posição.

As projeções bidimensionais geradas pela aquisição tridimensional são chamadas de transformadas de raios X. Essas projeções são diferentes das projeções da transformada de Radon. A Figura 4 ilustra aspectos de uma projeção bidimensional obtida a partir de uma informação volumétrica.

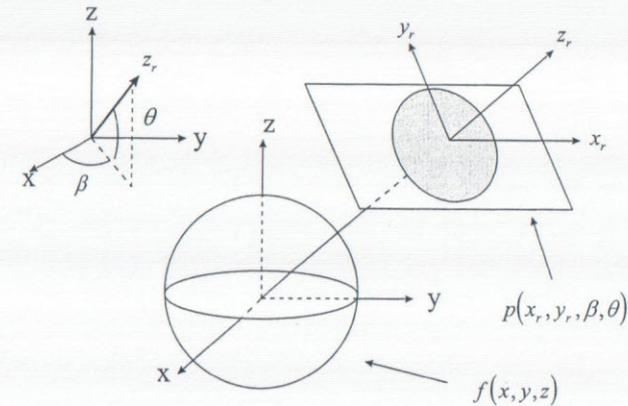


Figura 4. Projeção bidimensional obtida a partir de informação volumétrica.

O vetor unitário, $\hat{z}(\beta, \theta)$, é perpendicular ao plano de projeção, e convenientemente descreve a orientação do plano. Nota-se que $\hat{x}_r \cdot \hat{z} = 0$ e que as projeções em formação, do processo de aquisição, vem de uma função tridimensional, $f(x, y, z)$ para uma função 4D, $p(x_r, y_r, \beta, \theta)$. Diferentemente do caso de aquisição 2D onde ambos o objeto e suas projeções são funções também bidimensionais. Esse aumento de dimensionalidade indica que as projeções contêm informações redundantes.

Teorema das secções de Fourier tridimensional

Da mesma forma que no Teorema das secções de Fourier bidimensional, a Transformada de Fourier bidimensional das projeções é equivalente aos valores do plano que passa através da origem da Transformada de Fourier 3D do objeto no seu ângulo apropriado como ilustra a Figura 5.

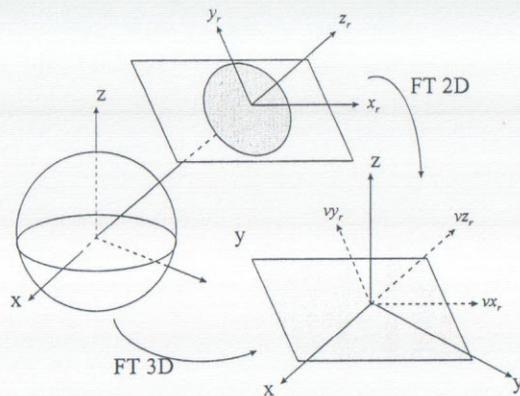


Figura 5. Ilustração do Teorema das secções de Fourier para objeto tridimensional.

A Transformada de Fourier de projeções para $\vartheta = 0$: amostra completamente a Transformada de Fourier do objeto. Isso significa que a Transformada de Fourier de uma única projeção adicional para $\vartheta > 0$ acrescenta informações redundantes quando ela atravessa a Transformada de Fourier do objeto. Na prática, com a discretização de um conjunto de projeções existem mais dados com $\vartheta > 0$ do que com $\vartheta = 0$, gerando um alto grau de redundância. A Figura 6 esquematiza esse processo. Por outro lado, a redundância é útil na redução de ruídos estatísticos no processo de reconstrução do objeto.

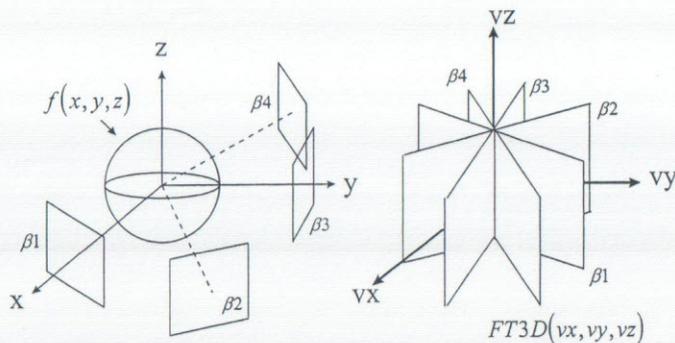


Figura 6. Projeções bidimensionais de um objeto para $\theta = 0$.

