Eliseu Alves

# Teoria da Produção

## Métodos não paramétricos

Embrapa

*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária*
*Secretaria de Gestão e Estratégia*
*Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento*

# Teoria da Produção

## Métodos não paramétricos

*Eliseu Alves*

**Embrapa Informação Tecnológica**
*Brasília, DF*
*2008*

Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:

**Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária**
**Secretaria de Gestão e Estratégia**
Parque Estação Biológica (PqEB),
Av. W3 Norte (final)
CEP 70770-901 Brasília, DF
Fone: (61) 3448-4466
Fax: (61) 3347-4480

Coordenação editorial: *Fernando do Amaral Pereira*
*Mayara Rosa Carneiro*
*Lucilene Maria de Andrade*

Revisão de texto: *Wesley José da Rocha*
Normalização bibliográfica: *Vera Viana dos Santos*
Projeto gráfico e editoração eletrônica: *José Batista Dantas*
Capa: *Carlos Eduardo Felice Barbeiro*

**1ª edição**
1ª impressão (2008): 1.000 exemplares



**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
Embrapa Informação Tecnológica

---

Alves, Eliseu
Teoria da produção: métodos não paramétricos / Eliseu Alves. – Brasília, DF : Embrapa Informação Tecnológica, 2008.
87 p. ; 22 cm.

ISBN 978-85-7383-439-0

1. Economia. 2. Matemática. 3. Método estatístico. I. Título.
CDD 519.5

---

# Autor

**Eliseu Alves**
Pesquisador da Embrapa e assessor do Diretor-Presidente.

# Agradecimentos

Agradeço as colaborações de Antônio Jorge de Oliveira, da SGE/Embrapa, que revisou os originais e cujas sugestões melhoraram a apresentação do texto, e de Wesley José da Rocha, que corrigiu inconsistências de digitação. Agradeço também ao Evandro Mantovani, chefe da SGE, pelo apoio à edição do livro.

# Apresentação

Eliseu Alves é grande estudioso de Economia e um dos principais responsáveis pela reformulação da pesquisa agropecuária do Brasil. Seu empenho na contribuição para o desenvolvimento do setor agrícola brasileiro, fundamentado em suas atividades como engenheiro agrônomo e economista, serve para destacar também seu interesse em promover a correta aplicação dos fundamentos econômicos. Munido de incansável espírito e de capacidade de ação, fortaleceu a compreensão da disciplina de economia por meio de obras que tornaram seus fundamentos acessíveis, organizados e de fácil entendimento – *A Função Custo*, publicada em 1996, é um exemplo.

Complementando esse esforço, agora publica *Teoria da Produção – Métodos Não Paramétricos*, obra na qual descreve e organiza os fundamentos para a compreensão da estrutura de produção sem a necessidade de estimar a função custo ou a função de produção. Seu conteúdo versa sobre as condições que tornam os dados coletados de produtores agrícolas coerentes com as hipóteses que minimizam o custo de produção ou maximizam a renda líquida do agricultor. Nessa linha, desenvolve e demonstra os principais teoremas que envolvem os critérios custo e renda líquida, as funções especializadas, os números de Afriat e as questões relativas à existência de insumos fixos e à presença de incerteza. Na parte final, apresenta os procedimentos para os testes de hipóteses e orientações de uso de um programa computacional para o teste da hipótese de Varian.

O teor desta obra e o histórico do autor tornam *Teoria da Produção – Métodos Não Paramétricos* leitura recomendável a todos os estudiosos de Economia.

*Antônio Jorge de Oliveira*
Pesquisador da Embrapa

# Sumário

# Introdução

Este trabalho discute os métodos não paramétricos segundo a visão de Varian. Os teoremas enunciados são demonstrados, mesmo aqueles cuja demonstração foi omitida nos textos mais conhecidos. A base do desenvolvimento são artigos de Varian, principalmente Varian (1984).

Responde-se à pergunta "Que condições as observações coletadas devem satisfazer para serem geradas por produtores racionais?", e o trabalho define o que se entende por racionalidade.

Esforçou-se por tornar a apresentação o mais simples possível. Para facilitar ao leitor, alguns teoremas pertinentes à análise convexa são demonstrados.

Imagina-se que se tem n agricultores que geraram n vetores, e estes contém observações do tipo $(p^i, w^i, x^i, y^i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Os preços de produtos e insumos são, respectivamente, $p$'s e $w$'s. As quantidades de insumos usadas e a produção obtida são, respectivamente, representadas por $x$'s e $y$'s. Nota-se que é permitido os preços variarem de produtor para produtor. É importante salientar que não existem erros de medições, e a escolha pode envolver risco.

Admitindo-se que os agricultores minimizem o custo de produção ou, então, maximizam a renda líquida, procura-se encontrar as condições que os dados devem satisfazer para serem coerentes com esta hipótese, sem a necessidade de estimar-se a função custo ou a função de produção. Daí a denominação de *métodos não paramétricos*. Estabelecem-se condições para a existência de uma estrutura de produção que racionaliza as observações. Esta estrutura pode ser um conjunto de produção ou uma função de produção. Verifica-se também que condições se impõem aos dados para que a função de produção seja linearmente homogênea, ou homotética, ou separável.

De início, apresentam-se alguns lemas que são importantes no desenvolvimento da matéria. Os lemas também têm importância em outras áreas da economia e, por isso, é útil familiarizar-se com eles. Os leitores que não têm paciência com a matemática devem ler apenas os enunciados e os comentários. Os conhecimentos exigidos não são, contudo, tão complexos. Um estudante de economia, em nível de doutorado, é capaz de seguir a argumentação, sem muito esforço.

# Lemas fundamentais

Os resultados apresentados pelos lemas são conhecidos há muito tempo. Não estão, porém, contidos em um único livro e exigem os seguintes conhecimentos prévios: conceito de limite e de função contínua; todo conjunto compacto de $R^n$ é fechado e limitado; a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto; $R^n$ tem uma base formada por $n$ vetores linearmente independentes; e, finalmente, noções sobre conjuntos convexos.

Os lemas são indispensáveis à demonstração dos teoremas. Deve-se procurar entender, pelo menos, o enunciado de cada um deles.

**Lema 1** *Sejam* $a^1, a^2, \ldots, a^m$ *m vetores do espaço* $R^n$ *e seja*

$$z = \sum_i^p r^i a^i, \quad r^i > 0,$$

em que *p é o menor índice tal que z se expressa pela equação acima. Então, os vetores* $a^1, a^2, \ldots, a^p$ *são linearmente independentes.*

Demonstração

Suponha que não. Então, existem números $t^i$, $i =$ 1, 2, . . ., $p$ tais que

$$u \cdot (\sum_{i=1}^p t^i a^i) = 0$$

e pelo menos um $t^i$ diferente de zero e $u > 0$. Daí,

$$z = \sum_i^p (r^i - ut^i) a^i.$$

Escolha $u$ de tal forma que $r^i - ut^i > 0$, e seja igual a zero pelo menos para algum $i$. Expressou-se, assim, $z$ em termos de uma combinação de coeficientes positivos, que envolve menos de $p$ vetores, o que contraria a definição de p. A contradição prova o lema.

**Lema 2** *Seja $a^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ uma base de $R^n$. Então,*

$$z = \sum_{i}^{n} f_i(z) a^i .$$

*As funções $f_i$ são contínuas e definidas em $R^n$, com contradomínio em $R$.*

Demonstração

Devem-se provar duas coisas: (1) que as funções existem; e (2) que são contínuas.

(1) A álgebra linear ensina que $z$ se representa, de forma única, como $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i a^i$, quando os $a^i$ são linearmente independentes. Fica, assim, assegurada a existência das n funções $f_i$. Ou seja,

$$f_i(z) = \lambda^i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

(2) Prova-se, a seguir, a continuidade de $f_i$.

Dado $\varepsilon > 0$, deve-se encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |z - y| < \delta$ implica $|f_i(z) - f_i(y)| < \varepsilon$.

$$|z - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(y) - f_i(z))^2} .$$

Logo, $|f_t(y) - f_t(z)| \le |z - y|$. É suficiente tomar $|z - y| < \varepsilon$ e $\varepsilon = \delta$.

**Definição 1 (Cone)** *O conjunto* $Y$ *é um cone se* $y \in Y$ *implicar* $ty \in Y$, $t \ge 0$.

**Definição 2 (Poliedro)** *Sejam* $a^1, a^2, \ldots, a^m$, $m$ *pontos de* $R^n$. *Denomina-se poliedro o fecho convexo desses pontos. Ou seja, o conjunto*

$$A = \{y : y = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i a^i, \quad 0 \le \lambda^i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda^i = 1\}.$$

**Lema 3** *O conjunto A é compacto.*

Demonstração

Seja $P = \{t = (t^1, t^2, \ldots, t^m),\ 0 \le t^i \le 1,\ \sum_{i=1}^{m} t^i = 1\}$. Sem muito esforço, mostra-se que $P$ é um conjunto compacto. Define-se a função $f(t) = \sum_{i=1}^{m} t^i a^i = t * a$, em que $a = (a^1, a^2, \ldots, a^m)$. A função $f$ é contínua e definida no conjunto compacto $P$. Ademais, $f(P) = A$. A continuidade de $f$ e o fato de $P$ ser compacto implicam que $A$ é um conjunto compacto.

**Definição 3 (Cone Poliedral)** *Considere o conjunto M de vetores do* $R^n$, $M = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, *e seja* $C = \{z = \sum_{i=1}^{m} t^i a^i,\ t^i \ge 0\}$. *O conjunto C é denominado* **cone poliedral.**

**Lema 4** *C é um cone convexo e fechado.*

Demonstração

Não é difícil mostrar que $C$ é um cone convexo. A parte mais delicada é provar que o conjunto $C$ é fechado. Por que isso é importante?

Constroem-se conjuntos de produção que racionalizam os dados, e a teoria da produção requer que eles, pelo menos, sejam conjuntos fechados.

1. $C$ é um cone convexo. Seja $0 \le t \le 1$ e considere $z^l$ e $z^2$ definidos por

$$z^1 = \sum_{i=1}^{m} r_i(z^1)a^i, \text{ sendo } r_i(z^1) \ge 0 \text{ e } z^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i(z^2)a^i, \text{ sendo } r_i(z^2) \ge 0.$$

$$tz^1 + (1-t)z^2 = \sum_{i=1}^{m}(tr_i(z^1) + (1-t)r_i(z^2))a^i.$$

Como $tr_i(z^1) + (1-t)r_i(z^2) \ge 0$, segue que $tz^1 + (1-t)z^2 \in C$.

2. $C$ é um conjunto fechado

O conjunto $\overline{C}$ é formado pela interseção de todos os conjuntos fechados que contém $C$. $\overline{C}$ é, obviamente, fechado. Deve-se mostrar que $C = \overline{C}$.

Seja $z \in \overline{C}$. Existe, então, uma seqüência $z^\nu$ que converge para $z$, com $z^\nu \in C$, e pode-se expressar $z^\nu$ da seguinte forma:

$$z^\nu = \sum_{i=1}^{m} r^i(z^\nu)a_\nu^i, \quad r^i(z^\nu) > 0, \quad a_\nu^i \in M,$$

em que os vetores $a_\nu^i$, que correspondem aos $r^i(z^\nu)$, são linearmente independentes, e os respectivos índices $i$ de $r^i$ pertencem aos conjuntos $I_\nu \subset \{1, 2, \dots, m\}$. Define-se $I_\nu$ como $I_\nu = \{i : r^i(z^\nu) > 0\}$. Ou, mais formalmente, se $i \notin I_\nu$, então $r^i(z^\nu) = 0$.

Fatos

(i) Em vista de os vetores correspondentes aos $r^i(z^\nu) > 0$ serem linearmente independentes, as respectivas funções $r^i(z^\nu)$ são contínuas. Deixa-se ao leitor os cuidados da demonstração. É suficiente formar uma base a partir dos vetores linearmente independentes que correspondem aos índices de $I_\nu$ e usar o lema 2.

(ii) Agora vem a parte mais delicada. Quando $\nu$ tende para o infinito, os índices de $I_\nu$ variam dentro do conjunto finito $K = \{1, 2, \ldots, m\}$. Conseqüentemente, subseqüências de $I_\nu$, quando $\nu$ tender para o infinito, terão de coincidir com alguns subconjuntos de $K$ (o conjunto vazio é subconjunto de $K$) um número infinito de vezes. Para compreender-se esse fato, note que há apenas um número finito de subconjuntos de $K$, precisamente $2^m$, e a seqüência dos $\nu$'s, $\nu = 1,\ 2,\ \ldots$, é infinita. Seja $I$ um subconjunto de $K$ para o qual existe uma subseqüência de $I_\nu$ que com ele coincida um número infinito de vezes. Sejam $(b^1, b^2, \ldots, b^p)$ os vetores de $M = \{a^1, a^2, \ldots, a^m)$ cujos índices correspondam aos elementos de $I_\nu$ e $y^\nu$ a subseqüência respectiva de $z^\nu$. Obviamente, essa subseqüência converge para $z$ (teorema de análise matemática). Ora, a demonstração funciona porque os $b$'s agora não dependem de $\nu$.

Há duas possibilidades:

(a) $I = \phi$. Nesse caso, $z^\nu = 0\ \forall \nu$ e, portanto, $z = 0$. Como 0 pertence a $C$, o lema é verdadeiro.

(b) $I \neq \phi$. Então, $y^\nu = \sum_{i=1}^{p} r^i(y^\nu) b^i$. Considerando a continuidade de $r^i$, segue que

$$\lim_{\nu \to \infty} y^\nu = \sum_{i=1}^{p} r^i(\lim_{\nu \to \infty} y^\nu) b^i.$$

Como $\lim_{\nu \to \infty} y^\nu = z$, então

$$z = \sum_{i=1}^{p} r^i(z) b^i.$$

Obviamente, $r^i(z) \geq 0$. Conseqüentemente, $z$ pertence a $C$ e $C = \bar{C}$ ou sejá, $C$ é um conjunto fechado.

**Lema 5** *Sejam A e B dois conjuntos convexos. A é um conjunto compacto e B, fechado. Então, C = A + B é convexo e fechado.*

Demonstração

(1) $C$ é um conjunto convexo.

Sejam $z$ e $y$ vetores de $C$ e $w = tz + (1-t)y$, sendo $0 \leq t \leq 1$. Desse modo, $z = a + b$, $a \in A$, $b \in B$ e $y = d + e$, $d \in A$, $e \in B$. Daí,

$$w = ta + tb + (1-t)d + (1-t)e,$$

ou

$$w = \underbrace{ta + (1-t)d}_{\in A} + \underbrace{tb + (1-t)e}_{\in B}.$$

Note-se que as chaves pertencem a $A$ ou a $B$, porque eles são, por hipótese, conjuntos convexos. $C$ é, portanto, convexo.

