ISSN 1677-5473

Texto para Discussão

15

Considerações Estatísticas sobre a Lei dos Julgamentos Categóricos

Geraldo da Silva e Souza

Embrapa

ISSN 1677-5473

Embrapa

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
Secretaria de Administração Estratégica
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento

Texto para Discussão 15

Considerações Estatísticas sobre a Lei dos Julgamentos Categóricos

Geraldo da Silva e Souza

Embrapa Informação Tecnológica
Brasília, DF
2002

Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa
Secretaria de Administração Estratégica
Edifício-Sede da Embrapa
Parque Estação Biológica – PqEB – Av. W3 Norte (final)
CEP 70770-901 Brasília, DF
Fone: (61) 448-4452
Fax: (61) 448-4 319

Editor da série
Ivan Sergio Freire de Sousa

Coordenador editorial
Vicente G. F. Guedes

Corpo editorial
Antonio Flávio Dias Avila
Antonio Raphael Teixeira Filho
Ivan Sergio Freire de Sousa – Presidente
Levon Yeganiantz

Produção editorial e gráfica
Embrapa Informação Tecnológica

Revisão de texto
Raquel Lemos de Siqueira

Normalização bibliográfica
Rosa Maria e Barros

Editoração eletrônica
José Batista Dantas

Projeto gráfico
Tênisson Waldow de Souza

Tiragem: 500 exemplares

CIP-Brasil.Catalogação-na-publicação.
Embrapa Informação Tecnológica.

Souza, Geraldo da Silva e.
Considerações estatísticas sobre a Lei dos Julgamentos Categóricos / Geraldo da Silva e Souza. – Brasília : Embrapa Informação Tecnológica, 2002.
39 p. ; (Texto para Discussão ; 15).

1. Estatística – Método. 2. Lei de Julgamentos Categóricos – Uso. I. Título. II. Série.

CDD 519.5 (21ª ed.)

Apresentação

Texto para Discussão *é um veículo utilizado pela Secretaria de Administração Estratégica – SEA –, da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa –, para dinamizar a circulação de idéias novas e a prática de reflexão e de debate sobre aspectos relacionados à ciência, à tecnologia, ao desenvolvimento agrícola e ao agronegócio.*

O objetivo da série é fazer com que uma comunidade mais ampla, composta de profissionais das diferentes áreas científicas, debata os textos apresentados, contribuindo para o seu aperfeiçoamento.

Os trabalhos trazidos a esta série poderão, em seguida, ser submetidos a publicação em qualquer livro ou periódico. Não se reserva aqui o direito de exclusividade de artigo ou monografia posta em discussão.

O leitor poderá apresentar comentários e sugestões, assim como debater diretamente com os autores, em seminários especialmente programados, ou utilizando qualquer um dos endereços fornecidos: eletrônico, fax ou postal.

Os trabalhos para esta coleção devem ser enviados à Embrapa, Secretaria de Administração Estratégica, Edifício-Sede, Parque Estação Biológica – PqEB –, Av. W3 Norte (final), CEP 70770-901, Brasília, DF. Contatos com a Editoria devem ser feitos pelo fone (61) 448-4452 ou pelo fax (61) 448-4319.

Os usuários da Internet podem acessar as publicações pelo endereço ***http://www.embrapa.br/unidades/uc/sea/textdiscussao.htm/****. Para os usuários do Sistema Embrapa, basta clicar em* ***novidades****, na Intranet.*

15

Texto para Discussão

Considerações Estatísticas sobre a Lei dos Julgamentos Categóricos

Geraldo da Silva e Souza[1]

[1] Pesquisador da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa. Parque Estação Biológica – PqEB –, Av. W3 Norte (final), CEP 70770-901, Brasília, DF, Brasil.

Introdução

Considere-se um conjunto de $r \geq 2$ estímulos $S = \{S_1, ..., S_r\}$ e um conjunto com $m \geq 2$ categorias de resposta $C = \{C_1, ..., C_m\}$. Um parecerista ou juiz, aleatoriamente escolhido de uma população, classifica cada estímulo S_i em uma das categorias C_j. As categorias em C são mutuamente exclusivas e ordenadas segundo uma característica subjacente de interesse. Nesse contexto, $C_1 < C_2 < ... < C_m$ representa a ordenação em C, isto é, relativamente à característica de interesse, C_1 representa os impulsos menos intensos e C_m os impulsos mais intensos. Os conjuntos de dados gerados por tais processos são conhecidos como dados categóricos, com respostas em escala ordinal. São muito comuns em aplicações de Biologia, Econometria, Sociologia, Psicometria e Administração. Veja Souza & Ávila (2000), Rousseau et al. (1999), Macedo (1997), Turoff & Hiltz (1993), Sousa (1993) e MacCullagh & Nelder (1989).

Um exemplo típico se obtém quando se pede a cada elemento de uma amostra de indivíduos, tomada de uma certa população, que manifeste sua opinião, relativamente a algum critério, sobre cada atividade de um conjunto de interesse. Tais estímulos ou atividades poderiam ser projetos de pesquisa, unidades de pesquisa de uma instituição ou mesmo um conjunto de ações, para o qual se quer avaliar cada elemento em uma escala psicométrica. MacCullagh & Nelder (1989, p. 175) fornecem um exemplo simples de tal processo, em que os estímulos são quatro tipos de queijo (A, B, C e D). O árbitro (degustador) manifesta a intensidade relativamente a qual gosta ou não de um determinado tipo de queijo, em uma escala ordinal de 1 a 10, onde 10 representa "gosto excelente" e 1, "insatisfação forte". Para essas situações, Thurstone (1927) propôs um modelo de julgamento geral do qual é possível derivar um conjunto de equações relacionando os parâmetros dos estímulos e de categorias de resposta às freqüências da tabela de contingência das avaliações dos juízes. Esse conjunto de equações é conhecido como Lei dos Julgamentos Categóricos. O modelo estatístico resultante, em sua versão linear, pertence à classe de modelos com respostas multinominais que Nelder & MacCullagh (1989) discutem no Capítulo 5.

Os modelos thurstonianos, embora originados há muito tempo, têm sido objeto de contínuo uso em aplicações e na pesquisa de natureza psicométrica. Nesse contexto, vale mencionar os trabalhos de McFadden (1974) e Maydeu-Olivares (1999, 2001), que discutem o uso da proposta de Thurstone para modelar preferências em aplicações de economia e psicologia, respectivamente. A melhor referência com respeito aos aspectos filosóficos e matemáticos da Lei dos Julgamentos Categóricos é ainda Torgerson (1958). Informações úteis também podem ser obtidas de Maydeu-Olivares (2001), Saaty (1994), Johnson & Kotz (1989) e Souza (1988).