Sobreposição de fatias bidimensionais interpoladas

Quando não ocorre movimentação na aquisição das fatias tomográficas a reconstrução tridimensional pode ser feita também a partir de

sobreposição de fatias bidimensionais. Essa técnica consiste em montar os planos gerados pelas funções $f(x, y, z_i)$ para $i = 0, \dots, n-1$, onde n é o número de planos reconstruídos.

Dados intermediários podem ser interpolados de forma a reconstituir os espaços deixados entre os planos gerados pela reconstrução de dados tomográficos. A Figura 7 ilustra a sobreposição dos planos e os planos interpolados. O algoritmo de interpolação deve adequar-se à aplicação. Têm sido utilizados algoritmos de interpolação linear, tri-linear, baseados em splines e wavelets (MINATEL, 1997).

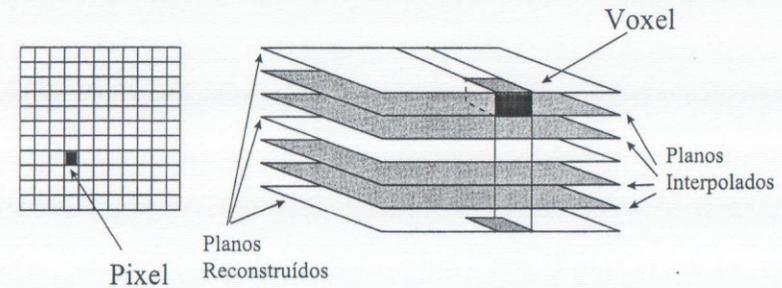


Figura 7. Técnica de sobreposição e interpolação de planos na reconstrução tridimensional.

O minitomógrafo Compton dedicado à agricultura

O uso da tomografia Compton pode ser visto como uma nova abordagem em instrumentação tomográfica com potencial uso em aplicações agrícolas (CRUVINEL e BALOGUN, 2000; CESAREO et al., 2000). A tomografia Compton possibilita a obtenção de um mapa espacial das densidades eletrônicas da amostra sob análise. Também possibilita que resultados quantitativos possam ser obtidos com base na aplicação de algoritmos de reconstrução que considerem a radiação absorvida e espalhada pela amostra irradiada.

As medidas de espalhamento têm encontrado uma série de aplicações em controle de qualidade, em máquinas de manufatura, em partes automotivas, como também para o monitoramento de altas temperaturas que ocorrem em fornos especiais para fundição de metais. Em todos os casos mencionados, há uma necessidade de se buscar instrumentos compactos e que predominantemente possam apresentar fonte e detector instalados do mesmo lado do instrumento de medida. Para estes casos a escolha do ângulo de espalhamento tem possibilitado definir a

sensibilidade e a reprodutibilidade da medida (HANSON e GIGANTE, 1989).

Porém, além do projeto de densitômetros, o uso da radiação espalhada pode ser útil para idealizar instrumentos que proporcionem imageamento por simples varredura espacial ou que possibilitem a reconstrução das projeções obtidas, levando à concepção de tomografos de uso dedicado ou não.

Entretanto, a aplicação desta técnica tem fatores que necessitam ser considerados, para que análises quantitativas estejam dentro de classe de erros aceitáveis. Entre estes fatores se encontram incertezas no número de fótons medidos, devido às atenuações do feixe incidente e do feixe espalhado no objeto de estudo, contribuições de efeitos secundários do espalhamento dos fótons e o volume de espalhamento de onde se deriva o verdadeiro sinal a ser processado na medida.

Em 1993 Balogun e colaboradores estudaram a variação do volume de espalhamento e o ângulo de espalhamento, com base em um algoritmo de análise numérica computacional (BALOGUN e SPYROU, 1993). A espessura de dependência da fluência de fótons foi demonstrada para uma resina epóxi e examinada para um ângulo de espalhamento de até 150° com fótons de energia de 60 keV de uma fonte de ²⁴¹Am. Um valor de 5 cm foi obtido para a espessura de saturação.