(2) $C$ é um conjunto fechado.

Seja $z \in \bar{C}$. Então, existe uma seqüência $z^\nu$ que converge para $z$ e $z^\nu \in C \ \forall \nu$. Conseqüentemente,

$$z^\nu = y^\nu + x^\nu, \ y^\nu \in A \ \text{e} \ x^\nu \in B.$$

Como $A$ é um conjunto compacto, existe uma subseqüência $h^{v}$ de $y^{v}$ que converge para $h$ (essa é uma propriedade de conjuntos compactos). Seja $u^{v}$ a subseqüência correspondente de $x^{v}$. Note que $w^{v} = h^{v} + u^{v}$ converge para o mesmo limite $z$. Agora, escreva

$$u^{v} = w^{v} - h^{v}.$$

O limite de $u^{v}$, quando $v$ tende para o infinito, é, portanto, $u = z - h$. Como $B$ é fechado, segue que $u$ pertence a $B$. Logo, $z = u + h \quad u \in B, \ h \in A$. Portanto, $z$ pertence a $C$, que é, assim, um conjunto fechado.

## Racionalização das observações

Discutem-se dois conceitos de racionalização das observações, tendo como base a minimização do custo e a maximização da renda líquida. Procura-se encontrar uma condição simples que indique se as observações foram geradas por agentes que minimizam custos. Além das hipóteses já referidas, admite-se que os agricultores utilizem, essencialmente, a mesma tecnologia ou, equivalentemente, a mesma função de produção. Os desvios em relação ao menor custo são, portanto, conseqüência do comportamento de agricultores que não minimizaram custos. Ou, então, mais de uma função de produção foi usada para gerar os dados. Por hipótese, não existem erros de mensuração, não há incertezas sobre preços, tecnologia e estados da natureza e, finalmente, os mercados são perfeitos.

## O critério custo

Coletam-se os seguintes dados de $n$ produtores: $(w^{i}, x^{i}, y^{i})$, $i = 1, 2, ..., n$, em que $w^{i}$ é um vetor de $m$ componentes, sem nenhuma componente negativa. Esse vetor representa os preços pagos pelos insumos usados pelo agricultor *i*; $x^i$ é também um vetor de *m* componentes, sem nenhuma componente negativa e representa os insumos consumidos pelo agricultor *i* para produzir a quantidade $y^i \geq 0$. Chama-se a atenção para o fato de que apenas um produto, *y*, é produzido:

$$V(y) = \{x : (x, y)\}.$$

Se *x* pertence a *V(y)*, então *x* produz *y*. Numa função de produção no plano, dado *x* no eixo horizontal e *y*, no eixo vertical, todos os pontos na perpendicular que parte de *x* até encontrar o gráfico da função correspondem a *y's* que podem ser produzidos por *x*.

Cada $y^i$ corresponde um $V(y^i)$, o conjunto de produção do agricultor *i*. Mas admitir que cada produtor tem seu conjunto de produção, que lhe é peculiar, é uma forma trivial de racionalizar os dados. Com efeito, se algum desvio ocorresse, ele seria atribuído ao fato de os conjuntos de produção serem diferentes entre os agricultores. Se *y* não coincidir com nenhum $y^i$, então $V(y) = \phi$.

Necessita-se de uma pressuposição que encadeie os conjuntos de produção, criando-se uma família de conjuntos de produção encadeados, não trivial[1].

**Pressuposição 1 (encadeamento de conjuntos)** *Uma família de conjuntos de produção é encadeada quando ocorre o seguinte: Se* $y^i \geq y^j$, *então* $V(y^i) \subset V(y^j)$. *Ou, em termos mais gerais, se* $w \geq z$, *então* $V(w) \subset V(z)$.

Em simples português, se *x* produz *y*, então *x* produz qualquer quantidade igual ou menor do que *y*. Essa pressuposição equivale a dizer que as observações foram geradas pelo mesmo conjunto de produção. O teorema que será demonstrado a seguir afirma isso.

---

[1] A palavra família pode confundir o leitor. Quando *y* é fixo, temos um conjunto de produção. A família de conjuntos de produção é gerada pela variação de *y*.

É possível dispor livremente dos insumos, sem nenhum custo. Ou seja, aceita-se o desperdício.

Formalmente:

**Pressuposição 2** *Se* $x \in V(y)$ e $z \geq x$, *então* $z \in V(y)$.

Precisa-se de uma pressuposição que nos garanta ser possível encontrar o custo mínimo. Ela é inofensiva quando se trata de um conjunto finito de observações, pois todo conjunto finito satisfaz tal pressuposição.

**Pressuposição 3** *O conjunto* $V(y)$ *é fechado.*

O leitor deve ter se perguntado o que ocorre quando $x = 0$? Intuitivamente, $y = 0$. Sem gastar, não é possível produzir alguma coisa. Equivale a exigir que a função de produção passe pela origem. Não se usa essa pressuposição explicitamente. Contudo, as funções que serão construídas são monótonas crescentes em $x$. Basta adicionar uma constante apropriada e $f(0) = 0$. Ele pode, assim, ser formalizado:

**Pressuposição 4** *Se* $y \neq 0$, *então* $0 \notin V(y)$.

Chama-se a atenção do leitor para o fato de que, do ponto de vista de minimização de custos, necessita-se apenas de *V(y)*, ou seja, toda combinação de insumos $x$ que produza $y$. Quando se tratar da maximização da renda líquida, o conjunto de produção é designado por *Y*, que é, na realidade, igual à reunião de todos os *V(y)*.

Considera-se racionalizar as observações, segundo o critério de minimização de custos, denominado **c-racionalização.**

**Definição 4 (c-racionalização)** *Existe c-racionalização quando a combinação de insumos da i-ésima observação custar menos (ou custar o mesmo) do que qualquer outra combinação que o i-ésimo agricultor escolher para produzir* $y^i$, *restrito a seu conjunto de produção,* $V(y^i)$. *Em termos formais, existe c-racionalização quando*

$$w^i * x^i \leq w^i * x, \quad x \in V(y^i),$$

*em que $w * x$ é igual à soma dos produtos das respectivas componentes de $w$ pelas de $x$.*

Em outras palavras, a definição diz o seguinte: as observações foram geradas por $n$ agricultores que minimizaram custos. Assim sendo, $V(y^i)$ não pode conter nenhum elemento que gere um custo menor do que o da observação $i$ quando seus preços são usados para calcular os custos.

**Teorema 1** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma família encadeada de conjuntos de produção, $V(y)$, que c-racionaliza as observações.*

2. *Se $y^j \geq y^i$, então $w^i * x^j \geq w^i * x^i$.*

3. *Existe uma família não trivial de conjuntos de produção convexos, fechados e que satisfazem as pressuposições 1 e 2.*

Observação: a condição 2 diz, simplesmente, que não se gasta menos para produzir mais. Sua conclusão possibilita verificação empírica. Se for observado que se gasta menos para produzir mais, isso significa que os agricultores não minimizam custos ou que seus conjuntos de produção não são encadeados, o que ocorre quando usam tecnologias diferentes. Na aplicação empírica, é preciso dar um tratamento cuidadoso aos erros de mensuração.

A condição 3 estabelece uma família de conjuntos de produção que é a família mínima que c-racionaliza os dados, num sentido que será definido mais abaixo. Ademais, os conjuntos são fechados e convexos, condições essenciais para que se possa derivar deles uma função de produção bem comportada.

Um comentário mais técnico sobre a condição 3 precisa ser feito. Parte-se das combinações de insumos que produzem $y$, designada por $A(y)$. Admite-se, em seguida, que qualquer combinação convexa dessas combinações também produz $y$. Ou seja, forma-se o fecho convexo de $A(y)$, que é designado por $B(y)$. A definição 2 formalmente explicita o que se entende por fecho convexo. No caso de dois pontos, o fecho convexo deles são todos pontos do segmento que os une. A média aritmética de dois pontos quaisquer de *A(y)* pertence a *B(y)*. Para completar a construção, adicionam-se a cada ponto de *B(y)* números não negativos, o que leva, finalmente, a

$$V(y)=\{x: x=z+s, \quad z\in B(y), \quad s\geq 0\}.$$

Qual é a razão desse procedimento? Para garantir que uma combinação $x$ produz $y$, qualquer outra que tiver as componentes maiores ou iguais a $x$ também produzirá $y$. Garante-se, assim, que a pressuposição 2 seja obedecida.

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

A pressuposição 1 é crucial para o resultado. A pressuposição 2 nem é usada. Com efeito, se $y^j \geq y^i$, segue, pela pressuposição 1, que $V(y^j)\subset V(y^i)$. Pela definição de c-racionalização, tem-se

$$w^i * x^i = \min_x\{w^i * x, \quad x\in V(y^i)\}.$$

Como $V(y^j)\subset V(y^i)$, $x^j$ poderia ter sido escolhido no cálculo do mínimo. Se não o foi, é porque custou mais a aquisição da combinação de insumos $x^j$ quando avaliada pelo vetor de preços $w^i$. Logo,

$$w^i * x^j \geq w^i * x^i.$$

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Seja $A(y)=\{x^j : y^j \geq y\}$. Se não existe nenhum $y^j \geq y$, então $A(y)=\phi$. *A(y)* é um conjunto finito: contém as observações sobre os insumos dos produtores que produzem $y$ ou mais, ou seja, aquelas que satisfazem à regra de formação que define *A(y)*. Admite-se que há $m$

elementos e $m \leq n$ . Seja *B(y)* o fecho convexo de *A(y)*. O lema 3 garante que *B(y)* é um conjunto convexo e compacto. Seja, agora,

$$V(y) = \{z : z = w + u, \quad w \in B(y), \quad u \geq 0\}.$$

Ora, pelo lema 5, segue que *V(y)* é convexo e fechado.

(iii) $3 \Rightarrow 1$

*V(y)* c-racionaliza as observações. Seja $x \in V(y)$ . Então,

$$x = \sum_{i=i}^{m} t^i x^i + s, \quad 0 \leq t^i \leq 1, \quad \sum_{i=1} t^i = 1, \quad s \geq 0, \quad x^i \in A(y).$$

Segue que

$$w^i * x = \sum_{j=1}^{m} t^i w^i * x^j + w^i * s.$$

Mas, pela condição 2, visto que $x^i$ pertence a *V(y)*,

$$w^i * x^i \leq w^i * x^j, \quad x^j \in A(y) \subset B(y).$$

Então,

$$w^i * x \geq (\sum_{j=i}^{m} t^j) w^i * x^i + w^i * s = w^i * x^i + w^i * s.$$

Como $w^i * s \geq 0$, segue que $w^i * x \geq w^i * x^i$, o que completa a demonstração.

**Propriedades adicionais de *V(y)***

(1) *V(y)* satisfaz as pressuposições 1 e 2.

*V(y)* satisfaz a pressuposição 1. Seja $y \geq z$. Então, $A(y) \subset A(z)$, porque se admitiu que as observações pertencessem aos conjuntos de produção encadeados. Pela forma com que o conjunto *V(y)* foi construído a partir de *A(y)*, segue que $V(y) \subset V(z)$.

*V(y)* satisfaz a pressuposição 2. Seja $z \in V(y)$, $x \geq z$. Portanto, $x = z + h, \quad h \geq 0$. Logo,

$$x = \underbrace{u + s}_{=z} + h, \quad u \in B(y), \quad s \geq 0, \quad h \geq 0.$$

Como $s + h \geq 0$, segue que $x \in V(y)$, que é o que se buscava demonstrar.

(2) A família *V(y)* é mínima no sentido de que se *H(y)* for outra família de conjuntos convexos e fechados que contenha *A(y)* e satisfaça as pressuposições 1 e 2 e $H(y) \neq V(y)$ e $H(y) \subset V(y)$, então *H(y)* não seria um conjunto convexo. O enunciado acima implica na existência de $z \in V(y)$ e $z \notin H(y)$. Por definição,

$$z = x + s, \quad x \in B(y), \quad s \geq 0.$$

Existe, portanto, uma combinação convexa de elementos de *A(y)*, que resulta em *x*, que não pertence a *H(y)*. Se *x* pertencesse a *H(y)*, então, como $z \geq x$, pela pressuposição 2, *z* pertenceria a *H(y)*. Assim, *H(y)* não contém *B(y)*. Como, por hipótese, $A(y) \subset H(y)$, se *H(y)* fosse um conjunto convexo, então *B(y)* seria, por construção, um subconjunto de *H(y)*. Como isso não ocorreu, segue que *H(y)* não é um conjunto convexo.

## Funções de produção

A função de produção pode ser utilizada para racionalizar os dados, em substituição ao conceito de conjunto de produção? A resposta é afirmativa e obtém-se um resultado mais forte do que o anterior: se um agricultor produz mais do que outro, então gasta mais. Se essa condição for violada, há duas possibilidades: os custos não foram minimizados ou então os dados não foram gerados pela mesma função de produção. Introduzem-se algumas definições para facilitar a leitura.

**Definição 5 (função côncava)** *Seja f(x) definida no conjunto convexo C de* $R^n$ *e com contradomínio no conjunto dos números reais e seja* $z = tx + (1 - t)y$, $x$ *e* $y \in C$, $0 \leq t \leq 1$. *Como C é convexo, segue que* $z \in C$. *Então, f(.) é função côncava se*

$$f(z) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

**Definição 6 (função semicôncava)** *A função f(x) definida em C, conjunto convexo de* $R^n$, *é semicôncava se, para todo* $\alpha$, *número real,* $f(x) \geq \alpha$, $f(y) \geq \alpha$ e $z = tx + (1-t)y$, $0 \leq t \leq 1$, *implicam*

$$f(z) \geq \alpha.$$

**Definição 7 (cf-racionalização)** *A função de produção f(x) definida em* $R_+^m$ *cf-racionaliza os dados* $(w^i, x^i, y^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *conforme o critério de minimização de custos, se:*

1. $f(x^i) = y^i$.

2. $f(x) \geq f(x^i) \Rightarrow w^i * x \geq w^i * x^i$.

Requer-se que o gráfico da função passe por todas as observações e, em segundo lugar, quem produz mais não pode gastar menos do que quem produz menos. Equivalentemente, $x^i$ é a combinação de menor custo entre todas aquelas que produzem $y^i$ ou mais. *V(y)* pode, obviamente, ser definido como se segue: $V(y) = \{x : f(x) \geq y\}$. Se *f(x)* for semicontínua superiormente, então *V(y)* é um conjunto fechado[2] e a pres-

[2] Toda função contínua é contínua superiormente. A recíproca é falsa.

suposição 3 é obedecida. *V(y)* satisfaz a pressuposição 1. Satisfará a pressuposição 2 se *f(x)* for monótona crescente: $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. A pressuposição 4 exige que $f(0) = 0$.