Neste artigo, mostra-se como a Lei dos Julgamentos Categóricos pode ser posta em uma estrutura semelhante à usada por Grizzle et al. (1969) na análise de dados categóricos e, alternativamente, como um modelo não-linear de resposta multinominal que pode ser analisado pelo método de máxima verossimilhança. O processo inferencial resultante dessas abordagens é flexível o bastante para estimar os parâmetros dos estímulos e das categorias e para testar a lei de Thurstone dos julgamentos categóricos. A abordagem aqui adotada, embora bem conhecida na literatura estatística, pelo menos no âmbito de conhecimento do autor, não consta da literatura psicométrica padrão e da maioria das aplicações da Lei dos Julgamentos Categóricos que, tipicamente, se utilizam dos modelos lineares e do método de momentos. Também não são executados testes estatísticos formais da teoria.

A exposição levada a efeito no artigo procede como segue. A Seção 2 trata da teoria de Thurstone que conduz à Lei dos Julgamentos Categóricos. Na Seção 2, também mostra-se como os modelos de regressão linear e não-linear podem ser utilizados para ajustar a Lei dos Julgamentos Categóricos com o uso dos métodos de mínimos quadrados generalizados e de máxima verossimilhança. Na Seção 3, apresenta-se a abordagem clássica à Lei dos Julgamentos Categóricos. Explora-se a discussão de Torgerson (1958). Na Seção 4, discutem-se aspectos computacionais. Na Seção 5, ilustra-se a teoria de Thurstone com uma aplicação que explora algumas características do pacote estatístico SAS. A Seção 6 mostra como obter um conjunto de pesos que somam um e que servem ao propósito de classificar os estímulos. Essa abordagem é original e é competitiva com o método do processo analítico hierárquico de Saaty (1994) e com a Lei dos Julgamentos Comparativos de Thurstone quando o número de estímulos e a amostra de árbitros são muito grande, de forma que o registro, e o controle dos julgamentos de pares de alternativas, se torna praticamente impossível de realizar. Finalmente, na Seção 7, apresenta-se um resumo dos resultados principais do artigo e uma discussão breve da hipótese de independência nos julgamentos dos estímulos e da aplicabilidade geral da Lei dos Julgamentos Categóricos.

A Lei dos Julgamentos Categóricos

O modelo psicométrico proposto por Thurstone (1927) postula a presença de um contínuo psicológico. Cada vez que um juiz se vê ante a um estímulo, um processo de discriminação mental é colocado em ação gerando um valor numérico na reta real que reflete a intensidade do estímulo na percepção do juiz. Desse modo, os estímulos traduzem-se em valores de escala $\mu_1,...,\mu_r$. Do mesmo modo, as categorias se traduzem em valores de localização $\tau_1,...,\tau_{m-1}$. Essas quantidades definem uma partição da reta real $(-\infty,\tau_1],\ (\tau_1,\tau_2],...,(\tau_{m-1},+\infty)$. A partição serve ao proposto de associar os estímulos S_i às categorias C_j de acordo com a regra seguinte. Um juiz classifica o estímulo S_i em $\bigcup_{l=1}^{j} C_l$ se e só se $\mu_i \leq \tau_j$. O processo herda aleatoriedade do esquema amostral e do fato de que, em virtude das flutuações de natureza estocástica, um determinado estímulo e categoria, quando repetidamente avaliados por um mesmo árbitro, não geram os mesmos valores de escala e localização no contínuo psicológico.

A aleatoriedade do processo nos leva a supor que, na realidade, os μ_i são médias de variáveis aleatórias ξ_i com variância σ_i^2, e que os τ_j são médias de variáveis aleatórias η_j com variância ϕ_j^2. A discussão impõe também independência nos julgamentos dos estímulos e normalidade conjunta. Em outras palavras, os ξ_i não são correlacionados e os pares (ξ_i, η_j) têm distribuição normal bivariada. Em princípio, o interesse estatístico concentra-se nas diferenças paramétricas $\mu_i - \mu_j$. Essas quantidades servem ao propósito de avaliar diferenças de intensidade entre dois estímulos. Na Seção 5, trata-se com mais detalhes do problema de medir as intensidades relativas dos estímulos e de sua ordenação segundo uma medida de intensidade relativa. Ali, uma abordagem alternativa e equivalente ao estudo de contrastes é apresentada.

Seja π_{ij} a probabilidade de classificar o estímulo S_i em uma das primeiras j categorias $C_1, C_2, ..., C_j$. Supõe-se que $\pi_{ij} > 0$. Tem-se

$$P\left\{S_i \in \bigcup_{l=1}^{j} C_l\right\} = \pi_{ij} \quad i = 1,\ldots,r,\ j = 1,\ldots,m-1.$$

$$= P\left\{\xi_i \leq \eta_j\right\}$$

$$= P\left\{Z \leq -\frac{\mu_i - \tau_j}{\sqrt{Var(\xi_i - \eta_j)}}\right\}$$

em que Z tem distribuição normal padrão.

Seja $g(.)$ a transformação *probit*. A suposição de normalidade conjunta conduz às equações

$$g(\pi_{ij}) = -\frac{\mu_i - \tau_j}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_i - \eta_j)}} \quad i = 1,\ldots,r \quad j = 1,\ldots,\ m-1 \qquad (1)$$

que relacionam as probabilidades cumulativas π_{ij} aos parâmetros do modelo de Thurstone. Claramente, vê-se que é possível generalizar a projeção normal no contínuo psicológico a outras distribuições. Qualquer função monótona pode fazer o papel de $g(.)$. Alternativas típicas nesse contexto seriam a da escala logística $g(x) = \ln\{x/(1-x)\}$ e a da escala log-log $g(x) = \ln\{-\ln(1-x)\}$.