É importante observar que no processo de interação da radiação com a matéria, nos seus vários modos, a faixa de influência de cada modo é claramente observada. Por exemplo, para fótons abaixo de 30keV o efeito fotoelétrico é dominante com espalhamento coerente mostrando sua contribuição. Acima deste nível de energia e até 60keV ocorre uma mistura de efeito fotoelétrico com espalhamento coerente e incoerente. Na faixa de energia que esta acima de 60 keV até poucos MeV, o espalhamento incoerente é predominante. A produção de pares somente começa a partir de 1,22 MeV, vindo a ser relevante somente na vizinhança de vários MeV da energia do fóton.

Desta forma, uma vez que às fontes de raios gama estão em geral entre os limites de 60 keV e 1,33 MeV, devido aos radioisótopos comercialmente disponíveis, a forma de interação com as amostras de solo são predominantemente do tipo incoerente ou por espalhamento Compton (BALOGUN e CRUVINEL, 2003). Assim, a secção de choque diferencial de Klein-Nishina para um elétron livre é dada unicamente pela relação entre energia e ângulo de espalhamento, ou seja:

$$\frac{d_e \sigma^{KN}(E)}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left[\frac{1 + \cos^2 \xi}{(1 + \alpha(1 - \cos \xi))^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \xi)^2}{(1 + \cos^2 \xi)(1 + \alpha(1 - \cos \xi))} \right] \right] \dots \dots [26]$$

onde, r_0 é o raio clássico do elétron, numericamente igual a $2,818 \times 10^{-15}$ m; ξ é o ângulo do espalhamento, ou do fóton espalhado; α é a razão entre a energia E do fóton incidente e a energia de repouso de um elétron, sendo igual a 511 keV.

Para a validade da Eq. 26 assume-se que a energia do fóton é muito maior que a energia de ligação do alvo. Assim, é possível dizer que o número de fótons é esperado ser proporcional para cada energia à densidade da amostra. Ou de forma mais realística, o feixe incidente e os fótons espalhados sofrem atenuações ao viajarem da fonte ao detector, onde encontra no caminho o elemento de volume considerado. Assim, de forma mais completa é possível escrever a Eq. 27, para o número de fótons detectados no detector na forma:

$$S(E) = I_0(E)t\epsilon \exp\left(-\int_{x_1} \mu_1(x, E)dx\right) \frac{d_e \sigma^{KN}(E)}{d\Omega} \rho \frac{N_A Z}{A} \exp\left(-\int_{x_2} \mu_2(x, E)dx\right) dV d\Omega \dots [27]$$

onde t é o tempo em segundos durante um período de contagem; $I_0(E)$ é o fluxo de fótons incidente com energia E; $\frac{d_e \sigma^{KN}(E)}{d\Omega}$ é a secção de choque diferencial de Klein-Nishina na energia E para um elétron livre; $d\Omega$ é o ângulo diferencial relacionado com a secção de choque diferencial de Klein-Nishina; ρ é a densidade da amostra; Z é o número atômico; N_A é o número de Avogrado; N é o número de massa do material sob investigação; μ_1 e μ_2 são os fatores de atenuação linear de atenuação do percurso fonte-amostra e do percurso amostra-detector; ϵ é a eficiência do detector em seu fotopico na energia do fóton espalhado; x_1 e x_2 representam o comprimento dos caminhos entre fonte e amostra e entre amostra e detector respectivamente; dV é o volume diferencial considerado pela radiação e suas interações com a matéria.

A Figura 8 ilustra uma fotografia do Minitomógrafo Compton® para aplicações agrícolas e florestais (CRUVINEL e BALOGUN, 2006), que foi desenvolvido na Embrapa Instrumentação Agropecuária. Foi projetado para operações em duas energias, ou seja, 60 keV e 662 keV.

A Figura 9 mostra uma relação entre o elemento de volume de espalhamento e o ângulo de espalhamento, conforme descrito pela Eq. 26. A Figura 10 ilustra a variação do volume de espalhamento e o ângulo

de espalhamento para o MinitomógrafoCompton[®] dedicado às aplicações agrícolas.