No teorema que se segue, requer-se que a função que cf-racionaliza os dados seja contínua, e essa restrição permite obter uma conclusão mais forte que no caso anterior. Ela também implica que o conjunto de produção do agricultor *i* seja fechado. Ele é simbolicamente representado por

$$\{x : f(x) \geq f(x^i) = y^i\}.$$

Em geral, conclusões mais fortes são derivadas de restrições adicionais. Para obter a mesma conclusão do teorema anterior, basta admitir que *f(x)* seja semicontínua superiormente. Como se viu, *V(y)* é conjunto fechado[3].

**Teorema 2** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma função contínua que cf-racionaliza as observações.*
2. *Se* $y^j \leq y^i$, *então* $w^j * x^j \leq w^j x^i$.
3. *Se* $y^j < y^i$, *então* $w^j * x^j < w^j x^i$.
4. *Existem números positivos*[4] $r^j$ *e* $u^j$ *tais que*

   *(i)* $y^i > y^j \Rightarrow r^i > r^j$.

   *(ii)* $u^i \leq u^j + r^j w^j * (x^j - x^i)$, $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

5. *Existe uma função contínua, semicôncava e monótona que c-racionaliza as observações.*

---

[3] *f(x)* é semicontínua superiormente se $V(y) = \{x : f(x) \geq r,\ \ r \in R\}$ é um conjunto fechado.

[4] Eles são conhecidos por números de Afriat.

Comentário

Apenas para facilitar a compreensão da condição 4(ii), faça $p^j = 1/r^j$ e interprete *p* como preço do produto. A condição pode ser reescrita como

$$p^j u^i - w^j * x^i \leq u^j p^j - w^j * x^j.$$

Interpretando os $u^j$ como a quantidade de produto, verifica-se que a renda líquida do agricultor *j*, aos preços que recebe pelo produto e paga pelos insumos, é maior (ou igual) do que aquela que receberia se optasse por usar a combinação $x^i$ de insumos e produzisse $u^i$. Por essa visão, a cf-racionalização equivale à r-racionalização, ou seja, à maximização da renda líquida.

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

A definição de cf-racionalização, considerando $f(x^i)=y^i$ e $f(x^j)=y^j$, implica que se $y^j \leq y^i$, então $w^j * x^j \leq w^j * x^i$. Assim, se o agricultor escolheu $x^j$, quando poderia ter escolhido qualquer outra combinação de insumos, é porque $x^j$ não lhe custou mais.

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Pela condição 3 e a continuidade de $f(x)$, existe $0 < s < 1$ tal que $f(x^j) < f(sx^i)$. A condição 2 implica

$$w^j * x^j \leq s w^j * x^i.$$

Como $0 < s < 1$, segue que

$$w^j * x^j < w^j * x^i.$$

(iii) $3 \Rightarrow 4$

Trata-se da construção dos números de Afriat. Será apresentada no final do trabalho.

(iv) $4 \Rightarrow 5$

Desenvolve-se a demonstração em etapas:

Etapa 1

Constrói-se a função

$$u(x) = \min_{i}\{u^i + r^i w^i (x - x^i)\}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ela é bem definida porque $i$ varia num conjunto finito. Observe que $u(x)$ é função crescente de $x$. Se $u(0) < 0$, defina $v(x)$ como

$$v(x) = -u(0) + u(x).$$

Assim, admite-se sempre que $u(0) \geq 0$.

Etapa 2

$u(x)$ é uma função contínua. Se $u(x) \geq u(y)$, e pela definição de $u(y)$, em que $1 \leq m \leq n$, então

$$u(y) = u^m + r^m w^m (y - x^m).$$

Pela definição de $u(x)$, tem-se

$$u(x) \leq u^m + r^m w^m (x - x^m).$$

Como, por hipótese, $u(x)-u(y) \geq 0$, segue que

$$| u(x) - u(y) | \leq r^m \mid w^m \mid | (x - y) |,$$

$$| u(x) - u(y) | \leq D^*(x - y) | (*)$$

em que

$$D^* = \max_i (r^i \mid w^i \mid), \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se $u(y) \geq u(x)$, explicitando $u(x)$ como igualdade, e usando-se a definição de $u(y)$, obtém-se

$$| u(y) - u(x) | \leq D^* \mid (y - x) \mid \qquad (**)$$

De (*) e (**), segue que

$$| u(x) - u(y) | \leq D^* \mid (x - y) \mid .$$

Dado $\varepsilon > 0$, faça $|x - y| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{D}^*}$. Daí,

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon.$$

Assegura-se, assim, a continuidade de $u(x)$. Mostrar-se-á que $u(x)$ é função côncava e, portanto, contínua para $x > 0$.

Etapa 3

Precisa-se do seguinte lema para mostrar que $f(x)$ é função côncava:

**Lema 6** *Sejam $a^i$ e $b^i$, $0 \leq i \leq n$, números reais quaisquer. Então, min $(a^i + b^i) \geq \min a^i + \min b^i$, $0 \leq i \leq n$.*

Como o conjunto sobre o qual se toma o mínimo é finito, ele é bem definido. Pela definição de mínimo, tem-se:

$$\min a^i \leq a^j, \quad 0 \leq j \leq n,$$
$$\min b^i \leq b^j, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Somando as duas desigualdades, obtém-se

$$\min a^i + \min b^i \leq a^j + b^j, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Como a desigualdade vale para todo $j$, ela continuará válida quando se toma o mínimo em seu lado direito, o que demonstra o lema.

Seja $0 \leq t \leq 1$ e sejam $x$ e $y$ duas combinações de insumos. Como $u(x)$ é definido em $R_+^m$, que é um conjunto convexo, segue que $z = tx + (1-t)y$ pertence a $R_+^m$.

$$u(z) = \min \ (u^i + r^i w^i (x^i - (tx + (1-t)y))).$$

Substitua $u^i$ por $tu^i + (1-t)u^i$ e $x^i$ por $tx^i + (1-t)x^i$. Depois de algumas simplificações, e pelo lema acima, virá

$$u(z) \geq \min\{t[u^i + r^i w^i (x^i - x)]\} + \min\{(1-t)[u^i + r^i w^i (x^i - y)]\}.$$

Como o primeiro colchete é maior ou igual a $u(x)$, e o segundo é maior ou igual a $u(y)$, então

$$u(z) \geq t \ \mathrm{u}(x) + (1-t)u(y).$$

O domínio de $u(x)$ são as combinações de insumos. O contradomínio é $u(x)$, números reais não negativos, e nele estão os números de Afriat. Para completar a demonstração, é preciso ligar $u$ a $y$, o que equivale a construir a função $y = f(u(x))$. Aqui, apresenta-se a utilidade dos números de Afriat, especificamente a propriedade $y^i > y^j \Rightarrow r^i > r^j$.

No eixo horizontal, coloque os $r^i$ do menor para o maior. No eixo vertical, coloque os $y^i$ também do menor para o maior. Ligue os pontos por segmentos de reta, não se esquecendo da origem. Prolongue, indefinidamente, o último segmento obtido, mantendo a mesma inclinação. O gráfico obtido é uma função contínua, monótona crescente (estrita), definida em $R_+$, que se representa por $y = f(.)$. Como $u(x)$ é um número real não negativo, segue que $f(u(x))$ é bem definida. A função buscada é dada por $y = g(x)$, e $g$ é a função composta $g = fu(x)$, que é contínua porque $f$ e $u$ o são.

Etapa 4 A função $g(x)$ é semicôncava

Sejam $z$, $x$, $y$ e $t$ como definidos acima e $s$ um número real tal que $g(u(x)) \geq s$ e $g(u(y)) \geq s$. Como $u(x)$ é função côncava e $g(.)$ monótona crescente, segue que

$$g(u(z)) = g(u(tx + (1-t)y)) \geq g(t(u(x)) + (1-t)u(y)).$$

Se $u(x) \geq u(y)$, então $tu(x) + (1-t)u(y) \geq u(y)$. Se $u(y) \geq u(x)$, obtém-se o mesmo resultado em relação a $s$. E, portanto,

$g(u(z)) \geq g(u(y)) \geq s$, que é o que se deseja demonstrar.

Etapa 5

Falta demonstrar que $g(x)$ racionaliza os dados.

(1) $u(x^i) = y^i$

Observe que quando se substitui $x$ por $x^i$ na fórmula que define $u(x)$, obtém-se $u^i$. Logo, $u(x^i) \leq u^i$. Admita ser possível obter a desigualdade estrita. Como o mínimo ocorre para algum índice $m$, considerando as $n$ possibilidades de escolha tem-se

$$u(x^i) = u^m + r^m w^m (x^m - x^i) < u^i.$$

Pelo enunciado do teorema, na parte que se refere aos números de Afriat, essa desigualdade não pode ocorrer. Chega-se, assim, a uma contradição. E, portanto, $u(x^i) = u^i$. Recordando a construção de *f(x)*, obtém-se $g(x^i) = f(u(x^i))$.

(2) Sabe-se que a cf-racionalização implica, por definição, isto: se $g(x) \geq g(x^i)$, então $w^i x \geq w^i x^i$. Logo, se ocorrer $w^i * x < w^i * x^i$, ter-se-á $g(x) < g(x^i)$, que é o que se demonstrará.

Pela definição de *u(x)*,

$$u(x) \leq u^j + r^j w^j (x - x^j), \quad 1 \leq j \leq n.$$
$$w^i * x < w^i * x^i,$$

Como, por hipótese, $w^i * x < w^i * x^i$, e $r^j w^j (x - x^j) < 0$ quando *j=i,* segue que $u(x) < u^i$. Como *f(x)* é estritamente crescente, então $f(u^i) > f(u(x))$. Daí,

$$g(x) = f(u(x)) < f(u(x^i)) = g(x^i).$$

A cf-racionalização equivale à c-racionalização, como é fácil demonstrar.

Etapa 6

A equivalência entre 5 e 1 é óbvia, já que a função *g(x)* é contínua e racionaliza os dados.

# O critério renda líquida

Considere o conceito de racionalização dos dados baseado na maximização da renda líquida. Coloca-se um problema mais delicado. No caso anterior, a produção tinha um teto fixo representado por *y*. Não se exige isso agora. Por isso, a renda líquida pode ser até infinita, como é o caso de retorno crescente à escala. Se o retorno à escala for constante, admitindo que não cabe renda líquida negativa, esta será nula.

Como se verá, exclui-se a possibilidade de renda líquida infinita pela definição de r-racionalização.

## Produção múltipla

Designe por $Y$ o conjunto de produção. Seja $y$ um elemento de $Y$. As componentes positivas de $y$ representam produção; as negativas são insumos consumidos na produção das componentes positivas. Seja $p$ o vetor de preços. Então, $p * y$ representa a renda líquida, designada por $r$.

**Definição 8 (r-racionalização)** *O conjunto de produção r-racionaliza as observações se*

$$p^i * y^i \geq p^i * y \ , \quad y \in Y, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Comentários

Em português simples, a combinação representada por $y^i$ é a que deu a maior renda líquida para o agricultor $i$, dentro das escolhas disponíveis no conjunto $Y$. Admite-se o mesmo conjunto $Y$, para todas as observações. Ou seja, todos usam a mesma tecnologia, representada por $Y$. Na prática, esta definição é difícil de verificar, porque se requer uma especificação detalhada de $Y$.

O teorema abaixo permite uma verificação baseada nas observações. Se algum agricultor, feitas avaliações de receitas e despesas por seu vetor de preços, obtiver uma renda líquida maior com uma combinação $y$ de outro agricultor, então as observações não podem ser r-racionalizadas. Tecnologias diferentes podem ter sido usadas. Erros de mensuração e outras causas ocasionaram a impossibilidade da r-racionalização. Feitas as verificações, se os dados não apresentarem incongruências quanto à r-racionalização, não se pode rejeitar a hipótese de que as observações são de agricultores que maximizaram a renda líquida.

**Teorema 3** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe um conjunto de produção que r-racionaliza os dados.*
2. $p^i * y^i \geq p^i y^j, \quad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n.$
3. *Existe um conjunto de produção Y, que é fechado, convexo e, se* $z \leq y$ e $y \in Y$, *então* $z \in Y$. *Além disso, Y r-racionaliza os dados.*

Na condição 3, a penúltima característica de $Y$ significa, simplesmente, que se $y$ pertence a $Y$, então toda combinação $z$ que gaste mais insumos e produza menos que $y$ pertence a $Y$. Em suma, o desperdício nada adiciona aos custos, além do que se pagou pela aquisição dos insumos.

A condição 2 permite verificação empírica. Aos preços que o agricultor $i$ paga pelos insumos e recebe pelos produtos, a renda líquida observada não é menor do que a que obteria, usando qualquer outra combinação, desde que avaliasse os custos e as receitas tendo por base o vetor de preços $p^i$.

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

A definição de r-racionalização implica $p^i * y^i \leq p^i * y$ para todo $y$ que pertença a $Y$. Como $y^j \in Y$ para todas as observações, segue que $p^i * y^i \leq p^i * y^j$.

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Construção do conjunto $Y$

(*) Construa o conjunto cujos elementos são todas as combinações convexas das observações que têm $n$ elementos. Aprendeu-se que este conjunto é convexo e compacto e é designado por $B$[5].

[5] No teorema 1, inicialmente fixamos o nível de produção. No caso da renda líquida, $y$ varia livremente.

(*) É necessário aumentar $B$, de modo que dado um elemento de $B$, qualquer combinação que tenha as componentes dos insumos maiores, em valor absoluto, ou seja se gaste mais, e as componentes dos produtos são menores, ou seja se produza menos, seja incluída. Um pouco de reflexão indica que um novo membro é obtido pela adição de um elemento de $B$ a um vetor de componentes não positivas, do tipo $s \leq 0$, $s$ pertencente a $R_{-}^{m+q}$. Formalmente,

$$Y = \{ y : y = w + s, \quad w \in B, \quad s \in R_{-}^{m+q} \}.$$

O conjunto $Y$ goza das seguintes propriedades: é convexo, fechado (lema 5) e se $z$ pertence a $Y$ e $w$ é um outro vetor em que todas as componentes são menores ou iguais as de $z$, então $z$ pertence a $Y$.

(*) Mostra-se que $Y$ r-racionaliza as observações, conforme a definição dada. Sejam $z$ pertencente a $Y$ e $t^i$ números reais maiores ou iguais a zero e que somam sempre 1. Tem-se $z = w + s$. E como $w$ pertence a $B$, então

$w = \sum_{i=1}^{n} t^i y^i$, em que $y^i$ pertence ao conjunto que formou $B$, e $z = w + s$.

A renda líquida correspondente a $z$, avaliada a preços da observação $i$, será dada por

$$p^i * z = \sum_{j=1}^{n} t^j p^i * y^j + p^i * s.$$

A quantidade $p^i * s$ é um número nulo ou negativo. Pelo item 2, $p^i y^i \geq p^i y^j$ para $j$ de 1 a $n$. Na igualdade acima, isso produzirá $p^i * z \leq (\sum_{j=1}^{n} t^j) p^i * y^i + p^i * s$. A soma entre parênteses é igual a 1 e, como $p^i * s \leq 0$, segue que $p^i * z \leq p^i y^i$. Portanto, $Y$ r-racionaliza as observações.