Suponhamos primeiramente que se tenham observações suficientes disponíveis para estimar as probabilidades π_{ij}. Nesse contexto, a versão amostral da Lei dos Julgamentos Categóricos é, portanto,

$$g(\hat{\pi}_{ij}) = -\frac{\mu_i - \tau_j}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_i - \eta_j)}} + u_{ij} \quad i = 1,\ldots,\ r \quad j = 1,\ldots,\ m-1 \ (2)$$

em que $\hat{\pi}_{ij}$ é a freqüência cumulativa relativa de observações na categoria C_j. Os vetores $u'_i = (u_{i1}, ..., u_{im-1})$ são distribuídos independentemente, com uma matriz de variância distinta para cada i. Claramente,

$$\hat{\pi}_{ij} = \hat{p}_{i1} + \hat{p}_{i2} + ... + \hat{p}_{ij}$$

em que $\hat{p}_{il}$ representa a proporção de vezes que os árbitros (amostra) classificam o estímulo S_i em C_l. Seja

$$G(\hat{\pi}) = \left(G'_1(\hat{\pi}_1), ...G'_r(\hat{\pi}_r)\right)', \qquad \hat{\pi} = \left(\hat{\pi}'_1, ..., \hat{\pi}'_r\right)' \quad (3)$$

em que $G(\hat{\pi})$ é o vetor resposta, $\hat{\pi}_i = (\hat{\pi}_{i1}, ..., \hat{\pi}_{im-1})'$ e $G_i(\hat{\pi}_i)$ é o subvetor de $G(\hat{\pi})$ formado com as quantidades $g(\hat{\pi}_{ij})$, $j = 1, ..., m-1$. A expansão de Taylor de primeira ordem de $G_i(\hat{\pi}_i)$ em torno do parâmetro $\pi_i = (p_{i1}, ..., p_{im-1})'$ produz

$$G_i(\hat{\pi}_i) = G_i(\pi_i) + \begin{bmatrix} g'(\pi_{i1}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g'(\pi_{i2}) & g'(\pi_{i2}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g'(\pi_{im-1}) & g'(\pi_{im-1}) & \cdots & \cdots & g'(\pi_{im-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{x} \begin{pmatrix} \hat{p}_{i1} - p_{i1} \\ \vdots \\ \hat{p}_{im-1} - p_{im-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

em que

$$g'\left(\pi_{ij}\right) = \sqrt{2\pi}\ \exp\ \left\{\frac{g^2(\pi_{ij})}{2}\right\}$$

para a função de ligação *probit*,

$$g'\left(\pi_{ij}\right) = \frac{1}{\pi_{ij}\,(1-\pi_{j})}$$

para a logística, e

$$g'\ (\pi_{ij}) = \frac{1}{\pi_{ij}\ln(1-\pi_{ij})}$$

para a escala log-log.

Seja H_i a matriz triangular inferior em (4) e V_i a matriz de variância de $\hat{\pi}_i$. Supõe-se que no modelo de regressão (2) o vetor residual tem média zero e variância

$$V = \text{diag}(H_1 V_1 H_1', \ldots, H_r V_r H_r') \tag{5}$$

que pode ser estimada por

$$\hat{V} = \text{diag}\ (\hat{H}_1 \hat{V}_1 \hat{H}_1', \ldots, \hat{H}_r \hat{V}_r \hat{H}_r') \tag{6}$$

usando as quantidades $\hat{p}_{ij}$ e $\hat{\pi}_{ij}$ em substituição a p_{ij} e π_{ij}, respectivamente.

Com o nível de generalidade acima, a lei de classificação que Thurstone propõe não é identificável. Porém, dependendo das suposições relativas aos componentes $Var(\xi_i - \eta_j)$, uma solução para a Lei dos Julgamentos Categóricos é viável. Nesta seção, consideram-se três modelos distintos que Torgerson (1958) rotulou de Modelos B, C e D. Os Modelos B e C são não-lineares. Começamos nossa discussão com o Modelo D, que é o mais simples.

Modelo D

No Modelo D, pressupõe-se $Var(\xi_i - \eta_j) = 1$ para qualquer par (i, j). Assim, obtém-se

$$E(g(\hat{\pi}_{ij})) = \tau_j - \mu_i \tag{7}$$

ou, em forma matricial

$$E(G(\hat{\pi})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{m-1} \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{pmatrix} \tag{8}$$

O Modelo D em (7) não é identificado, pois a matriz de delineamento em (8) não tem posto coluna completo. Porém, todos os contrastes que envolvem os μ_i são estimáveis. Como estamos principalmente interessados nas comparações de pares de parâmetros, pode-se, sem qualquer perda de generalidade, impor a restrição

$$\sum_i \mu_i = 0 \tag{9}$$

Sob (9), o método de estimação apropriado é o de mínimos quadrados generalizados restritos. A bondade do ajuste (*goodness of fit*) pode ser avaliada pela soma de quadrados residual que, sob a hipótese de que o modelo seja apropriado, tem distribuição qui-quadrado, com $(r-1)(m-2)$ graus de liberdade. Esse é o teste proposto por Grizzle et al. (1969).

Modelo B

O Modelo B pressupõe $Var(\xi_i - \eta_j) = \delta_i^2$. Essa suposição gera o modelo de regressão não-linear

$$g(\hat{\pi}_{ij}) = -\frac{\mu_i - \tau_j}{\delta_i} + u_{ij} \tag{10}$$

Note-se que se deve ter $2r + m - 3 \leq r(m-1)$, isto é, o número de parâmetros deve ser no máximo igual ao número de observações.

Para identificar o Modelo B, impõem-se as duas restrições seguintes:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\delta_i} = r \text{ e } \sum_{i=1}^{r} \frac{\mu_i}{\delta_i} = 0 \tag{11}$$

Essas condições são conhecidas como restrições de Torgerson (1958) e generalizam a restrição (9) imposta no caso linear.

Conjuntos alternativos de restrições aparecem na literatura. Torgenson (1958), por exemplo, segue Gulliksen (1954) e impõe $\sum_j \tau_j = 0$ e $\sum_j \tau_j^2 = m-1$. Neste artigo, considera-se somente as restrições de Torgerson, uma vez que parecem ser mais naturais como generalização do Modelo D $(\delta_i = 1)$. Em alguns casos, porém, as restrições do tipo de Gulliksen podem ser mais fáceis de se impor. Vale a pena mencionar que o Modelo B é análogo à Equação 5.4 de MacCullagh & Nelder (1989, pág. 154) com a reparametrização $\delta_i = \exp(\omega_i)$.

Seja $\eta_i = 1/\delta_i$, $\gamma_i = \mu_i/\delta_i$ e

$$\beta = \left(\eta_1\tau_1, \ldots, \eta_1\tau_{m-1}, \ldots, \eta_r\tau_1, \ldots, \eta_r\tau_{m-1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_r\right)'$$

então, (10) pode ser escrito equivalentemente como

$$E(G(\hat{\pi})) = [I, A]\beta \qquad (12)$$

em que I é a matriz identidade de ordem $r(m-1)$ e A é a concatenação vertical dos r blocos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

cada um de dimensão $(m-1)r$.