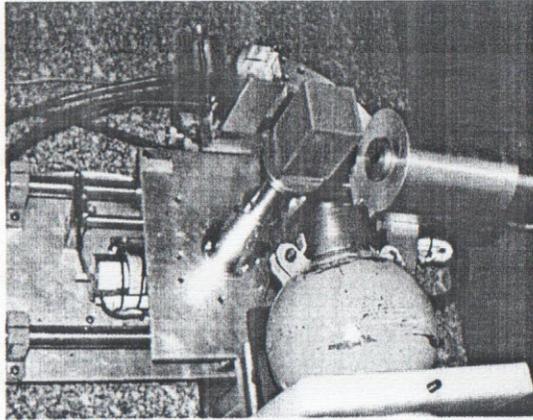


Figura 8. O MinitomógrafoCompton[®] para aplicações agrícolas (CRUVINEL e BALOGUN, 2006).

A Figura 11 ilustra espectros Compton típicos obtidos com amostra de solo e sem a amostra se solo na energia de 662 keV, ou seja, em termos de contagem de fótons espalhados e altura do pulso em Volts. O espalhamento Compton, também conhecido como espalhamento incoerente ocorre quando um fóton de raios X incidente ejeta um elétron de um átomo da amostra e um fóton de raios X de energia menor é espalhado do átomo. A energia relativística e o momento são conservados neste processo e o fóton espalhado tem menor energia e consequentemente um maior comprimento de onda que o fóton incidente.

Na Figura 11 é possível observar a ausência do fotopico do fóton espalhado no espectro obtido sem a amostra de solo, de um porta-amostra vazio. Entretanto, o segundo espectro obtido mostra claramente a ocorrência de um fotopico em uma energia menor devido ao espalhamento Compton observado na amostra com solo, como esperado, devido ao crescimento da seção de choque diferencial de Klein-Nishina, como ilustrado na Eq. 27.

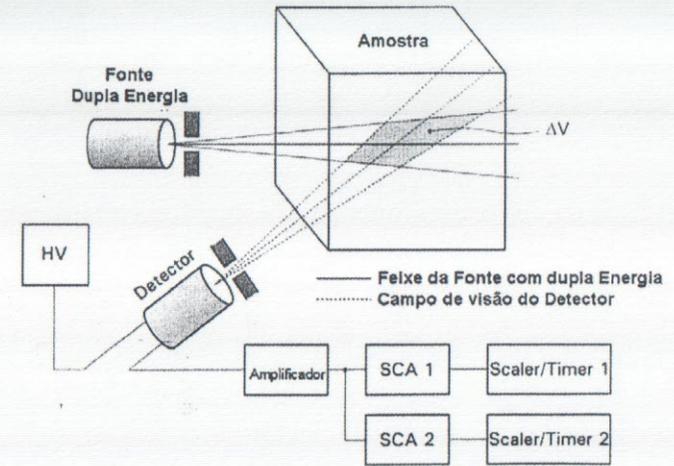


Figura 9. Elemento de volume de espalhamento e o ângulo de espalhamento Compton (CRUVINEL e BALOGUN, 2006).

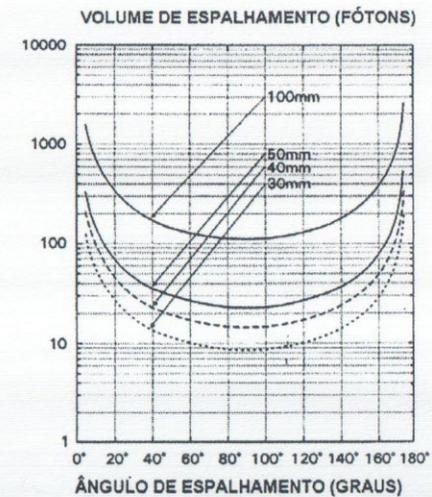


Figura 10. Variação do volume de espalhamento (em fótons) e o ângulo de espalhamento (graus) para o MinitomógrafoCompton[®] (CRUVINEL e BALOGUN, 2006).