(iii) $3 \Rightarrow 1$

O enunciado do teorema afirma a existência de um conjunto que c-racionaliza as observações. Ora, $Y$ é um desses conjuntos. Completa-se, assim, a demonstração.

## Função de produção

Considere o caso da produção simples e abandone a convenção do sinal. As observações são em número de $n$, referidas por $(w^i, x^i, p^i, y^i)$. Os preços de insumos e produtos são $w$'s e $p$'s. A combinação de insumos, $x$, é um vetor do $R_+^m$. Portanto, $x$ tem m componentes não negativas, e $y$ representa a produção, um número real não negativo. Os $n$ preços de insumos e produtos são todos positivos. Admite-se, implicitamente, o conjunto $Y$ definido por

$$Y = \{(x, y) : x \textit{ produz pelo menos } y\},$$

e a definição, abaixo explicitada, elimina a possibilidade de renda líquida infinita. Elimina, por exemplo, o mundo Cobb-Douglas quando a soma dos expoentes é maior que 1. As $n$ observações $(x^i, y^i)$ pertencem a $Y$, ou seja, todas as observações. A definição de r-racionalização se especializa, como a seguir.

**Definição 9 (rf-racionalização)** *Os dados são rf-racionalizados se existir a função de produção $y = f(x)$ e:*

1. $f(x^i) = y^i$.
2. $p^i * y - w^i * x \leq p^i y^i - w^i x^i$ *para i variando de 1 a n.*

Observação

Quer-se implicar que a escolha feita por qualquer agricultor é a que maximiza sua renda líquida quando custos e rendas líquidas são calculados com base em seus preços.

**Teorema 4** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma função de produção que rf-racionaliza os dados.*
2. $p^i * y^i - w^i * x^i \geq p^i * y^j - w^i * x^j$.
3. *Existe uma função contínua, côncava e monótona crescente que rf-racionaliza os dados.*

Comentários

A condição 2 permite o teste empírico. Se ela não for observada, então não existe uma função que rf-racionaliza os dados. Se for observada, garante-se que aquele conjunto de dados pode ser rf-racionalizado por uma função de produção que é contínua, côncava e monótona crescente.

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

Na definição de rf-racionalização, definição 9, substitui-se $y$ por $y^j$ e $x$ por $x^j$ para obter, facilmente, o resultado.

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Divide-se a desigualdade que aparece na definição de rf-racionalização por $p^i$, que, por hipótese, juntamente com os $w$'s, são todos positivos. Daí,

$$y^i + \frac{w^i}{p^i}(x - x^i) \geq y.$$

O lado esquerdo da desigualdade, quando a hipótese de cf-racionalização é verdadeira, é maior que zero para qualquer $i$, pois $y \geq 0$. Assim, surge a sugestão para a definição da função.

$$f(x) = \min\{y^i + \frac{w^i}{p^i} * (x - x^i),\ \ i = 1,\ 2, \ldots, n\}.$$

Ora, $f(x) \geq 0$ e, como o mínimo é obtido num conjunto finito, $f(x)$ é bem definida.

Etapa 1

A função $f(x)$ é contínua. Seja $f(x) \geq f(z)$.
Por definição,

$$f(x) \leq y^i + \frac{w^i}{p^i} * (x - x^i), \quad \text{para todo } i.$$

$$f(z) = y^i + \frac{w^i}{p^i} * (z - x^i), \text{para algum } i, \text{ pela definição de } f(z).$$

Destas duas últimas expressões, depois de manipulações simples, notando que, por hipótese, $f(x) - f(z) \geq 0$, e, por isso, $f(x) - f(z) = | f(x) - f(z) |$, decorre que

$$| f(x) - f(z) | \leq | \frac{w^i}{p^i} | * | (x - z) | \leq D | x - z |.$$

Seja $f(z) \geq f(x)$. Repetindo o mesmo raciocínio, trocando $x$ por $z$,

$$| f(z) - f(x) | \leq | \frac{w^i}{p^i} | * | (z - x) | \leq D | z - x |,$$

$$D = \max_i \{ | \frac{w^i}{p^i} |, i = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Logo, $|f(x) - f(z)| \leq D|x - z|$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $|z - x| < \varepsilon / D$. Então, $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$, o que prova a continuidade de *f(x)*.

Etapa 2

A função *f(x)* é côncava.

Sejam $0 \leq t \leq 1$ e $z = tx + (1-t)u$. Aplicando a definição de *f(x)*, seguem, para qualquer *i*, as desigualdades

$$tf(x) \leq ty^i + \frac{w^i}{p^i} * (tx - tx^i)$$

e

$$(1-t)f(u) \leq (1-t)y^i + \frac{w^i}{p^i} * ((1-t)u - (1-t)x^i).$$

Somando essas duas desigualdades, segue que

$$tf(x) - (1-t)f(u) \leq y^i + \frac{w^i}{p^i}(z - x^i), \text{para todo } i.$$

Como a desigualdade é valida para todo *i*, ela o é também para aquele *i* no termo da direita, que fornece o valor de *f(z)*.

Então,

$$tf(x) + (1-t)f(u) \leq f(z).$$

Portanto, *f(x)* é côncava.

Etapa 3

A função $f(x)$ é monótona, no seguinte sentido: se $z \geq x$, então $f(z) \geq f(x)$.

Como

$$\frac{w^i}{p^i} * (z - x^i) \geq \frac{w^i}{p^i} * (x - x^i),$$

segue que $f(z) \geq f(x)$.

Observação: para obter o resultado acima, substitua $z$ por $x$ na igualdade que define $z$. Depois, use a definição de $f(x)$.

Etapa 4

Mostrar que $f(x^i) = y^i$ para algum $i$.

Ora,

$$f(x^i) = \min\{y^j + \frac{w^j}{p^j} * (x^i - x^j),\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Quando $j = i$, segue que $f(x^i) \leq y^i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Deve-se que provar que a igualdade prevalece. Suponha que não. Admitindo que o mínimo ocorre quando $i = k$, virá

$$f(x^i) = y^k + \frac{w^k}{p^k} * (x^i - x^k) < y^i,$$

o que implica

$$y^k - \frac{w^k}{p^k} x^k < y^i - \frac{w^k}{p^k} x^i.$$

Isso contraria a condição 2 do teorema. Assim, $f(x^i) = y^i$.

Etapa 5

A função f(x) rf-racionaliza os dados.

Na etapa 4, demonstrou-se a primeira exigência. Pela definição de $f(x)$, depois de multiplicar ambos os lados por $p^i$ e rearranjar os termos, obtém-se

$$p^i f(x) - w^i * x \leq p^i y^i - w^i * x^i.$$

Mostrou-se, assim, que a renda líquida auferida pelo agricultor $i$, pela escolha que fez, é maior ou igual à renda líquida que poderia ter obtido com uma outra escolha qualquer.

# Funções especializadas

Não se restringiu a função de produção ou o conjunto de produção além do necessário para se obter os teoremas demonstrados e as condições que permitem verificar, de modo simples, se os dados são racionalizáveis ou não.

Novas restrições serão introduzidas e serão buscadas condições fáceis de verificar nas observações. Os pontos principais são retornos constantes à escala, homoteticidade e separabilidade.

## Retornos constantes

Embora seja do conhecimento geral, explicita-se a definição de retorno constante. No caso do conjunto de produção, requer-se que ele seja um cone, ou seja, se $y$ pertence a $Y$, então o mesmo ocorre com $ty$, $t > 0$.

**Definição 10** *A função* $f(x)$ *é homogênea se* $f(tx) = tf(x)$, $t > 0$. *Se a função de produção, que racionaliza os dados, for homogênea de primeiro grau (referida como homogênea, apenas), ou se o conjunto* *de produção for um cone, diz-se, nesse caso, que os retornos constantes à escala prevalecem.*

Para simplificar as fórmulas, normalizam-se os preços dos insumos pelo dispêndio $v^i = \dfrac{w^i}{w^i * x^i}$.

**Teorema 5** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma função de produção homogênea que cf-racionaliza os dados.*

2. $v^j * x^i \geq \dfrac{y^i}{y^j}$ *para todo i e j.*

3. *Existe uma função contínua, côncava, monótona crescente e homogênea que cf-racionaliza os dados.*

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

Como *f(x)* é homogênea, então $1 = f(x^i / y^i)$. Logo, a combinação $y^j * (x^i / y^i)$ produz $y^j$. Ora, quando se aceita que os dados são c-racionalizáveis (recordar a definição), a combinação $y^j * (x^i / y^i)$ custa o mesmo ou mais para produzir $y^j$, ou seja,

$$v^j * (y^j * x^i / y^i) \geq v^j * x^j.$$

A definição de *v's* implica $v^i * x^i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$v^j * (y^j * x^i / y^i) \geq 1$$

ou

$$v^j * x^i \geq y^i / y^j.$$

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Defina *f(x)*, levando em consideração a condição 2 do enunciado, como

$$f(x) = \min_j \{ y^j v^j * x \}.$$

Observe que *f(x)* é bem definida, pois $f(x) \geq 0$ e $f(0) = 0$. Considerem-se as demais propriedades de *f(x)*:

Etapa 1

A função *f(x)* é homogênea.

$$f(tx) = \min_i \{ y^j v^j * tx \},$$

que equivale a

$$f(tx) = t(\min_i \{ y^j v^j * x \}) = tf(x).$$

Etapa 2

A função *f(x)* é contínua.

Seja $f(x) \geq f(z)$. Pela definição de *f(x)*, obtém-se

$$f(x) \leq y^j v^j * x \text{ para qualquer } j$$

e

$$f(z) = y^j v^j * z \text{ para algum } j.$$

Em $f(x) - f(z)$, substituindo *f(x)* e *f(z)* pelos valores dos lados direitos das duas expressões acima, segue que

$$| f(x) - f(z) | \leq d^* |(x - z)|, \; d = \max_j \{ y^j v^j , \; j = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Da mesma forma, seja $f(z) \geq f(x)$. Trocando $x$ por $z$, defina, agora, $f(x)$:

$$|f(z)-f(x)| \leq d^*|(z-x)|,$$

que implica

$$|f(x)-f(z)| \leq d^*|x-z|.$$

Obtém-se, facilmente, das duas desigualdades acima, a continuidade de $f(x)$.

Etapa 3

A função $f(x)$ é côncava.

Sejam $0 \leq t \leq 1$ e $z = tx + (1-t)w$. Então,

$$tf(x) \leq y^j v^j * tx, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

e

$$(1-t)f(w) \leq y^j v^j * (1-t)w, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Somando as duas desigualdades, segue que

$$tf(x) + (1-t)f(w) \leq y^j v^j * z, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Como $f(z)$ é o mínimo de expressão à direita da desigualdade acima, então

$$tf(x) + (1-t)f(w) \leq f(z).$$

Assim, fica provada a concavidade de *f(x)*.

Etapa 4

Se $z \geq x$, então a definição de *f(x)* implica $f(x) \leq f(z)$, porque

$$y^j v^j * z \geq y^j v^j * x, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Etapa 5

$$f(x^i) = y^i$$

Na definição de *f(x)*, substitui-se *x* por $x^i$ e, notando que $v^i * x^i = 1$ quando *j* se igualar a *i*, virá $f(x^i) \leq y^i$. Admita que o mínimo, na definição de *f(x)*, ocorra quando $i = m$. Logo,

$$f(x^i) = y^m v^m x^i \leq y^i.$$

Se a desigualdade fosse estrita, então

$$y^m v^m * x^i < y^i$$

ou

$$v^m * x^i < y^i / y^m,$$

que viola a condição 2 do teorema.

Etapa 6

A função *f(x)* c-racionaliza os dados. Há que se demonstrar isto: para produzir mais, nunca custa menos do que para produzir menos.

Seja $f(x^i) = y^i \leq f(x)$, que, levando em conta a definição de *f(x)*, implica

$$y^i \leq y^i v^i * x$$

ou

$$v^i * x \geq 1.$$

Recordando a definição de $v^i$, verifica-se que a desigualdade acima implica a c-racionalização.

## Produções múltiplas

No conjunto *Y*, vale novamente a regra do sinal: a componente positiva representa produção, e as negativas são os insumos. O vetor preço é indicado por *p*. Para a facilidade do leitor repete-se a definição de r-racionalização: as observações são r-racionalizadas se

$$p^i x^i \geq p^i * x, \quad x \in Y.$$

Observe que a definição introduziu uma restrição que elimina a possibilidade de renda líquida infinita. Como se trata do caso de retornos constantes à escala, *Y* é um cone que implica renda líquida nula ou negativa. Essa é a novidade.

**Teorema 6** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe um conjunto Y que r-racionaliza as observações.*
2. $0 = p^i * y^i \geq p^i * y^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$
3. *Existe um cone convexo e fechado. Além disso, se z pertence a Y e* $y \leq z$, *então y pertence a Y, que r-racionaliza as observações.*

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

Essa demonstração nada difere da que foi feita para o teorema 3. Deve-se, contudo, mostrar que a renda líquida é nula ou negativa. Seja $p^i * y^i = b,\quad b > 0$. Como $Y$ é um cone, $ty^i \in Y$ para qualquer $t > 0$. Logo, $p^i * y^j \leq b/t$. Deixando t crescer sem limites e $t > 1$, segue que $p^i * y^j \leq 0,\quad j = 1, 2, \ldots, n$. Logo, $p^i * y^i \leq 0$. Mas $p^i * y^i \geq b/t$ para $t>1$. Se $t$ cresce sem limites, então $p^i * y^i \geq 0$. Portanto, $p^i * y^i = 0$.

(ii) $2 \Rightarrow 3$

A base da construção de $Y$ é ser a renda líquida nula ou menor que zero, o que dá origem a um sistema de equações cuja solução é um cone fechado que c-racionaliza os dados, (NIKAIDO, 1968):

$$Y = \{y:\ A * y \leq 0\}.$$

A é uma matriz $n \times n + m$, em que a linha $i$ contém o vetor preço da observação $i$. Em símbolo,

$$A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n+m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n+m} \\ \cdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn+m} \end{bmatrix}$$

Como $A * x$ é uma função contínua definida em $R^{n+m}$ e com contradomínio em $R^n$, segue que $Y$ é um conjunto fechado. É fácil ver que $Y$ é um cone convexo. Como o vetor de preços é positivo, se $x$ for menor ou igual a $z$ e se $z$ pertencer a $Y$, segue que $x - z$ também pertence a $Y$. Ou seja, $x - z \leq 0$ implica $A * x - A * z \leq 0$.