Pode-se estimar o Modelo B utilizando-se mínimos quadrados não-lineares restritos. Como mencionado anteriormente, avalia-se a bondade de ajuste por meio do teste de qui-quadrado de Grizzle et al. (1969).

Valores iniciais convenientes para a estimação não-linear são obtidos fazendo $\delta_i = 1$ e utilizando-se as estimativas do Modelo D para os parâmetros μ_i e τ_j.

Modelo C

No Modelo C, postula-se $Var(\xi_i - \eta_j) = \theta_j^2$. De (2) obtém-se o modelo de regressão não-linear

$$g(\hat{\pi}_{ij}) = -\frac{\mu_i - \tau_j}{\theta_j} + u_{ij} \qquad (13)$$

As condições de identificação para o Modelo C são

$$\sum_{j=1}^{m-1} \theta_j = m - 1 \text{ e } \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\tau_j}{\theta_j} = 0. \qquad (14)$$

Essas restrições são duais de (11).

Obviamente, o Modelo C também generaliza o Modelo D, embora nenhuma restrição seja imposta aos parâmetros μ_i. O número efetivo de parâmetros $(r + 2m)$ presentes no Modelo C deve ser menor ou igual a $r(m-1)$. Como no Modelo B, a estimativa de contrastes é dependente das restrições impostas.

Seja $\eta_j = 1/\theta_j$ e $\gamma_j = \tau_j/\theta_j$. Então, de (13),

$$g(\pi_{ij}) = -\mu_i\eta_j + \gamma_j + u_{ij}$$

Segue que (13) é equivalente a

$$E(G(\hat{\pi})) = [-I, A]\beta \tag{15}$$

em que

$$\beta = \left(\mu_1\eta_1, \ldots, \mu_1\eta_{m-1}, \ldots, \mu_r\eta_1, \ldots, \mu_r\eta_{m-1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}\right)'$$

e A é a concatenação vertical de r blocos, cada um definido pela matriz identidade de ordem $m-1$.

O Modelo C também é não-linear, e o algoritmo de otimização que leva à solução de mínimos quadrados generalizados exige valores iniciais para os parâmetros. Esses são obtidos tomando $\theta_j = 1$ e usando para μ_i o valor da média da i-ésima linha da matriz $(g(\hat{\pi}_{ij}))$ e para τ_j o desvio da média da coluna j relativo à média geral da matriz.

Se não houver observações (repetições) suficientes para estimar as probalidades π_{ij}, pode-se apelar para o estimador de máxima verossimilhança como substitutivo dos mínimos quadrados generalizados. Tal circunstância ocorre, por exemplo, quando alguma casela da tabela de contingência apresenta freqüência nula e as funções de ligação habituais não podem ser calculadas. Alerta-se desde já que tabelas de contingência esparsas representam problemas para estimação em ambos os métodos. MacCullagh & Nelder (1989) se referem a uma tabela como esparsa quando uma proporção grande de freqüências das caselas da tabela são pequenas, isto é, menores que 5. Nessas situações, como também no caso extremo da existência de freqüências nulas, o problema pode ser parcialmente contornado somando-se constantes pequenas às freqüências das caselas problemáticas. Alguns métodos de fazer isso são descritos em Forthofer & Lehnen (1981). Essa técnica é absolutamente necessária para o uso de mínimos quadrados generalizados com tabelas apresentando freqüências nulas.

Para a abordagem de máxima verossimilhança, supõe-se que os totais m_i das linhas da tabela de contingência subjacente sejam fixos. Seja y_{ij} a freqüência observada na casela (i,j), a função de verossimilhança para a tabela de contingência é dada por

$$\sum_{i=1}^{r} \ln\left(\frac{m_i\,!}{y_{i1}\,!\ldots y_{im}\,!}\right)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}\ln\ (p_{ij}) \qquad (16)$$

em que $p_{im}=1-\sum_{j=1}^{m-1}p_{ij}$ para todo i. Por exemplo, para fixar idéias, no Modelo B tem-se:

$$p_{i1}=g^{-1}\left(\frac{\tau_1-\mu_i}{\delta_i}\right) \text{ e } p_{ij}=g^{-1}\left(\frac{\tau_j-\mu_i}{\delta_i}\right)-g^{-1}\left(\frac{\tau_{j-1}-\mu_i}{\delta_i}\right) j=2,\ldots,m-1 \qquad (17)$$

Busca-se maximizar a expressão $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}\ln(p_{ij})$ em (16), com respeito a μ_i, δ_i, e τ_j, sujeitos a (17) e às restrições de Torgerson. De agora em diante, essa expressão será referida como log-verossimilhança.

Os resultados clássicos inferenciais que dizem respeito ao estimador de máxima verossimilhança se aplicam no presente contexto, e a análise de *deviance* (MacCullagh & Nelder, 1989) é a chave para a avaliação da bondade do ajuste e, portanto, para determinar a melhor alternativa de modelagem (Modelo B, C ou D) para as percepções dos juízes.

Abordagem Clássica para a Lei dos Julgamentos Categóricos

A abordagem clássica de estimativa para a Lei dos Julgamentos Categóricos se restringe a determinação de soluções para o sistema de equações (1) quando se substitui π_{ij} por $\hat{\pi}_{ij}$, sob as condições subjacentes dos Modelos D, B ou C. A abordagem é essencialmente de método de momentos. Os estimadores de método de momentos são calculados como segue. Suponha que não haja nenhuma freqüência nula em qualquer casela e seja $Z = (\hat{z}_{ij})$ a matriz com os valores do *probit* ou de qualquer outra função de ligação, isto é, $\hat{z}_{ij} = g\,(\hat{\pi}_{ij})$.

Represente por $\bar{z}_{i.}$ e $\tilde{z}_{i.}$ a média e o desvio-padrão da i-ésima linha de Z, respectivamente. Represente por $\bar{z}_{.j}$ e $\tilde{z}_{.j}$ essas mesmas quantidades para a jésima coluna de Z. Seja d o desvio-padrão das médias $\bar{z}_{.j}$, e o desvio-padrão das médias $\bar{z}_{i.}$ e $\bar{z}_{..}$ a média geral de Z.

Para o Modelo D, a solução de (1) sujeito a (9) é determinada por

$$\hat{\mu}_i = -\bar{z}_{i.} + \bar{z}_{..}, \quad \hat{\tau}_j = \bar{z}_{.j}. \tag{18}$$

Essa solução também minimiza a soma de quadrados residual para o modelo (8) com o uso de mínimos quadrados ordinários.