Medidas de densidade de solo e conteúdo de água no solo por tomografia Compton, quando comparadas ao método de tomografia por transmissão e à técnica de Reflectometria no Domínio do Tempo (TDR),

apresentaram coeficientes de determinação de 0,81 (Figura 12) e 0,79 (Figura 13), respectivamente. A calibração para medida de densidade e conteúdo de água em amostras de solo foi realizada considerando um conjunto de secas ao ar, um conjunto com diferente conteúdo de água, os métodos básicos de preparação de amostras e um conjunto de porta-amostras de plástico de 50x50x80 mm. O arranjo experimental considerou o uso de duas fontes radioativas, sendo uma de ^{137}Cs (600 mCi) para medidas de densidade de solo e outra de ^{231}Am (300 mCi) para medidas do conteúdo de água, as quais emitem raios gama nas energias de 662 keV e 60 keV respectivamente. A geometria de contagem foi realizada com fonte e detector alinhados em 90° e utilizou-se um detector de (NaI(Tl)) mecanicamente adaptado a um anel para posicionamento do ângulo de espalhamento, bem como acoplado a uma mesa com dois motores de passo, sendo um deles utilizado para translação e outro para deslocamento vertical da amostra.

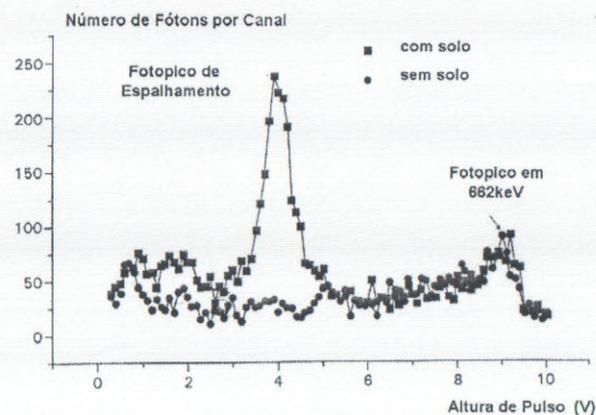


Figura 11. Espectros Compton obtidos com amostra de solo e somente com o porta-amostra de plástico (sem a amostra de solo).

A Figura 14 ilustra imagens tomográficas reconstruídas a partir de medidas Compton com energias de 662 keV e 60 keV respectivamente. As amostras foram coletadas em porta-amostras de plástico. Para calibração foram coletados solos Podzolicos (Paleuhumult) e Latossolos vermelho-amarelo. As imagens foram reconstruídas, utilizando-se o algoritmo de retroprojeção com filtragem e reconstrução em três dimensões. As imagens representam cortes longitudinais obtidas por escanamento e coleta de dados em número de fótons do feixe

espalhado e posteriormente reconstruídos. A Figura 15 ilustra a reconstrução 3D de uma amostra de solo na energia de 622 keV, onde pode ser observado detalhes do contorno do volume reconstruído.

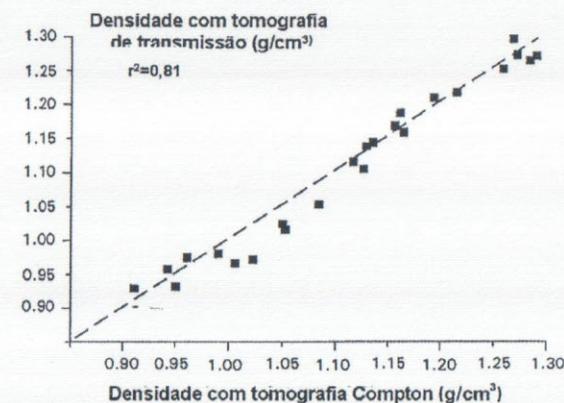


Figura 12. Medidas de densidade de amostras de solo obtidas com os métodos de tomografia de transmissão e tomografia Compton.

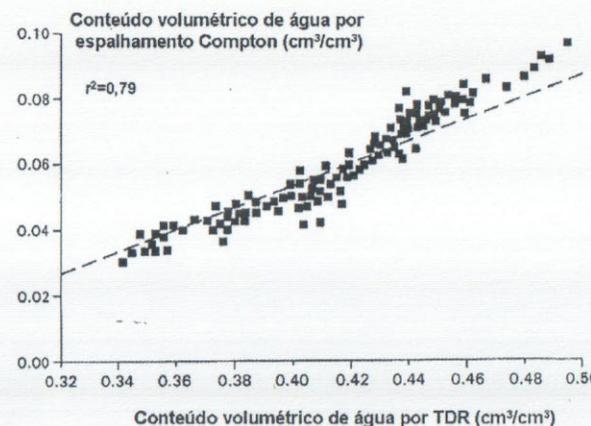


Figura 13. Medidas de conteúdo volumétrico de água de amostras de solo obtidas com os métodos de Reflectometria no Domínio de Tempo (TDR) e por tomografia Compton.