Falta mostrar que $Y$ c-racionaliza os dados, o que é imediato. Como $p^i * y^i = 0$ e $p^i * y \leq 0$, segue que $p^i * y \leq p^i * y^i$, que é o que se deseja mostrar. Logo, $3 \Rightarrow 1$.

## Funções homotéticas

É possível generalizar o conceito de uma função homogênea, a função homotética, e ainda obter uma condição fácil de ser empiricamente verificada, que permite testar se os dados foram gerados por esse tipo de função. Como nos casos anteriores, é admitido que os agricultores minimizem os custos, restritos ao mesmo conjunto de produção.

**Definição 11** *A função de produção $f(x)$ é homotética quando se expressar pela composição de duas funções, a primeira monótona crescente e a segunda, homogênea: $f(x) = g(h(x))$. Para nossa exposição, $g(h)$ é monótona crescente estrita e $h(x)$ homogênea.*

**Teorema 7** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma função de produção homotética que cf-racionaliza os dados.*

2. *Existem números positivos $a^i$, i variando de 1 a n, tais que:*

   (*) $y^i > y^j \Rightarrow a^i > a^j$.

   (*) $v^j x^i \geq a^i / a^j$, *para todo j e todo i.*

3. *Há uma função de produção, contínua, semicôncava, monótono crescente e homotética que cf-racionaliza os dados.*

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

Seja $y = g(h(x))$, g uma função monótona crescente estrita e $h$ homogênea. A inversa de $g$ existe e é designada por $g^{-1}$. Logo, $g^{-1}(y^i) = h(x^i) = a^i$. Como $x^i \neq 0$ e *h(x)* é uma função de produção homogênea, segue que $a^i > 0$. Ora, $g^{-1}$ é também monótona crescente estrita, e disso resulta que $y^i > y^j \Rightarrow a^i > a^j$.

Os dados $(w^i, x^i, a^i)$, sendo os *v's* transformação dos *w's*, têm de ser consistentes com a condição 2 do teorema anterior, visto que *h(x)* é homogênea. Logo, tendo em vista que $h(x^i) = a^i$,

$$v^j * x^i \geq a^i / a^j ,$$

que implica em

$$a^i \leq a^j v^j x^i .$$

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Defina $u(x) = \min_j \{a^j v^j * x\}$. Na demonstração do teorema anterior, estudou-se uma função exatamente igual a essa, exceto que, em vez da letra *a,* usou-se a letra *y*. Logo, *u(x)* é contínua, côncava, homogênea e monótona, no sentido definido anteriormente, e $u(x^i) = a^i$.

Defina, pelo procedimento do teorema 2, a função $y = g(u)$, que é, obviamente, monótona crescente estrita e contínua. Logo, $f(x) = g(u(x))$ é a função desejada. É contínua, pois é composta de duas funções contínuas; é semicôncava, porque é transformada de uma função côncava por uma função monótona e, assim, homotética também.

Falta mostrar que *f(x)* cf-racionaliza os dados. Seja $f(x) \geq f(x^i)$. Deve-se mostrar que $1 = v^i * x^i \leq v^i * x$. Imagine ser possível ter $1 = v^i * x^i > v^i * x$. Como, por hipótese, $f(x) \geq f(x^i)$, então $u(x) \geq u(x^i) = a^i$, porque *g(u)* é monótona crescente em *u*. Mas

$$\underbrace{u(x) = a^k v^k * x}_{\text{por definição}} \leq a^i v^i x < a^i v^i * x^i = a^i.$$

De $u(x) < a^i$ e $u(x) \geq a^i$, segue que $u(x) = a^i$.

(iii) $3 \Rightarrow 1$

Construiu-se a função de produção que cf-racionaliza os dados. Ela é homotética, além de ter propriedades adicionais.

O próximo teorema introduzirá uma condição que também pode ser usada para verificar se uma função homotética racionaliza os dados. Lembre-se que, por definição, elimina-se a possibilidade de renda líquida infinita. Convém salientar que, quando se afirma a existência de uma função de produção, induz-se, imediatamente, a existência do conjunto de produção

$$V(y) = \{x : f(x) \geq y\}.$$

Os preços do produto e dos insumos estão divididos por $w^i * x^i$.

**Teorema 8** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma função de produção homotética que r-racionaliza os dados.*
2. *Os dados satisfazem a condição*

$$p^i * y^i - v^i * x^i \geq p^i * y^j - v^i * x^j.$$

3. *Existem números positivos* $a^i$ *tais que* $a^i \leq a^j v^j x^i$, *i e j variando, independentemente, de 1 a n.*

4. *Para cada subconjunto* $x^i, x^j, x^k, \ldots, x^m, x^i$ *de X, vale a relação* $(v^i x^j)(v^j x^k)\ldots(v^m x^i) \geq 1$.

*Essa condição pode ser verificada diretamente nos dados, embora seja muito trabalhoso.*

*Note que o subconjunto começa e termina com o mesmo elemento. Por exemplo,* $x^1, x^4, x^7, x^1$ *dá origem a* $(v^1x^4)(v^4x^7)(v^7x^1) \geq 1$.

5. *Existe uma função contínua, monótona crescente e homotética que r-racionaliza as observações*

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

Por definição (cf-racionalização, que vale para qualquer função),

$$p^i * y^i - w^i * x^i \geq p^i * y - w^i * x, \quad x \text{ e } x^i \in V(y).$$

Consideram-se os preços dos insumos normalizados pelo dispêndio, o que equivale a substituir $w^i$ por $v^i$,

$$y^i - v^i x^i/(p^i) \geq y - v^i x/(p^i), \quad x \text{ e } x^i \in V(y).$$

Na desigualdade acima, as substituições de $x$ por $x^j$ e de $y$ por $y^j$ levam à condição 2.

A desigualdade acima, depois de realizadas as substituições, pode ser reescrita de modo a facilitar seu uso posterior:

$$y^j \leq y^i + (1/p^i)v^i(x^j - x^i), \quad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Usa-se, agora, a condição 1 no que se refere à função homotética. Por definição, $f(x) = gh(x)$, em que $g$ é monótona crescente estrita, e $h$ é homogênea. Seguindo o procedimento do teorema anterior, define-se $a^i = h(x^i)$, e os $a^i$ têm as propriedades já vistas. Considere

$$v^j * x^i \geq a^i / a^j, \ \forall\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

desigualdade que pode ser reescrita como

$$a^i \leq a^j v^j * x^i, \ \forall\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

o que se desejava provar.

(iii) $3 \Rightarrow 4$

Demonstrar-se-á que a desigualdade da condição 4 é válida para um subconjunto qualquer de $x^1, x^2, \ldots, x^n$ que obedeça à especificação do enunciado. Por exemplo, $x^i, x^j, x^k, \ldots \mathrm{x}^l, x^m, x^i$.

Em primeiro lugar, a desigualdade acima implica $\dfrac{a^i}{a^j} \leq v^j x^i$, para todo $i,j$. Seja, agora,

$$(v^i x^j)\ (v^j x^k) \geq (\frac{a^j}{a^i})(\frac{a^k}{a^j}) = \frac{a^k}{a^i}.$$

Portanto, $(v^i x^j)(v^j x^k)\ldots(v^l x^m) \geq \dfrac{a^m}{a^i}$.

Com $v^m x^i \geq \dfrac{a^i}{a^m}$, segue que $(v^i x^j)(v^j x^k)\ldots(v^l x^m)(v^m x^i) \geq 1$ que é o que se desejava demonstrar.

(iv) $4 \Rightarrow 5$

A condição 3 do enunciado sugere a função

$$u(x) = \min_{i} \{ a^i v^i x \}.$$

Essa função, velha conhecida, é contínua, monótona crescente e côncava. Poder-se-ia construir a função $g$ como no teorema anterior. Mas $f$ seria apenas semicôncava. Por isso, segue-se outro caminho.

• Pela definição de r-racionalização ou pela desigualdade (1),

$$y \leq y^i + (v^i / p^i)(x - x^i).$$

Equivalentemente,

$$y \leq y^i + (a^i v^i x - a^i v^i x^i)/(a^i p^i). \quad (*)$$

Como $x=0$, se $y=0$, então

$$0 \leq y^i - a^i v^i x^i /(a^i p^i).$$

Em (*), como $u(x) > 0$ se $x$ é diferente de zero, $v^i * x^i = 1$ e $u(x) \leq a^i v^i x$,

$$0 \leq y^i + 1/(a^i p^i)(u(x) - a^i).$$

Portanto, definindo

$g(u) = \min_{i} \{ y^i + (1/a^i p^i)(u\ (x) - a^i) \}$, obtém-se $g(u) \geq 0$.

• $g(u(x))$ é uma função contínua de $x$.

Seja $g(u(x)) \geq g(u(y))$. Então,

$$g(u\ (x)) \leq y^i + 1/a^i p^i (u\ (x) - a^i)$$

e

$$g\ (u\ (y) = y^i + 1/a^i p^i\ (u\ (y) - a^i),$$ para algum $i$.

Em conseqüência,

$$g\ (u(x) - g\ (u\ (y) \leq y^i +$$
$$(1/a^i\ p^i)\ (u\ (x) - a^i) - (1/a^i\ p^i)\ (u\ (y) - a^i),$$

$\forall\, i = 1,\ 2, \ldots, n,$

que pode ser reorganizada como

$$g(u(x) - g(u(y)) \leq (1/a^i\ p^i)\ (u(x) - u(y)).$$

Como $g(u(x)) \geq g(u(y))$, deduz-se que

$$\left|g(u(x)) - g(u(y))\right| \leq d\left|(u(x) - u(y))\right|.$$

Se $g(u(y)) \geq g(u(x))$, então

$$|\ g(u(y)) - g(u(x))\ | \leq d\left|u(y) - u(x)\right|,$$

Em que $d = \max_i\{1/a^i\ p^i\}$. Como $u(x)$ é função contínua, dado $\varepsilon > 0$ escolha $\delta > 0$ tal que $|x - y| \leq \delta$ implique

$$\left|(u(y) - u(x))\right| < \varepsilon/d.$$

Finalmente, quando $x$ e $y$ pertencem ao intervalo estabelecido, então

$$\left|\ g\ (u(x)) - g\ (u(y))\right| < \varepsilon.$$

Logo, $f(x) = g(u(x))$ é função contínua de $x$.

• A função $g(u)$ é monótona crescente estrita.

Basta verificar, na definição de $g$, que o lado direito cresce com $u$, para cada $i$ de 1 a $n$.

• A função $f(x) = g(u(x))$ é côncava em $x$.

Sejam $0 \le t \le 1$ e $z = tx + (1-t)y$. Seja $k$ o número que corresponde ao mínimo na definição de $g(u(z))$ e considere que $u(x)$ é função côncava. Então,

$$f(z) = g(u(z)) = y^k + (1/p^k a^k)(u(tx + (1-t)y) - a^k)$$

$$\geq y^k + (t\,1/p^k a^k)u(x) - a^k) \; + \; (1-t)(1/p^k a^k)(u(y)) - a^k)$$

$$= \underbrace{t \left| y^k + 1/p^k a^k u(x) - a^k \right|}_{\geq t f(x)} + \underbrace{(1-t) \left| y^k + 1/p^k a^k (u(y)) - a^k \right|}_{\geq (1-t) f(y)} .$$

As barras acima não denotam valor absoluto. Apenas isolam grupos de termos, como se fossem colchetes ou parêntesis.

Os seguintes fatos foram usados na seqüência de expressões acima: a definição de $g(u(z))$; $u(\mathrm{x})$é côncava em $x$; as definições de $g(u(x))$ e $g(u(y))$; $y^k = ty^k + (1-t)y^k$; e o mínimo obtido é menor ou igual ao que se obtém quando $k$ é usado. Logo, $f(z) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$, e $f$ é uma função côncava de seu argumento.

• A função $f(x) = g(u(x))$ é homotética.

É imediato, porque $u(x)$ é homogênea e g é monótona crescente em $u(x)$.

• A função $f(x)$ rf-racionalizada os dados

Por definição,

$$
\begin{aligned}
& p^i g(u(x)) - v^i * x \le p^i[y^i + (1/p^i a^i)\ (a^i v^i * x - a^i)] - v^i * x \\
& = p^i y^i - v^i x - 1 - v^i * x \\
& = p^i y^i - v^i * x^i,
\end{aligned}
$$

o que estabelece o resultado. A igualdade $v^i * x^i = 1$ foi utilizada.

## Funções separáveis

Uma das vantagens das funções separáveis está na agregação de dados. Consideram-se os insumos divididos em dois grupos e quer-se representar um dos grupos por apenas um número real. Nem sempre, porém, isso é possível para todo conjunto de observações. Estuda-se esse problema a seguir.

Sejam os conjuntos de insumos e dos respectivos preços representados da seguinte forma: insumos *(x,z)* e preços dos insumos *(w,q)*. A função de produção é representada por $f\ (x,z) = g\ (x,h(z))$, $g$ é estritamente crescente em *h*, e *h(z)* é função de produção contínua em *z*. Note que *h(z)* agrega *z* em *h(z)*.

**Definição 12** *A função f é separável se puder ser representada como* $f\ (x,z) = g\ (x,h\ (z))$, *g estritamente crescente em h, e h é uma função de produção contínua e definida no espaço que contém z.*

O próximo teorema procura estabelecer as condições necessárias para que as observações possam ser r-racionalizáveis por uma função de produção separável.

**Teorema 9** *São equivalentes as seguintes condições:*

1. *Existe uma função de produção separável que rf-racionaliza os dados.*

2. *Os dados satisfazem as seguintes condições:*

**a.** $y^j - (w^i/p^i)\,x^j - (q^i/p^i)\,z^j \leq y^i - (w^i/p^i)\,x^i - (q^i/p^i)\,z^i$ (1)

**b.** $q^i z^i > q^i z^j \Rightarrow h\,(z^i) > h\,(z^j)$

3. *Os dados satisfazem (1) acima e há números $a^i$ e $d^i$ maiores que zero para $i = 1, 2, \ldots, n$ tais que*

$$a^i \leq a^j + d^j q^j\,(z^i - z^j), \qquad i \text{ e } j = 1, 2, \ldots, n.$$

4. *Existe uma função de produção que é contínua, monótona, côncava e separável que rf-racionaliza os dados.*

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

Por definição, rf-racionalização significa

$$y - (w^i/p^i)\,x - (q^i/p^i)\,z \leq y^i - (w^i/p^i)\,x^i - (q^i/p^i)\,z^i.$$

Basta, então, substituir y por $y^j$, $x$ por $x^j$ e $z$ por $z^j$, e obtém-se a primeira parte.