Para o Modelo B, a solução de (1) sujeito a (11) é determinada por

$$\hat{\tau}_j = \bar{z}_{.j}, \hat{\delta}_i = d/\tilde{z}_{i.}, \quad \hat{\mu}_i = \bar{z}_{..} - \hat{\delta}_i \bar{z}_{i.} \tag{19}$$

Note-se que, quando $2r + m - 3 = r(m-1)$, as estimativas de mínimos quadrados generalizados e de método de momentos são coincidentes, pois a soma de quadrados residual correspondentes se anula quando avaliada nas estimativas de método de momentos.

Os estimadores de método de momentos para o Modelo C são duais dos do Modelo B. São dados por

$$\hat{\theta}_j = e/\tilde{z}_{.j}, \hat{\mu}_i = -\bar{z}_{i.}, \hat{\tau}_j = -\bar{z}_{..} + \hat{\theta}_j \bar{z}_{.j} \tag{20}$$

Quando $r+2m=r(m-1)$, as estimativas de mínimos quadrados generalizados e de método de momentos são iguais.

As variâncias dos estimadores (18), (19) e (20) podem ser calculadas usando o fato de que as quantidades envolvidas nas expressões desses estimadores são todas funções de $z_{ij}=g(\pi_{ij})$. As variâncias são então determinadas por meio de expressões da forma $L\hat{V}L'$, em que L é uma matriz com cada linha definida por um vetor gradiente e $\hat{V}$ é como em (5). Seja π o vetor de parâmetros populacionais correspondente a $\hat{\pi}$ de (3). Para o Modelo D, L tem linhas $\partial\hat{\mu}_i/\partial\pi'$ e $\partial\hat{\tau}_j/\partial\pi'$. Os elementos típicos desses gradientes são

$$\frac{\partial\hat{\mu}_i}{\partial z_{vl}}=\begin{cases}-\dfrac{r-1}{r(m-1)} & \text{se } i=v\\[2ex] \dfrac{1}{r(m-1)} & \text{se } i\neq v\end{cases} \tag{21}$$

e

$$\frac{\partial\hat{\tau}_j}{\partial z_{vl}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r} & \text{se } j=l\\ 0 & \text{se } j\neq l\end{cases} \tag{22}$$

Para o Modelo B, L tem linhas $\partial\hat{\mu}_i/\partial\pi'$, $\partial\hat{\delta}_i/\partial\pi'$ e $\partial\hat{\tau}_j/\partial\pi'$. Os elementos típicos desses vetores são

$$\frac{\partial\hat{\mu}_i}{\partial z_{vl}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r(m-1)}-\dfrac{\hat{\delta}_i}{m-1}-\bar{z}_{i.}\left[\dfrac{\bar{z}_{.l}-\bar{z}_{..}}{r(m-2)d\,\bar{z}_{i.}}-\dfrac{d\,(z_{il}-\bar{z}_{i.})}{(m-2)(\bar{z}_{i.})^3}\right] & \text{se } v=i\\[2ex] \dfrac{1}{r(m-1)}-\bar{z}_{i.}\dfrac{\bar{z}_{.l}-\bar{z}_{..}}{r(m-2)d\bar{z}_{i.}} & \text{se } v\neq i\end{cases} \tag{23}$$

$$\frac{\partial\hat{\delta}_i}{\partial z_{vl}}=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}_{.l}-\bar{z}_{..}}{r(m-2)d\,\bar{z}_{i.}}-\dfrac{d\,(z_{il}-\bar{z}_{i.})}{(m-2)\;(\bar{z}_{i.})^3} & \text{se } v=i\\[2ex] \dfrac{\bar{z}_{il}-\bar{z}_{..}}{r(m-2)\bar{z}_{i.}} & \text{se } v\neq i\end{cases} \tag{24}$$

e

$$\frac{\partial\hat{\tau}_j}{\partial z_{vl}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r} & \text{se } j=l\\ 0 & \text{se } j\neq l\end{cases} \tag{25}$$

respectivamente. Para o modelo C, L tem linhas $\partial\hat{\mu}_i/\partial\pi'$, $\partial\hat{\delta}_i/\partial\pi'$ e $\partial\hat{\tau}_j/\partial\pi'$. Os elementos típicos desses vetores são

$$\frac{\partial \hat{\mu}_i}{\partial z_{vl}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m-1} & \text{se } v = i \\ 0 & \text{se } v \neq i \end{cases} \tag{26}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_j}{\partial z_{vl}} = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}_{.l}\left(\bar{z}_{v.} - \bar{z}_{..}\right)}{(r-1)(m-1)\, e\,(\bar{z}_{.l})^2} - \dfrac{e\,(z_{vl} - \bar{z}_{.l})}{(n-1)(\bar{z}_{.l})^3} & \text{se } j = l \\ -\dfrac{\bar{z}_{v.} - \bar{z}_{..}}{(r-1)\,(m-1)\, e\bar{z}_{.j}} & \text{se } j \neq l \end{cases} \tag{27}$$

e

$$\frac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial z_{vl}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{r(m-1)} + \dfrac{\hat{\theta}_l}{r} - \bar{z}_{.l}\left[\dfrac{\bar{z}_{v.} - \bar{z}_{..}}{(r-1)(m-1)\, e\bar{z}_{.j}} + \dfrac{e\left(z_{vl} - \bar{z}_{.l}\right)}{(r-1)\left(\bar{z}_{.l}\right)^3}\right] & \text{se } j = l \\ -\bar{z}_{.l}\dfrac{\bar{z}_{v.} - \bar{z}_{..}}{(r-1)(m-1)_{e\bar{z}_{.j}}} - \dfrac{1}{r(m-1)} & \text{se } j \neq l \end{cases} \tag{28}$$

Nenhum teste estatístico formal aparece na abordagem clássica. A medida de bondade de ajuste sugerida em aplicações diz respeito à habilidade dos modelos em reproduzir as probabilidades observadas $\hat{p}_{ij}$. A medida de bondade é dada pelo desvio absoluto médio

$$\text{mad} = \frac{1}{rm}\sum_{ij}\left|\tilde{p}_{ij} - \hat{p}_{ij}\right| \tag{29}$$

em que $\tilde{p}_{ij}$ é uma estimativa baseada no modelo.