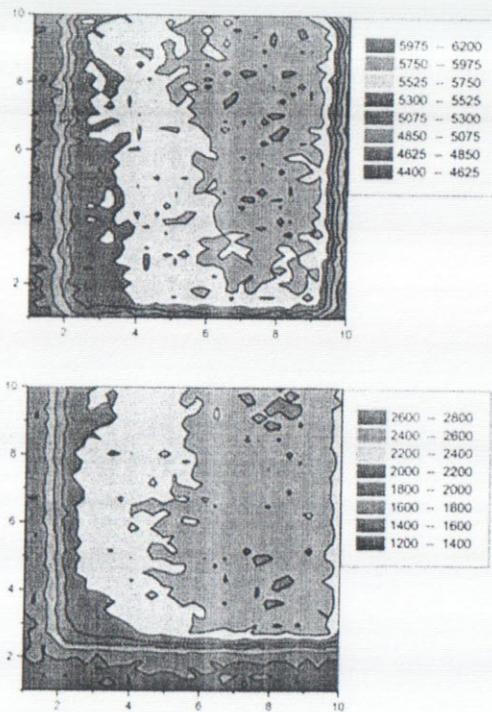


Figura 14. Imagem Compton obtida com energia de 662keV, onde as intensidades são relacionadas à densidade (a) e obtida com energia de 60keV, onde os valores são relacionados à umidade do solo (b) (CRUVINEL e BALOGUN, 2006).

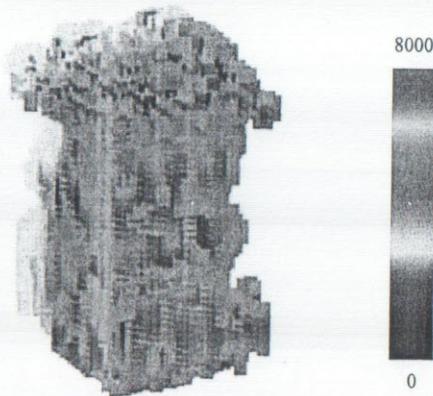


Figura 15. Volume de uma amostra de um latossolo vermelho amarelo reconstruído, utilizando 8 planos reais e 5 planos interpolados a partir de planos reconstruídos com filtragem de Hamming e Energia de 662keV.

Referências

BALOGUN F. A.; CRUVINEL P. E. Compton scattering tomography in soil compaction study. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A**, v. 505, issues 1-2, p. 502-507, 2003.

BALOGUN, F. A.; SPYROU, N. M. Compton scattering tomography in the study of a dense material in a lighter matrix. **Nuclear Instruments and Methods**, Amsterdam, v. B 83, p. 533-538, 1993.

BEISER, A. **Perspectives of modern physics**. [S. l.]: McGRAW-HILL, 1969.

BRACEWELL, R. N. Strip Integration in radioastronomy Australian. **Journal of Physics**, Moscow, v. 9, p. 198-217, 1956.

BROOKS, R. A ; DI CHRO, G. Principles of computer assisted tomography (CAT) in radiographic and radioisotopic imaging. **Physics in Medicine an Biology**, Bristol, v. 21 n. 5, p. 689-732, 1976.

CESAREO, R.; BRUNETTI, A.; BORLINO, C. C.; BALOGUN, F. A.; GOLOSIO, B. X-Ray Compton Tomography at 90°. In: CRUVINEL, P. E.; COLNAGO, L. A. (Ed). **Advances in agricultural tomography**. São Carlos: Embrapa Agricultural Instrumentation, 2000. p. 36-43.

CORMACK, A. M. Representation of a Foundation by Its Line with some Radiological Application. **J. App. Phys**, [S. l.], v. 34, n. 9, p. 2722-2727, 1963.

CRESTANA, S.; MASCARENHAS, S.; POZZI-MUCELLI, R. S. Static and dynamic three-dimensional studies of water in soil using computed tomographic scanning. **Soil Science**, Madison, v. 140, n. 5, p. 326-32, 1985.