Suponha que seja possível ter $h\,(z^j) \geq h\,(z^i)$ quando $q^i z^i > q^i z^j$. Como $g$ é estritamente crescente em $h$, então

$$f\,(x^i,\; z^j) \geq f\,(x^i,\, z^i).$$

O dispêndio em $x^i$ é o mesmo, quando se usa $z^i$ ou $z^j$. Mas o gasto com $z^i$ é maior do que com $z^j$, porque $q^i z^i > q^i z^j$. Logo, o lucro líquido da combinação $(x^i, z^i)$ é menor do que o da combinação $(x^i, z^j)$, que contraria 2 a.

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Utilize o procedimento do teorema 2 que está na seção números de Afriat.

(iii) $3 \Rightarrow 4$

A desigualdade $a^i \leq a^j + d^j q^j\ (z^i - z^j)$, $i$ e $j = 1, 2, \ldots, n$ sugere uma definição para *h(z)*:

$$h\ (z) = \min_j\ \{a^j + d^j q^j\ (z - z^j)\}.$$

É fácil mostrar-se que *h(z)* é estritamente crescente em *z*. Como

$$h\ (0) = a^k - d^k z^k,$$

em que $k$ é o índice que corresponde ao mínimo da definição de *h(0)*, *h(0)* pode ser negativo. Contorna-se o problema quando se adiciona $-h\,(0)$ ao lado direito da definição de *h(z)*. Assim, $h\,(0) = 0$.

Na definição inicial, tem-se $h\,(z^i) \leq a^i$. Se a desigualdade fosse estrita, então, para algum *m*,

$$h\ (z^i)\ =\ a^m\ +\ d^m q^m\ (z^i - z^m) < a^i.$$

Ora, essa desigualdade contraria uma das desigualdades do item 3 do enunciado do teorema. Logo, $h\ (z^i) = a^i$, para $i = 1,\ 2,\ \ldots, n$. Uma função, do ponto de vista formal, idêntica a essa aparece na demonstração do teorema 2. Segue que *h*(z) é ainda côncava e contínua.

Define-se agora $g\ (x,\ h\ (z))$. Da definição de rf-racionalização, escreve-se

$$y \leq y^i + (\ w^i / p^i)\ x + (q^i / p^i) z - (w^i / p^i) x^i - (q^i / p^i) z^i,$$

que pode ser reorganizada como

$$y \leq\ y^i + (w^i / p^i)\ (x - x^i) + (q^i / p^i)\ (z - z^i), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como $y \geq 0$, o lado direito não é menor que zero, mesmo quando $z = 0$. Trabalhe-se, agora, o termo $(q^i / p^i)\ (z - z^i)$:

$$(q^i / p^i)\ (z - z^i) = (1/d^i\ p^i)\ [d^i q^i (z - z^i) + a^i - a^i].$$

Há, então, a sugestão de substituí-lo por

$$(1/d^i\ p^i)\ (h\ (z) - a^i).$$

Está-se preparado para definir $g(x,\ h\ (z))$:

$$g(x,\ h\ (z)) = \min_i \left\{\ y^i + (w^i / p^i)\ (x - x^i) + (1/d^i p^i)\ (h(z) - a^i) \right\}.$$

Os exemplos anteriores permitem ao leitor, facilmente, demonstrar que essa função é contínua e côncava em *(x, z)* e monótona crescente em *h*. É óbvio que a função encontrada é separável.

É necessário demonstrar que *g(x, h (z))* racionaliza os dados. Pela definição de *g(x, h (z))*, virá

$$p^i g\ (x, h(z)) - w^i x - q^i z \leq p^i y^i + w^i (x - x^i) +$$
$$(1/d^i)\ (h(z) - a^i) - w^i x - q^i z.$$

Substituindo *h(z)* pela expressão da direita de sua definição, segue que

$$p^i g\ (x, h(z)) - w^i x - q^i z \leq p^i y^i + w^i (x - x^i) +$$
$$(1/d^i)(a^i + d^i q^i (z - z^i) - a^i)\ - w^i x - q^i z.$$

Depois de simplificações,

$$p^i g(x,h(z)) - w^i x - q^i z \leq p^i y^i - w^i x^i - q^i z^i,$$

que é o que se queria demonstrar.

**Aplicação da função separável**

Uma aplicação interessante é sugerida pelo seguinte problema: suponha que os preços do conjunto de fatores representados por $z$ variem, proporcionalmente, a um preço base, $q^i = t^i q^0$. Existe uma função de produção separável que racionalize os dados? A resposta é afirmativa, desde que se admita que os dados possam se rf-racionalizados por uma função de produção. Os índices referem-se, agora, a diferentes períodos.

Demonstração

Mostra-se que o item 3 do teorema 9 é satisfeito.

$$a^i = q^0 z^i,$$
$$q^i = t^i q^0.$$

Logo,

$$a^i = q^0 z^i = q^0 z^j + (1/t^j)(t^j q^0)(z^i - z^j)$$
$$= a^j + (d^j q^j)(z^i - z^j),$$

em que $d^j = 1/t^j$. Conseqüentemente, o teorema anterior se aplica e, recordando a definição de *h(z)*, segue que

$$h\ (\mathrm{z}) = q^0 z.$$

**Definição 13** *A função* $f(x,z)$ *diz-se aditivamente separável quando se decompõe na soma de duas funções de produção:* $f(x,z) = g(x) + h(z)$.

O próximo teorema estabelece as condições que se exigem dos dados para que eles possam ser rf-racionalizáveis pela soma de duas funções.

**Teorema 10** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Os dados são rf-racionalizáveis por* $g(x) + h(z)$.

2. *Existem números* $(g^i, h^i)$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *tais que os conjuntos de dados* $(w^i, x^i, g^i)$ e $(q^i, z^i, h^i)$ *satisfazem, cada qual, a condição (1) do item 2 do teorema anterior.*

3. *Existem números* $(g^i, h^i)$ *que satisfazem as desigualdades explicitadas a seguir:*

$$g^i \leq g^j + (w^j/p^j)(x^i - x^j), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

$$h^i \leq h^j + (q^j/p^j)(z^i - z^j), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \quad (2)$$

$$y^i = g^i + h^i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

4. *As observações podem ser rf-racionalizadas pela soma de duas funções de produção contínuas, monótonas crescentes e côncavas.*

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

A maximização da renda líquida, pelo agricultor $i$, é, no caso, formulada como se segue:

$$\max_i \left\{ (p^i g(x) - w^i x) + (p^i h(z) - q^i z) \right\}.$$

É fácil compreender que cada parcela entre parêntesis é maximizada. Como se admitiu que cada agricultor maximizou sua renda líquida para gerar as observações, isso por sua vez, no caso de um número finito de observações, requer

$$p^i g(x) - w^i x \leq p^i g(x^i) - w^i x^i$$

e

$$p^i h(z) - q^i z \leq p^i h(z^i) - q^i z^i$$

Essas desigualdades podem ser reescritas como

$$g\ (x) \leq g\ (x^i) + (w^i / p^i)\ (x - x^i)$$

e

$$h\ (z) \leq h\ (z^i) + (q^i / p^i)\ (z - z^i).$$

Substituindo x por $x^j$ e $z$ por $z^j$ nas desigualdades acima, segue, para *g(.)* e *h(.)*, a desigualdade (1) da condição 2 do teorema 9.

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Definindo $g^i = g\ (x^i)$ e $h^i = h\ (z^i)$, as substituições de $x$ por $x^j$ e de $z$ por $z^j$ produzirão

$$g^j = g(x^j) \leq g^i + (w^i / p^i)(x^j - x^i), \text{ para todo } i = 1, 2. \ldots, n$$

e

$$h^j = h\ (z^j) \leq h^i + (q^i / p^i)(z^j - z^i), \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(iii) $3 \Rightarrow 4$

Nas desigualdades acima, observe que o lado direito é não negativo. Elas sugerem as seguintes definições:

$$g(x) = \min_i \left\{ g^i + (w^i / p^i)(x - x^i) \right\},$$
$$h(z) = \min_i \left\{ h^i + (q^i / p^i)(z - z^i) \right\}.$$

As duas funções são crescentes, respectivamente em $x$ e $z$, e foram estudadas no teorema 4. Elas são, portanto, funções monótonas crescentes, contínuas e côncavas em $x$ e $z$. Considerando, cuidadosamente, as definições acima, segue que

$g(x^i) = g^i$ e $h(z^i) = h^i$. Logo, $g(x^i) + h(z^i) = y^i$.

Seja $f(x,z) = g(x) + h(z)$. Falta mostrar que $f(x,z)$ racionaliza os dados.

Considerando as definições de $g(x)$ e $h(z)$, tem-se

$$p^i g(x) + p^i h(z) - w^i x - q^i z \leq p^i g^i + w^i (x - x^i) +$$
$$p^i h^i + q^i (z - z^i) - w^i x - q^i z.$$

Realizando as simplificações óbvias, virá

$$p^i g(x) + p^i h(z) - w^i x - q^i z \leq (p^i g^i - w^i x^i) + (p^i h^i - q^i z^i).$$

Demonstra-se, assim, que as observações são rf-racionalizáveis.

(iv) $4 \Rightarrow 1$

A demonstração é óbvia, visto que as funções construídas racionalizam as observações.

# Os números de Afriat

Uma pequena incursão na teoria das relações preparará o caminho para o estudo dos números de Afriat.

## Relações de ordem: caso geral

Sejam $X$ um conjunto qualquer, $a \in X$ e $b \in X$ . Escreve-se $aRb$ para dizer que $a$ e $b$ estão ligados pela relação $R$.

Exemplo 1: $X$ compõe-se dos habitantes de uma cidade qualquer. $aRb$ significa $a$ é pai de $b$.

Exemplo 2: No exemplo anterior, faça $R$ significar $a$ é irmão de $b$.

Exemplo 3: $X$ compõe-se de cestas de mercadorias. $R$ significa $a$ pesa mais que $b$.

Requerem-se certas propriedades das relações.

a. A relação $R$ é **reflexiva** se $aRa$. Nos exemplos 1 e 3, $R$ não é reflexiva, porque $a$ não pode ser pai de si mesmo, e a cesta $a$ não pode pesar mais do que ela mesma. No exemplo 2, $R$ é reflexiva.

b. A relação $R$ é **transitiva** se $aRb$ e $bRc$ implicarem $aRc$. A relação $R$ do exemplo 1 não é transitiva. A relação $R$ dos dois outros exemplos é transitiva.

Essas duas propriedades são as utilizadas no desenvolvimento dos números de Afriat.

c. A relação $R$ é **simétrica** se $aRb \Rightarrow bRa$. Apenas no exemplo 2, a relação $R$ é simétrica.

d. A relação $R$ é completa se $a \in X$ e $b \in X$ implicarem $aRb$ ou $bRa$. Ou sejá, dois elementos são sempre comparáveis pela relação R. Apenas o exemplo 3 apresenta uma relação completa.

Outro conceito importante é o de elemento maximal. Dado $m$ pertencente a $X$, $m$ é **maximal** se $aRm$ implicar $mRa$. Não se exige que todo elemento de $X$ seja comparável com $m$. Em conjuntos finitos, quando se admite que $R$ é reflexiva e transitiva, o elemento maximal sempre existe. Não é único, necessariamente. Pode até ocorrer que todo elemento seja maximal. Numa relação, em que cada elemento é só comparável consigo mesmo. Então, cada elemento é maximal. Apresenta-se o algoritmo que calcula o elemento maximal de um conjunto finito, quando *R* é reflexiva e transitiva.

## Cálculo do elemento maximal de um conjunto finito

1. Sejam $I = \{1, 2, ..., n\}$, $X = \{x^1, x^2, ..., x^n\}$ e uma relação *R*, reflexiva e transitiva, definida em $X \; x \; X$. É possível que dois elementos quaisquer de *X* sejam iguais.

2. Faça $b^0 = x^1$. Como $x^1 Rb^0$, então $b^1 = x^1$ e $m = 1$. Se $x^2 Rb^1$, faça $b^2 = x^2$ e $m = 2$; caso contrário, permanece $b^1 = x^1$ e *m* não sofre mudança, permanece *m*=1, ou seja, não se define um novo *b*. Pela transitividade de *R*, observa-se que $b^2 Rb^1$. Continue com mesmo procedimento até atingir o elemento $x^n$ e ter-se definido $b^m$. Por exemplo, seja a vez de $x^i$, e $b^h$ tenha sido o último *b* definido. Se $x^i Rb^h$ $(h < i)$, faça $m = h + 1$ e $b^{h+1} = x^i$; caso contrário, não se define um novo *b*. Se, depois de $x^i$, não houver nenhum $x^j$ tal que $x^j Rb^i$, então $b^i = b^m$ é maximal e, por ele, descobre-se o elemento maximal, ou seja, o *x* maximal. Observe que $b^m Rb^{m-1}$, $b^{m-1} Rb^{m-2}, ..., b^2 Rb^1$, e é aqui que se precisa da transitividade de *R* para concluir que $b^m Rb^q$ para $q \le m$, e usou-se a reflexividade de *R* quando o antecessor e o sucessor são iguais.

3. Deve-se demonstrar que $x^m$ é maximal. Imagine que $x^p Rx^m$. É preciso concluir que $x^m Rx^p$. Ora, *p*>*m* é impossível. Se isso tivesse ocorrido, ter-se-ia, no mínimo, mudado *m* para *m*+1, e $b^m$ não teria sido escolhido como elemento maximal. Se *p*=*m*, nada há que mostrar; se *p*<*m*, já se viu, acima, que existe *r* tal que $b^r = x^p$ e, porque $x^m Rb^i$, para $i \le m$, tem-se $x^m Rx^p$, que é o que se desejava provar.

Comentário: não se mostrou que $x^m$ seja único. Apenas se mostrou que se existir $x^p Rx^m$, então $x^m Rx^p$.

## Relação de ordem: caso específico

Especificar-se-á uma relação de ordem que permitirá derivar os números de Afriat. É baseada na idéia de que o agricultor revela preferência por uma combinação $x^j$ em relação a $x^i$, quando aquela for a escolhida apesar de custar o mesmo ou mais que do que esta. A definição especificará precisamente o conceito.

**Definição 14** *Seja* $X = \{x^i, x^2, ..., x^n\}$. *Diz-se que* $x^i R x^w$ *se houver uma seqüência* $x^i, x^j, x^k ..., x^r, x^w$, *início em i e fim em w, tal que* $w^i x^i \geq w^i x^j, w^j x^j \geq w^j x^k, ..., w^r x^r \geq w^r x^w$. *A seqüência pode ser qualquer uma que comece em i e termine em w, pode até ter somente* $x^i$ *e* $x^w$ *como elementos, e obedeça à relação de custos explicitada. A seqüência é resumida como* $x^i R x^j, x^j R x^k, ..., x^r R x^w$ *e produz y, que fica fixo.*

É elementar mostrar que essa relação é reflexiva. Fica fácil mostrar que ela é também transitiva quando se usa o simbolismo da definição. Como se viu, um conjunto finito, em que a relação definida prevaleça, tem um elemento maximal. Quando $w^i x^i \geq w^i x^j$ e $x^i$ foi escolhido, diz-se que $x^i$ revelou-se preferido a $x^j$. Mas $x^i$ pode ser *fortemente preferido a* $x^j$.