Pode-se calcular as estatísticas e os estimadores associados ao método de mínimos quadrados generalizados para os Modelos D, B e C com o uso do SAS[1] por intermédio dos procedimentos PROC IML, PROC MODEL, PROC NLIN e PROC NLMIXED. Primeiramente, calcula-se a decomposição de Cholesky de $\hat{V}^{-1}$ determinando-se uma matriz R tal que $\hat{V}^{-1} = R'R$. Utiliza-se R para colocar o modelo original na forma

$$RG\left(\hat{\pi}\right) = RX\beta + Ru$$

em que X é matriz de design definida em (8), (12) ou (15), dependendo do modelo sob estudo. Com o vetor de respostas transformadas $RG\left(\hat{\pi}\right)$ e a matriz de design RX, pode-se utilizar os procedimentos PROC MODEL OU PROC NLIN para ajustar a regressão, tomando o cuidado de impor as restrições na equação do modelo no caso de se usar o PROC NLIN.

Começa-se com o Modelo D. Este é linear e fornece valores iniciais para o Modelo B. Os desvios-padrão exibidos pelo PROC MODEL necessitam de ajustes, pois a soma de quadrados residuais

[1] Uma macro SAS com respectivo manual está disponível. Contate o autor em Geraldo.Souza@embrapa.br.

não é unitária. O PROC NLIN permite a escolha da opção SIGMASQ=1 e fornece os desvios corretos, mas exige cálculos adicionais para a determinação dos desvios-padrão dos parâmetros omitidos do modelo no processo de impor as restrições do modelo.

Para o método de máxima verossimilhança, note-se que a função objetivo a ser maximizada é negativa e, portanto, pode-se achar seu máximo minimizando-se seu simétrico. Desse modo, se definirmos a função resposta do modelo como sendo a raiz quadrada de duas vezes o negativo da função de verossimilhança de cada estímulo, e tomando como variável resposta a constante zero, então a quantidade a ser minimizada é precisamente a soma de quadrados residual para o modelo não-linear correspondente. Pode-se utilizar o PROC NLIN para computar o mínimo com as opções SIGMASQ=1 e METHOD=NEWTON. Outra alternativa mais eficiente e fácil para obter os estimadores de máxima verossimilhança é dada pelo PROC NLMIXED. Para o PROC NLMIXED, deve-se utilizar a mesma variável resposta com valor nulo e a forma original da função de verossimilhança.

A abordagem da verossimilhança na versão linear da Lei dos Julgamentos Categóricos é um caso particular dos modelos lineares mais gerais que o PROC GENMOD pode analisar. Verifique-se a documentação do SAS-STAT versão 8. A parametrização utilizada no PROC GENMOD é a proposta em MacCullagh & Nelder (1989, Capítulo 5) e difere de (9), mas produz as mesmas estimativas dos contrastes de interesse.

As fórmulas associadas às estimativas de método de momento (18)-(20) e respectivos desvios-padrão que dependem de (21)-(28) podem ser computados sem muito esforço no PROC IML.

Um exemplo

A tabela de contingência definida na Tabela 1 mostra as freqüências de respostas às categorias ordinais 1, 2, 3, 4, e 5 de cinco estímulos, A, B, C, D e E. O exemplo consta de Torgerson (1958, pág. 211). Leva-se a efeito a análise dos dados da Tabela 1 ajustando-se os modelos B, C e D com o uso da função de ligação *probit* e das técnicas de estimação de método de momentos, mínimos quadrados generalizados e máxima verossimilhança. A transformação *probit* fornece os melhores resultados, embora não se possa rejeitar a alternativa logística e a log-log.

Tabela 1. Freqüências das respostas aos estímulos.

Estímulo/ Resposta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
A	100	38	49	11	2	200
B	84	27	47	23	19	200
C	13	32	110	39	6	200
D	62	14	32	23	69	200
E	4	9	49	58	80	200
Total	263	120	287	176	176	1.000

Na Tabela 2, mostra-se o valor do desvio absoluto médio (mad) de cada um dos modelos.

Tabela 2. Estatística de ajuste – (mad,) para os estimadores de método de momentos (MM), máxima verossimilhança (MV) e mínimos quadrados generalizados (MQG).

Método/Modelo	D	B	C
Momentos	0.064	0.002	0.074
MV	0.062	0.001	0.058
MQG	0.065	0.001	0.060

Obviamente, o Modelo B é o que apresenta o melhor ajuste. No ajuste do Modelo B, as técnicas de método de momentos, mínimos quadrados generalizados e de máxima verossimilhança produzem resultados essencialmente equivalentes. Os métodos de mínimos quadrados generalizados e de máxima verossimilhança só são ligeiramente superiores ao método de momentos.

Testes formais de especificação devem ser levados a efeito no contexto dos métodos de mínimos quadrados generalizados e de máxima verossimilhança. A Tabela 3 mostra as estatísticas adequadas para esse fim. O Modelo B é o único não rejeitado pelo teste do qui-quadrado de Grizzle et al. (1969).

Tabela 3. Estatísticas de ajuste para os métodos de mínimos quadrados generalizados (MQG) e máxima verossimilhança.

Modelo	gl	SQ Residual MQG	$-\sum_{ij} y_{ij} \ln\left(p_{ij}\right)$	Deviance
D	12	170.514	1413.316	174.840
B	8	0.160	1325.978	0.164
C	9	159.369	1412.012	172.232

Esses resultados concordam com as estatísticas da Tabela 2. No contexto da técnica de máxima verossimilhança, é interessante observar que o valor da estatística do qui-quadrado generalizado de Pearson para o Modelo B é 0,179 e que a superdispersão não ocorre. O modelo B é o único modelo com valores aceitáveis da *deviance*.

Os resultados do processo de estimação para o Modelo B aparecem na Tabela 4. Como esperado, os menores desvios-padrão decorrem das estimativas de mínimos quadrados generalizados e de máxima verossimilhança.

O interesse principal na análise dos dados da Tabela 1 está na classificação dos estímulos A, B, C, D e E. Observando-se os valores de escala estimados $\hat{\mu}_i$ na Tabela 4, conclui-se que a ordem induzida é E>D>C>B>A. Na Tabela 5, mostram-se os contrastes entre os pares de estímulos. O propósito da tabela é avaliar a existência de diferenças reais na ordenação dos estímulos. No nível de 5%, a única diferença não significante é D-C. O contraste B-A é um caso limite.