CRESTANA, S. **A Tomografia Computadorizada com um novo método para estudos da física da água no solo**. 1986. 140 f. Tese (Doutorado)- Universidade de São Paulo, São Carlos.

CRUVINEL, P. E.; BALOGUN, F. A. Minitomography scanner for agriculture based on dual-energy Compton scattering. In: BRAZILIAN SYMPOSIUM ON COMPUTER GRAPHYCS AND IMAGE PROCESSING-SIBGRAPI, 13., 2000, Gramado. **Proceedings...** Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2000. p. 193-199.

CRUVINEL, P. E.; BALOGUN, F. A. Compton scattering tomography for agricultural measurements. **Eng. Agríc.**, Sorocaba, v. 26, n. 1, p. 151-160, 2006.

CRUVINEL, P. E.; CESAREO, R.; CRESTANA, S.; MASCARENHAS, S. X and Gamma-Rays computerized mini tomography scanner for soil science. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**. New York, v. 39, n. 5, p. 745-750, 1990.

CRUVINEL, P. E. Minitomógrafo de Raios-X e Raios- γ computadorizado para aplicações multidisciplinares. 1987. 325 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

DUDA, R.; HART, P. E. **Pattern Classification and Scene Analysis**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1973.

GIGANTE, G. E.; HANSON, A. L. Evaluation of geometrical contribution to the spread of the Compton scatter energy distribution. **Physical Review A**, New York, v. 40, n. 1, p. 171-80, 1989.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Digital Image Processing**. [S. l.]: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1993.

GORDON, R.; HERMAN, T. G. **Three-Dimensional Reconstruction from Projections: A Review of Algorithms**. [S. l.: s.n.], 1975. p. 111-153.

HAINSWORTH, J. M.; AYLMOORE, L. A. G. The use of Computer-Assisted Tomography to determine spatial distribution of soil water content. **Austrian Journal of Soil Research**, Collingwood, v. 21, p. 435-43, 1983.

HANSON, A. L.; GIGANTE, G. E. Evaluation of geometrical contributions to the spread of the Compton-scatter energy distribution. **Physical Review A**, New York, v. 40, p. 171-180, 1989.

HOUNSFIELD, G. N. Computerized transverse axial scanning (tomography) I: description of systems. **Brit J Radio**, [S. l.], v. 46, p. 1016-1022, 1973.

MACEDO, A. **Construção e uso de um tomógrafo com resolução para aplicações em ciências do solo e do ambiente**. 1997. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MINATEL, E. R. **Desenvolvimento de Algoritmo para Reconstrução e Visualização Tridimensional de Imagens Tomográficas com Uso de Técnicas de Frequências e Wavelets**. 1997. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

NAIME, J. M.; CRUVINEL, P. E.; SILVA, A. M.; CRESTANA, S. VAZ, C. M. P. Applications of X and γ -Rays Dedicated Computerized Tomography Scanner in Agriculture In: CRUVINEL, P. E.; COLNAGO, L. A. (Ed). **Advances in agricultural tomography**. São Carlos: Embrapa Agricultural Instrumentation, 2000. p. 96-104.

NAIME, J. M. **Projeto e construção de um minitomógrafo portátil para estudo de ciência de solo e plantas em campo**. 1994. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

OLDENBORG, W. Isolated Flying Spot Detection of Radiodensity Discontinuities: Displaying the Interhal Structural Pattern of a Complex Object. **IRE Transactions of Bio-medical Electronics**, New York, v. 8, p. 68-72, 1961.

PETROVIC, A. M.; SIEBERT, J. E.; RIEKE, P. E. Soil bulk density analysis in three dimensions by computed tomographic scanning. **Soil Sci. Soc. Am. J**, Madison, v. 46, p. 445-450, 1982.

RADON, J. In the Determination of functions from their integral along certain manifold. **Berichte über die Verhandlungen**, [S. l.], v. 69, p. 262-277, 1917.

RIBEIRO, G. C. **Desenvolvimento de um Algoritmo para a Reconstrução Tridimensional para Imagens de um minitomógrafo, baseado no Método de Reconstrução Algébrica Modificado e Interpolação Spline**. 1994. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.