**Definição 15** $x^i$ *revelou-se fortemente preferido a* $x^j$, *em símbolos,* $x^i F x^j$, se $w^i x^i > w^i x^j$.

É óbvio que $x^i F x^j$ implica $x^i R x^j$. Suponha $x^i R x^j$. Nada impede a incongruência $x^j F x^i$. Mas, se há a esperança de cf-racionalizar os dados, ela tem de ser eliminada. A pressuposição abaixo cuidará de afastá-la.

**Pressuposição 5 (AFR)** *Se* $x^i R x^j$, *então* $x^j F x^i$ *é impossível. Ou seja, se* $x^i R x^j$, *então* $w^j x^j \leq w^j x^i$. *Batize essa pressuposição por AFR* (ante-fortemente revelada). *Essa condição é conhecida também por GARP (generalized axiom of revelead preference).*

Para simplificar a linguagem, introduz-se a definição de equivalência.

**Definição 16** *Se* $xRy$ *e* $yRx$, *então x e y são equivalentes,* $x \equiv y$. *Logo, se um elemento é maximal, ele só é equivalente a si mesmo.*

O leitor atento deve ter perguntado a si mesmo se é possível dar um exemplo, em que a relação definida seja válida? A resposta é afirmativa, como se verá depois de se aprender a calcular os números de Afriat.

## Cálculo dos números de Afriat

Sejam: $I = \{ 1, 2, ..., n \}$, $X = \{ x^1, x^2, ..., x^n \}$ e a relação $R$, reflexiva e transitiva, definida em $XxX$.

Etapa 1

Sejam $B(0) = \theta$, $I(1)=I$, $x^{m(1)}=maximal\{x^i : i \in I(1), x^i \in X\}$, $i=1, 2, ..., n$ e

$E(1)=\{j: x^j \, R \, x^{m(1)}, j \in I(1)\}$. Observe-se que $E(1)$ contém $m(1)$. Se $i$ e $j$ pertencerem a $E(1)$, então $x^i \, R \, x^j$ e $x^j R x^i$, ou seja, os correspondentes $x$'s são maximais e equivalentes,

$B(1)=E(1)UB(0)$. Logo, $B(1) = E(1)$ e contém $x^{m(1)}$.

Defina $u^{m(1)}=1=r^{m(1)}$. Se $i \in E(1)$, faça $u^i = u^{m(1)}$ e $r^i = r^{m(1)}$. A seguinte desigualdade é verdadeira:

$$u^i \leq u^j + r^j w^j (x^i - x^j), i \in B(1), j \in E(1).$$

Como os $u$'s e os $r$'s são iguais a 1, deve-se mostrar que

$$w^j (x^i - x^j) \geq 0 \text{ para } i \in B(1) \text{ e } j \in E(1).$$

Suponha que não. Então, $w^j * x^j > w^j * x^i$, que implica $x^j F x^i$. Como *i* pertence a *E(1)*, *j* pertence a *B(1)* e *E(1)=B(1)*, segue que $x^i R x^j$, como se viu, e, assim, a pressuposição 5 é violada.

Etapa 2

*I(2)=I(1)\E(1)*, que equivale à diferença entre os conjuntos *I(1)* e *E(1)*. Não constam de *I(2)* os índices correspondentes aos elementos maximais de *E(1)*.

$x^{m(2)} = maximal\{x^j : j \in I(2)\}$

$E(2)=\{j: x^j\ R\ x^{m(2)}\ e\ j \in I(2)\}$. *E(2)* novamente contém os índices de elementos maximais equivalentes a *m(2)*.

*B(2)=E(2)UB(1)=E(2)U E(1)*. Note que *E(2)* está contido em *B(2)*.

$$u^{m(2)} = \min_{i,j}\{u^j + r^{m(1)} w^j (x^i - x^j), u^{m(1)}\}, i \in E(2), j \in B(1).$$

Nota-se que se usa o $r=r^{m(1)}$, definido na etapa anterior, sendo $u^{m(2)} \leq u^{m(1)}$. Se *i* pertencer a *E(2)*, faça $u^i = u^{m(2)}$. A definição implica na desigualdade

$$u^i \leq u^j + r^{m(1)} w^j (x^i - x^j\}, i \in E(2), j \in B(1).$$

Calcula-se $r^{m(2)}$ pela fórmula

$$r^{m(2)} = \max_{i,j}\{\frac{u^j - u^i}{w^i (x^j - x^i)}, r^{m(1)}\}, i \in E(2), j \in B(1).$$

Note que o numerador é não negativo. Precisa-se mostrar que o denominador é positivo. Assim, se assegura que $r^{m(2)}$ é bem definido e é maior ou igual a 1. Admita que o denominador possa ser zero ou negativo. Isso implica $w^i * x^i \geq w^i x^j$. Logo, $x^i R x^j$. Deve-se mostrar que isso é impossível quando $i$ pertence a $E(2)$ e $j$ pertence a $B(1)$. Ora, por construção, $B(1) \cap E(2) = \theta$, e $x^i\ R\ x^j$ implica que $i \in B(1)$, que é uma contradição. A contradição prova que o denominador é positivo. Se $i$ pertence a $E(2)$, defina $r^i = r^{m(2)}$. Cuida-se da possibilidade de algum $u$ e todos os subseqüentes serem negativos, mais abaixo.

Etapa k

Definições

$I(k)=I(k-1)\backslash E(k-1)$,

$x^{m(k)}=maximal\{x^j : j \in I(k)\}$.

$E(k)=\{j: x^j\ R\ x^{m(k)}\ e\ j \in I(k)\}$, ou seja, $E(k)$ contém os elementos equivalentes a $x^{m(k)}$.

$B(k)=E(k)UB(k-1)=E(k)U\ E(k-1)U...UE(1)$.

Note que $B(k-1) \cap E(k) = \varnothing$.

$$u^{m(k)} = \min_{i,j}\{u^j + r^{m(k-1)} w^j (x^i - x^j\}, u^j\}, i \in E(k), j \in B(k-1).$$

Se $i$ pertencer a $E(k)$, então faça $u^i = u^{m(k)}$.

Defina

$$r^{m(k)} = \max_{i,j}\{\frac{u^j - u^i}{w^i(x^j - x^i)}, r^{m(k-1)}\}, i \in E(k), j \in B(k-1).$$

Se $i$ pertencer a $E(k)$, faça $r^i = r^k$ e $u^i = u^{m(k)}$. Note que $1 = r^{m(1)} \leq r^{m(2)} \leq ... \leq r^{m(k)}$ e os $u$'s são decrescentes.

A definição de $r^{m(k)}$ implica $r^{m(k)}\, w^i(x^j - x^i) \geq u^j - u^i$, em que $i$ pertence a $E(k)$ e $j$, a $B(k\text{-}1)$.

Ou ainda,

$u^j \leq u^i + r^{m(k)}\, w^i(x^j - x^i)$, em que $i$ pertence a $E(k)$ e $j$, a $B(k\text{-}1)$ (1).

Observe que $u^i \leq u^k$. O numerador é não negativo e o leitor deverá mostrar que o denominador é positivo, empregando o argumento da etapa 2 e, para isto, notando que $B(k-1) \cap E(k) = \varnothing$. Continuando o procedimento, encontra-se $I(f) = \phi$ para algum $f$ menor ou igual a $n$. O processo termina na etapa anterior.

Se algum $u$ for zero ou negativo, considere o maior valor absoluto. Adicione aos $u$'s uma constante maior que esse valor. Os $r$'s não são afetados, nem as desigualdades obtidas. Assim, os $u$'s e $r$'s são todos positivos.

Etapa final

Resta mostrar que

$$u^i \leq u^j + r^j w\ (x^i - x^j),\ \forall\ i, j.$$

(*) Se $i=j$, a desigualdade é óbvia.

(**) Se $i$ é diferente de $j$, então $i$ e $j$ pertencem a $E(r)$ para algum $1 \leq r \leq n$. Neste caso, por construção, $u^i = u^j$ e $r^i = r^j$. Basta mostrar, finalmente, que $w^i(x^i - x^j) \geq 0$. Admita que não. Então, $w^j x^i < w^j x^j$, o que implica que $x^j\ F x^i$. Como em $E(r)$, $x^i\ R x^j$, a pressuposição 5 é violada.

(***) $i$ diferente de $j$ e $i$ pertence a $E(h)$ e $j$ pertence a $E(k)$ e $h<k$. Ora, $i$ pertence a $B(h)$, pela definição de $B(h)$. Nesse caso, a desigualdade é verdadeira, como se mostrou na etapa $k$.

(****) Sejam $j$ em $E(k)$ e $i$ em $E(h)$, $h < k$ (observe a fórmula que determina $u^i$).

Acabou-se de verificar que cada etapa calcula corretamente os *u's* e *r's*. Dessa forma, quando o procedimento termina, os *u's* e *r's* são corretamente obtidos. Os *r's* são maiores ou iguais a 1. Se algum *u* for negativo, todos os subseqüentes também o são. Escolha aquele de maior valor absoluto e adicione a todos os *u's* uma constante maior que o maior valor absoluto. As desigualdades continuarão válidas, como o leitor poderá, facilmente, observar. Não se mudará qualquer *r*.

Retorne ao teorema 2. Pretende-se mostrar que as condições 2 e 3 daquele teorema implicam a existência de uma relação que é transitiva e reflexiva e que satisfaz AFR. Os números de Afriat podem ser calculados para ela.

A informação requerida é a seguinte: dados duas combinações $x^i$ e $x^j$, são elas comparáveis ou não? Se forem, qual é o resultado? Ou seja, tem-se $x^i R x^j$ ou $x^j R x^i$? Ou ambos, quando as duas combinações são equivalentes?

O teorema garante que $y^j \leq y^i$ implica $w^j x^j \leq w^j x^i$. Isso não permite dizer nada sobre as comparações.

Defina $x^j R^d x^i$ se $w^j x^j \geq w^j x^i$. Além do mais, $x^i R^d x^i$. Logo, $R^d$ é reflexiva. É fácil verificar que $R^d$ é uma relação transitiva.

O defeito de $R^d$ é que ela deixa muitos pares de elementos sem uma resposta, quanto a quaisquer dois deles serem comparáveis ou não. Precisa-se estender $R^d$ de modo a englobar mais pares de combinações de insumos nas comparações e, ainda, obter uma relação transitiva: ou seja, o fecho transitivo de $R^d$.

Um método é este: diz-se que $x^i R x^j$ se existir um subconjunto $\{i,k,l,\ldots,p,j\}$ de $I=\{1, 2,\ldots,n\}$, chamado rota, tal que: $x^i R^d x^k$, $x^k R^d x^l \ldots, x^p R^d x^j$. Apresentar-se-á um algoritmo para esse fim.

As condições 2 e 3 do teorema abaixo garantem que *R* satisfaz AFR. Para facilitar ao leitor, repete-se o enunciado do teorema.

**Teorema 2**

*As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma função contínua que cf-racionaliza as observações.*
2. *Se* $y^j \leq y^i$, *então* $w^j * x^j \leq w^j x^i$.
3. *Se* $y^j < y^i$, *então* $w^j * x^j < w^j x^i$.
4. *Existem números positivos*[6] $r^j$ *e* $u^j$ *tais que*

   *(i)* $y^i > y^j \Rightarrow r^i > r^j$.

   *(ii)* $u^i \leq u^j + r^j\ w^j * (x^j - x^i),\ \forall\ i,\ j = 1, 2, ..., n.$

5. *Existe uma função contínua, semicôncava e monótona que c-racionaliza as observações;*

**Teorema 11** *As condições 2 e 3 implicam que R definida acima satisfaz AFR (pressuposição 5).*

Demonstração

Suponha que se tenha $x^i R x^j$ e $x^j F x^i$. Mas $x^j F x^i$ implica $w^j x^j > w^j x^i$. Pela condição 3, tem-se $y^j > y^i$, pois se $y^j \leq y^i$, então a mesma condição implicaria $w^j * x^j \leq w^j * x^i$. Mas $x^i R x^j$ implica que existe uma rota $i, k, l, ..., p, j$ tal que $w^i x^i \geq w^i x^k, \geq ..., w^p x^p \geq w^p x^j$. Ora, pela condição 2 do teorema 2 acima, $w^i x^i \geq w^i x^k$ implica $y^i \geq y^k$. Prosseguindo, conclui-se: $y^i \geq y^k, \geq y^l \geq, ..., \geq, y^p \geq y^j$. Logo, $y^i \geq y^j$. Isso contradiz $y^j > y^i$, obtido acima.

[6] Eles são conhecidos por números de Afriat.

Cabe mostrar que $y^i > y^j$ implica $r^i > r^j$. Suponha que não, ou seja, que $r^i \leq r^j$. A seqüência de *r's* é crescente, como se viu. Portanto, $r^i$ foi calculado antes de $r^j$. Suponha que *j* pertença a *E(p)*. Certamente, *i* pertencerá a *B(p-1)*. Mas $E(p) \cap B(p-1) = \emptyset$, como se viu. Logo, *j* não pertence a *B(p-1)* e, portanto, $x^j R x^i$ é impossível. Logo, $w^j x^j < w^j x^i$ e, pela condição3 do teorema 2, segue que $y^j < y^i$, o que contradiz a hipótese feita no começo do parágrafo.

# A extensão de $R^d$

Apresenta-se um algoritmo que permite estender $R^d$. Ou seja, se $w^i x^i < w^i x^j$, então ou se verificará que existe uma rota que comece em *i* e termine em *j* e que permite concluir que $x^i R x^j$, ou se mostrará que os dois elementos não são comparáveis. Neste último caso, não existe nenhuma rota que permite concluir que $x^i R x^j$.

O algoritmo é desenvolvido em matrizes. Para estimular a imaginação, (*i*, *j*) representa um viagem de *i* a *j*. Se $x^i R^d x^j$, então a rota direta de *i* a *j* é possível, e o custo atribuído a ela será igual a 1. Caso contrário, a rota é impossível e a ela se atribui o custo $\infty$. Pode haver uma rota que, indiretamente, nos leve de *i* a *j* e que custe menos do que $\infty$? O algoritmo dirá se ela existe. Observe que se estende $R^d$ para uma relação *R* que é transitiva.