Medida Relativa de Intensidade

Usualmente, conclui-se a análise do modelo thurstoniano da Lei dos Julgamentos Categóricos com o estudo da significância estatística da diferença $\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j$ para todo par de estímulos (S_i, S_j). Essa

Tabela 4. Estimativas para o Modelo B segundo os métodos de momentos (MM), de máxima verossimilhança (MV), e de mínimos quadrados generalizados (MQG). Valores entre parênteses representam desvios-padrão.

Parâmetro	MM	MV	MQG
$\hat{\tau}_1$	-0.853 (0.058)	-0.847 (0.053)	-0.847 (0.053)
$\hat{\tau}_2$	-0.388 (0.046)	-0.388 (0.045)	-0.388 (0.045)
$\hat{\tau}_3$	0.536 (0.047)	0.537 (0.046)	0.537 (0.046)
$\hat{\tau}_4$	1.234 (0.073)	1.225 (0.064)	1.225 (0.064)
$\hat{\delta}_1$	0.889 (0.082)	0.908 (0.068)	0.909 (0.068)
$\hat{\delta}_2$	1.381 (0.114)	1.370 (0.107)	1.370 (0.107)
$\hat{\delta}_3$	0.614 (0.033)	0.611 (0.030)	0.611 (0.030)
$\hat{\delta}_4$	2.322 (0.242)	2.314 (0.234)	2.315 (0.234)
$\hat{\delta}_5$	0.906 (0.069)	0.909 (0.064)	0.909 (0.0640
$\hat{\mu}_1$	-0.841 (0.184)	-0.844 (0.079)	-0.844 (0.079)
$\hat{\mu}_2$	-0.577 (0.178)	-0.572 (0.104)	-0.571 (0.104)
$\hat{\mu}_3$	0.076 (0.066)	0.075 (0.047)	0.075 (0.047)
$\hat{\mu}_4$	0.308 (0.405)	0.305 (0.170)	0.304 (0.170)
$\hat{\mu}_5$	0.995 (0.091)	0.993 (0.076)	0.993 (0.076)

Tabela 5. Contrastes $\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_v$ para o Modelo B via mínimos quadrados generalizados.

Contraste	Estimativa	Desvio-padrão	z
B-A	0.273	0.137	1.993
C-A	0.919	0.093	9.882
D-A	1.148	0.198	5.798
E-A	1.837	0.110	16.700
C-B	0.646	0.121	5.339
D-B	0.875	0.213	4.108
E-B	1.564	0.135	11.585
D-C	0.229	0.188	1.218
E-C	0.918	0.091	10.088
E-D	0.689	0.196	3.515

é a idéia por trás do processo de escalagem sugerido por Thurstone – transformar a escala ordinal induzida pela percepção dos juízes em uma escala intervalar que permita o acesso à diferença entre dois estímulos quaisquer. Em algumas aplicações, contudo, uma análise adicional pode ser necessária. Pode ser de interesse medir a importância relativa dos estímulos por meio de um conjunto de pesos com soma um. Essa possibilidade torna a análise comparável ao processo hierárquico analítico de Saaty (1994), que também se utiliza de um sistema de pesos relativos para classificar os estímulos. A definição de pesos que reflitam a importância relativa de cada variável de um conjunto predeterminado, segundo as percepções de um grupo de árbitros, caracteriza um método conveniente para a determinação de uma medida combinada de desempenho, quando os estímulos estão definidos por variáveis que compõem a dimensão de desempenho. Um exemplo desse tipo de aplicação pode ser visto em Souza e Ávila (2000), em que um conjunto de pesos é definido com o propósito de especificar uma medida combinada de produção associada ao processo de produção de uma instituição de pesquisa.

Com a motivação do Modelo D e sob a hipótese de que o contínuo psicológico seja a projeção da distribuição log-normal, define-se a importância relativa de estímulo i como sendo

$$r_i = \frac{\exp(\mu_i)}{\sum_{v=1}^{r} \exp(\mu_v)} \tag{30}$$

Vê-se de (30) que as razões de importância relativa r_i/r_j são transformações monotônicas dos contrastes $\mu_i - \mu_j$ e portanto produzem análises estatísticas equivalentes.

Note-se que, sob a hipótese de projeção lognormal, isto é, supondo que $\ln(\xi_i)$ tem distribuição $N(\mu_i,\sigma)^2$ e $\ln(\eta_j)$ tem distribuição $N(\tau_j,\phi^2)$, os r_i representam as razões relativas das médias das variáveis aleatórias ξ_i. Em termos das probalidades π_{ij} e pressupondo as equações de momento (1), os pesos r_i podem ser expressos como segue:

$$r_i = \frac{\exp(-g(\pi_{ij}))}{\sum_{v=1}^{r} \exp(\ g(\pi_{vj}))} \qquad \text{para o Modelo D,}$$

$$r_i = \frac{\exp(-\delta_i g(\pi_{ij}))}{\sum_{v=1}^{r} \exp(-\delta_v g(\pi_{vj}))} \qquad \text{para o Modelo B,} \tag{31}$$

$$r_i = \frac{\exp(-\tau_j g(\pi_{ij}))}{\sum_{v=1}^{r} \exp(-\tau_v g(\pi_{vj}))} \qquad \text{para o Modelo C.}$$

Note-se que, em qualquer caso, isto é, para qualquer estímulo i, na realidade não há dependência da razão de intensidade r_i em j. As fórmulas apresentadas em (31) são particularmente atrativas para a função de ligação logística quando se tornam funções simples de *odds ratios*. Esse fato fornece uma motivação adicional para seu uso como uma medida da intensidade relativa de um estímulo. A fim de ilustrar esse fato com a transformação logística, note-se que

$$r_i = \frac{\frac{1-\pi_{ij}}{\pi_{ij}}}{\sum_{v=1}^{r}\left(\frac{1-\pi_{vj}}{\pi_{vj}}\right)} \quad \text{para o modelo D},$$

$$r_i = \frac{\left(\frac{1-\pi_{ij}}{\pi_{ij}}\right)^{\delta_i}}{\sum_{v=1}^{r}\left(\frac{1-\pi_{vj}}{\pi_{vj}}\right)^{\delta_v}} \quad \text{para o Modelo B}, \qquad (32)$$

$$r_i = \frac{\left(\frac{1-\pi_{ij}}{\pi_{ij}}\right)^{\theta_j}}{\sum_{v=1}^{r}\left(\frac{1-\pi_{vj}}{\pi_{vj}}\right)^{\theta_j}} \quad \text{para o Modelo C}.$$

De (32) vê-se que, para o Modelo D, quanto maior $r_i = \exp(\mu_i)/\sum_v \exp(\mu_v)$, maior é a probabilidade de classificar S_i nas categorias de resposta superiores, aumentando portanto sua importância. Para os Modelos B e C, essencialmente a mesma conclusão se aplica com as probabilidades, sendo ponderadas por medidas de escala apropriadas.

As variâncias das medidas de importância relativa $\hat{r}_i$ podem ser facilmente calculadas expandindo-se as estimativas em séries de Taylor. As variâncias são dadas pelas quantidades $l'_i \operatorname{Var}(\hat{\mu}) l_i$, em que l_i tem componentes l_{iv}, $v = 1,\dots,r$, sendo

$$l_{iv} = \begin{cases} \hat{r}_i(1-\hat{r}_i) & \text{se } v = i \\ -\hat{r}_i \hat{r}_v & \text{se } v \neq i \end{cases} \tag{33}$$

Na Tabela 6, mostram-se as intensidades relativas dos estímulos (30) juntamente com os desvios-padrão derivados de (33). A mensagem é a mesma veiculada pelas estimativas $\hat{\mu}_i$. Se os estímulos

Tabela 6. Intensidades $r_i = \exp \mu_i / \sum_v \exp \mu_v$ para o Modelo B via mínimos quadrados generalizados.

Estímulo	Intensidade	Desvio-padrão
A	0.070	0.006
B	0.092	0.011
C	0.176	0.012
D	0.221	0.032
E	0.441	0.027

representassem variáveis de desempenho, os pesos poderiam ser usados para definir uma medida combinada de desempenho que leva em conta a importância relativa de cada variável de acordo com a percepção da população de juízes.

Conclusão

Reviu-se a Lei dos Julgamentos Categóricos derivada do trabalho de Thurstone (1927). O método clássico de solução desse sistema de equações foi abordado e os desvios-padrão dos estimadores foram caracterizados sob suposições gerais para a distribuição subjacente no contínuo psicológico. As duas desvantagens principais do método clássico têm a ver com a ineficiência assintótica das estimativas de método de momentos e com a falta de um arcabouço estatístico que viabilize o teste de adequabilidade das formulações distintas propostas por Thurstone. Nesse contexto, sugere-se o uso de instrumentos mais adequados de análise, como os métodos de máxima verossimilhança e de mínimos quadrados generalizados.

Uma medida de importância relativa foi proposta para avaliar a intensidade de cada estímulo. Essas quantidades servem ao propósito de definir um sistema de pesos com soma um que pode ser usado na definição de uma medida combinada de desempenho em algumas aplicações.

Um problema importante ignorado até agora na discussão da Lei dos Julgamentos Categóricos aqui levada a efeito é o fato de que as observações que correspondem a estímulos diferentes podem não ser independentes. Em muitas aplicações, o mesmo conjunto de árbitros avalia cada estímulo. Esse fato não invalida nenhum dos métodos de estimação, mas é provável que induza uma correlação positiva entre as avaliações de dois estímulos quaisquer. O efeito da correlação positiva é reduzir a variância do contraste entre os dois estímulos e, nesse contexto, a análise pode ser considerada conservativa, uma vez que os desvios-padrão são superestimados.

Tipicamente, a Lei dos Julgamentos Categóricos em uma das formas D, B ou C fornece um ajuste adequado. Os três métodos de estimação produzem resultados robustos relativamente à distribuição postulada no contínuo psicológico. Conclusões semelhantes são obtidas considerando-se as escalas *probit*, logística ou log-log.

Referências

FOTHOFER, R. N. ; LEHNEN, R. G. **Public program analysis.** A new categorical data approach. Belmont: Wadsworth, 1981.

GRIZZLE, J. E.; STAMER, C. F.; KOCH, G. G. Analysis of categorical data by linear models. **Biometrics**, v.24, p. 489-504, 1969.

GULLIKSEN, H., A least squares solution for successive intervals assuming unequal standard deviations. **Psychometrika**, v.19, p. 177-139, 1954.

KOTZ, N.; JOHNSON, L., Thurstone's theory of comparative judgment. **ENCYCLOPEDIA** of Statistical Sciences. New York: Wiley, 1989. v. 9, p. 237-239.

MACEDO, M. M. C. **The process of agricultural technology generation in Brazil**: a social study, 1997.Dissertação (Doutorado – University Sussex, England). Sussex, 1997.

MAYDEU-OLIVARES, A. **Limited information estimation and testing of Thurstonian models for preference data**. Working Paper.Barcelona: Department of Psychology, University of Barcelona. Aceito para publicação em Psychometrika.

MAYDEU-OLIVARES, A., Thurstonian modeling of ranking data via mean and covariance structure analysis, **Psychometrika**, v.64, n. 3, p. 325-340, 1999.

MCFADDEN, D. Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. In: ZAREMBKA, P. (Ed.). **Frontiers in Econometrics**, New York: Academic Press, 1974.

MCCULLAGH, P.; NELDER, J. A. **Generalized linear models**. 2nd ed. New York: Chapman & Hall, 1989.

ROUSSEAU, B.;ROGEAUX, M.; O'MAHONY, M. Mustard discrimination by same-different and triangle tests: aspects of irritation, memory and criteria**. Food Quality and Preference**, v.10, p. 173-184, 1999.

SAATY, T. L.. **The analytic hierarchy process**. Pittsburgh: RWS, 1994.

SOUSA, I. S. F. **A sociedade, o cientista e o problema de pesquisa**. Brasília: Embrapa; São Paulo: Hucitec, 1993.

SOUZA, G. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. Brasília: Embrapa, 1998.

SOUZA, G.; ÁVILA, F. D. A., A Psicometria linear da escalagem ordinal: uma aplicação na caracterização da importância relativa de atividades de produção em ciência e tecnologia. **Cadernos de Ciência e Tecnologia**, v.17,n.3, p.11-27, 2000.

SOUZA, J. **Métodos de escalagem psicossocial**. Brasília: Thesaurus, 1988.

THURSTONE, L. L., A law of comparative judgments. **Psychological Review**, v.34, p.273-286, 1927.

TORGERSON, W. S. **Theory and methods of scaling**. New York: Wiley, 1958.

TUROFF, M. ; HILTZ, S. R. Computer based delphi processes. In: ADDLER, M. ; ZIGLIO,

E. **Gazing into the oracle**: The Delphi method and its applications to social public health, London: Kingsley Publishers, 1996.

Embrapa

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
Secretaria de Administração Estratégica

Texto para Discussão

Ministério da Agricultura,
Pecuária e Abastecimento