## Detalhes do algoritmo

1. A primeira coisa é organizar a matriz *C*, a partir dos dados. O elemento genérico $c_{ij}$ representa o custo da rota direta. Logo, $c_{ij} = 1$ ou $c_{ij} = \infty$. Se $c_{ij} = 1$, então se verificou $w^i x^i \geq w^i x^j$. Se $w^i x^i < w^i x^j$, então a rota direta é impossível, e $c_{ij} = \infty$. Assim, cada célula da matriz *C* é 1 ou $\infty$. Para facilitar a visualização do par de insumos comparado, adicionam-se filas de *x's* à matriz (primeira linha e primeira coluna).

$$C = \begin{array}{cc} i/j & \begin{matrix} x^i & x^2 & \ldots & x^j & \ldots & x^n \end{matrix} \\ \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ x^i \\ x^n \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2j} & \ldots & c_{2n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ij} & \ldots & c_{in} \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

2. A partir de $C$, constrói-se $C^1$. Como proceder? Um elemento $c_{ij}$ da matriz $C$ é comparado com a soma de dois outros: a primeira parcela é o primeiro elemento da linha em que $c_{ij}$ está; a segunda parcela é o primeiro elemento da coluna em que $c_{ij}$ se encontra. A regra é a seguinte: se $c_{ij} > c_{i1} + c_{1j}$, faça, em $C^1$, $c_{ij} = c_{i1} + c_{1i}$; caso contrário, não modifique $c_{ij}$. Ou seja, compare a rota direta $(i, j)$ com $(i, 1)$ e $(1, j)$. Portanto, deve-se somar o custo de $i$ a 1 com o de 1 a $j$. Se essa rota, que é mais longa que a direta, custar menos, escolha seu custo. A rota longa custará 2 ou $\infty$. Será preferida se custar 2 e a direta custar $\infty$. Mais formalmente, se em $C$ o que se tem é $c_{ij} = 1$, então a rota $(i, j)$ não será, obviamente, mudada, porque o lado direito da desigualdade é 2 ou infinito; a mudança ocorrerá se $c_{ij} = \infty$ e o lado direito for igual a 2. Quando os lados esquerdo e direito valem $\infty$, não há mudança. Complete os cálculos para todas as rotas $(i, j)$, comparando-as com $(i, 1)$ e $(1, j)$ da matriz $C$ e obtenha a matriz $C^1$. Note que, em $C^1$, vale $c^1_{ij} \leq c_{i1} + c_{1j}$, porque, quando há mudança, prevalece a igualdade; quando não há mudança, o lado direito é maior ou os dois lados da igualdade são iguais a $\infty$. Observe que em $C^l$ as entradas da matriz valem 1, 2 (= $2^1$) e $\infty$. Note que quando uma entrada de $C$ vale 1 (finita, portanto), ela não é mudada.

3. Construa $C^{k+1}$ a partir de $C^k$. Compara-se, na matriz $C^k$, $(i, j)$, a rota direta, com $(i, k)$ e $(k, j)$, variando $j$ e $i$. Se, na matriz $C^k$,

$$c_{ij} > c_{ik} + c_{kj},$$

faça $c_{ij} = c_{ik} + c_{kj}$; caso contrário, não mude $c_{ij}$. Complete os cálculos para todas as entradas de $C^k$.

Em $C^{k+1}$, pelo procedimento adotado, vale a desigualdade $c_{ij}^{k+1} \leq c_{ik}^k + c_{kj}^k$. As entradas de $C^{k+1}$ pertencem ao conjunto $\{\infty, 1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$.

4. Da mesma maneira, pode-se obter $C^n$ de $C^{n-1}$. Ressalta-se, contudo, que se em $C^k$ não houver nenhuma entrada igual a $\infty$, então o procedimento termina nessa etapa.

5. Como construir a rota longa em $C$? Digamos que em $C$ se tenha $c_{ij} = \infty$ e que $c_{ij}^1 = 2$ (finito, portanto). Pelo procedimento adotado, tem-se, em C, $c_{ij} > c_{i1} + c_{1j}$. Logo, os termos do lado direito dessa inequação são finitos. Portanto, quando houver mudança de um valor infinito em $C$ para um finito em $C^1$, é possível construir uma rota de custo finito para ir de $i$ a $j$, como $(i, j)$: $(i, 1)$, $(1, j)$.

6. Admitindo que isso seja verdadeiro em $C^k$, mostraremos que o é também em $C^{k+1}$. Ora, $c_{ij}^{k+1} \leq c_{ik}^k + c_{kj}^k$. Como o lado direito pertence a $C^k$, pela hipótese da indução, para cada um de seus membros existe uma rota de custo finito. Com isso, mostra-se que toda vez que uma entrada de $C$, de valor infinito, muda, numa dada etapa, para um valor finito, pode-se construir uma rota de custo finito. Para os elementos de $C$ de valor finito, vale a rota direta. Nota-se ainda que, se em $C^k$, os dois termos do lado direito da inequação acima tiverem valores iguais a 1 em $C$, então vale a rota $(i, j)$: $(i, k)$, $(k, j)$ em $C$.

Os resultados obtidos por Varian (1982, 1983, 1984, 1985) foram generalizados para cobrirem situações que envolvem risco e quando alguns insumos são fixos. Na próxima seção, serão vistos o caso de insumos fixos e as peculiaridades de situações que envolvem risco.

# Extensões

No desenvolvimento acima, duas questões importantes foram deixadas de lado: a existência de insumos fixos e a presença do risco. Estes dois assuntos são abordados abaixo.

## Insumos fixos

Duas razões são alegadas para a presença de insumos fixos, ou seja, insumos que não são variáveis de escolha no processo de decisão. A mais respeitável delas é tratar-se do curto prazo, em que o agricultor não tem condições de adquirir, arrendar, ou vender determinados fatores de produção. A outra diz respeito a imperfeições do mercado de terra e de capital que dificultam, quando não impedem, que determinados grupos de agricultores rapidamente se ajustarem às mudanças dos preços relativos. No Brasil, esses mercados, pelo menos nas regiões em que a maior parte da produção ocorre, funcionam relativamente bem.

Recentemente, Ray e Bhadra (1993) ofereceram uma extensão do método de Varian, de modo que insumos fixos possam ser explicitamente considerados. O que se procura fazer é modificar o desenvolvimento que fizeram de modo a não fugir do esquema de Varian. Contudo, chega-se à mesma conclusão. Usam-se os símbolos da seção "Test of Variable Cost Minimization (p. 992)" para facilitar ao leitor que queira também ler o trabalho dos dois autores.

Representa-se o vetor de insumo por $(u,z)$: $u$ representa a combinação de insumos variáveis e $z$, a de insumos fixos. O preço do insumo é representado por $(w_v, w_f)$. Os índices $i$ e $j$ continuam atrelados às observações.

Cada agricultor tem um limite superior para a combinação dos insumos considerados fixos, o qual não pode ser ultrapassado. Menos do que o teto pode ser usado. Por exemplo, não é preciso plantar toda a área que está disponível para lavouras. Máquinas e equipamentos não precisam ser usados em sua plena capacidade. Mas se o insumo é fixo, no conceito acima, o teto não pode ser aumentado por aquisição ou arrendamento. Obviamente, mesmo que se fique abaixo do limite superior, o custo fixo é imputado sobre o limite superior.

O conjunto de produção é representado por

$$V(y^i/z^i)=\{(u,z): z\leq z^i \text{ e } (u,z) \text{ produz } y^i\}.$$

Na definição desse conjunto de produção, reside a diferença entre nosso procedimento e o dos dois autores. Não se admite que ele seja subconjunto de qualquer outro conjunto, como eles fizeram. Reformulem-se as pressuposições 1 e 2.

**Pressuposição 6 (encadeamento de conjuntos)** *A família de conjuntos de produção é encadeada quando se verifica o seguinte: se* $y\leq q$, *então* $V(q/z)\subset V(y/w)$, *quaisquer que sejam* $z$ *e* $w$, $z\leq w$, *sendo* $z$ *e* $w$ *combinações de insumos fixos.*

**Pressuposição 7 (monotonicidade)** *Se* $(u,w)$ *pertencem a* $V(y/z)$, *então, se* $t\geq u$, $(t,w)$ *pertencem a* $V(y/z)$.

**Definição 17 (c-racionalização)** *Considerando* $z\leq z^i$, *as observações são c-racionalizáveis se para todo* $i=1,2,...,n$, quando

$$w_v^i u^i + w_f^i z^i \leq w_v^i u + w_f^i z \text{ e } (u,z)\in V(y^i/z^i).$$

A demonstração do teorema que se segue em nada difere daquel do teorema 1.

**Teorema 12**

1. *Há um conjunto de produção,* $V\ (y/z)$, *que c-racionaliza os dados.*

2. *Se* $y^i \leq y^j$ e $z^j \leq z^i$, *então* $w_v^i u^i + w_f^i z^i \leq w_v^i u^j + w_f^i z^j$.

3. *Há um conjunto de produção,* $V\ (y/z)$, *que é fechado e convexo e que c-racionaliza os dados.*

Demonstração

(i) $1 \Rightarrow 2$

Como os conjuntos de produção são encadeados, $V(y^j/z^j) \subset V(y^i/z^i)$, a definição de c-racionalização implica que a condição 2 do teorema é verdadeira.

(ii) $2 \Rightarrow 3$

Sejam $A\ (y/z)$ o subconjunto das observações que produzem pelo menos $y$ e a combinação de insumos fixos não ultrapassa o teto $z$. Construa o fecho convexo de $A\ (y/z)$ que é representado por $B\ (y/z)$. aprendeu-se que esse conjunto é compacto. Em seguida, construa a conjunto

$$V(y/z)=\{(x,w): w=z+p; x=u+s;\ (u,z)\in B\ (y/z);\ \text{s e } p\geq 0\}.$$

O conjunto $V\ (y/z)$ é fechado, pois é a soma de um conjunto fechado, $(s,p)\in R_+^m x R_+^m$ e do conjunto compacto $B(y/z)$. A demonstração da convexidade de $V\ (y/z)$ não oferece dificuldades.

Deve-se demonstrar que $V(y/z)$ c-racionaliza as observações. Seja *(u,z)* pertencente a $V\ (y/z)$. Como $0 \leq t \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{m} t^i = 1$ e, por definição, $u=\sum_{j=1}^{m} t^j u^j + s$ e $z=\sum_{j=1}^{m} t^j z^j + p$, em que $s$ e $p$ são não negativos e $m$ é o número de elemento de $A\ (y/z)$ e, ainda, $(u^i, z^i) \in A\ (y/z)$, conseqüentemente,

$$w_v^i u + w_f^i z + \sum_{j=1}^{m} [\ t^j w_v^i u^j + t^j w_f^i z^j\ ] + w_v^i s + w_f^i p.$$

Mas

$$[\ t^j w_v^i u^j + t^j w_f^i z^j\ ] \ \geq\ [\ t^j w_v^i u^i + t^j w_f^i z^i\ ],$$

pela condição 2 do teorema. Conseqüentemente,

$$w_v^i u + w_f^i u \ \geq\ (\ \sum_{j=1}^{m} t^j\ )\ (\ w_v^i u^i + w_f^i z^i\ ) + w_v^i s + w_f^i p.$$

Como $\sum_{j=1}^{m} t^j = 1$ e $w_v^i s + w_f^i p \geq 0$, segue que a condição 2 do teorema implica a condição 3.

É claro que a condição 3 implica a condição 2.

**Corolário** *Se as observações são c-racionalizáveis e* $y^i \leq y^j$ e $z^j = z^i$, *então* $w_v^i u^i \leq w_v^i u^j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração

A condição 2 do teorema estabelece que $y^i \leq y^j$ e $z^j = z^i$ implicam

$$w_v^i u^i + w_f^i z^i \leq w_v^i u^j + w_f^i z^j.$$

Como $w_f^i z^j = w_f^i z^i$, porque $z^j = z^i$ para todo $j$ = 1, 2, ..., $n$, segue que $w_v^i u^i \leq w_v^i u^j$ para $j$ = 1, 2, ..., $n$, como se desejava provar.

É fácil ver que a recíproca não é verdadeira.

## Presença de risco

Restringe-se a análise à c-racionalização. No caso, o vetor das observações é dado por $(w^i, x^i, y^i)$, $i = 1, 2..., n$. Admite-se, ainda, não haver erros de medição. O preço dos insumos é conhecido com certeza. A presença do risco está na produção. Tem-se, ainda, o conjunto *V(y)*, mas ele precisa ser acomodado à situação que envolve risco. Seja *y* observável. Então, define-se *V(y) =V(E (y))*:

$$V(E\ (y)) = \{\ x\!: x \text{ produz } z \text{ e é tal que } E(z) \geq E(y)\}.$$

Ou seja, *x* produz qualquer *z* cuja distribuição tem média igual ou maior que $E(y)$.

O que mudou? Anteriormente, aceitava-se a hipótese do **encadeamento**, *x* produzia pelo menos *y* e qualquer quantidade menor que *y*. Agora, *x* produz um conjunto de *z's*, cuja esperança matemática, designada pelo símbolo *E*, é maior ou igual a *E(y)*. Admite-se, pois, que é possível impor uma distribuição ao conjunto dos *z's* e que o primeiro momento dessa distribuição, a média, exista e que seja maior ou igual a *E(y)*. O leitor compreende a necessidade da adição outras hipóteses para cuidar de uma situação que envolve risco, as quais dizem respeito a *E*.

A definição de encadeamento precisa ser também ajustada.

**Definição 18** *A família de conjuntos* $V\,(E(y))$ *diz-se encadeada se* $E(y) \geq E(z)$ *implicar* $V(E(y)) \subset V(E(z))$.

Ou seja, admite-se que *y* e *z* pertençam a duas distribuições e se a média da distribuição de *y* for maior que a de *z*, então, se *x* produzir *y*, *x* também produzirá *z*.

A definição de c-racionalização, adaptada à condição de risco, é muito semelhante àquela dada.

**Definição 19 (c-racionalização)** *A combinação de insumos da i-ésima observação custa menos do que ou igual a qualquer outra combi-*

*nação que o i-ésimo agricultor escolher para produzir* $E(y^i)$, *quando restrito a seu conjunto de produção,* $V(E(y^i))$. *Em termos formais,*

$$w^i * x^i \leq w^i * x \text{ e } x \in V(E(y^i)),$$

*em que* $w * x$ *é igual à soma dos produtos das respectivas componentes de w pelas de x.*

O leitor deve ter percebido outra diferença em relação à situação em que não existe incerteza. O dado relevante para a análise é $(w^i, x^i, E(y^i))$, $i = 1, 2, ..., n$, e não $(w^i, x^i, y^i)$. E $E(y^i)$ não é observável. Na aplicação, deve-se encontrar uma *proxi* para $E(y^i)$. Ray e Bhadra (1993) mostram como encontrar uma *proxi.* A formulação teórica é, contudo, omitida e, por isso procurou-se desenvolvê-la.

O teorema que se segue é demonstrado exatamente como o teorema 1. O item 2 difere daquele do teorema 1 para acomodar a presença de incerteza. Observa-se ainda que a indiferença, a aversão e o gosto pelo risco não influenciam o resultado obtido que é, assim, válido para diferentes tipos de jogadores[7].

**Teorema 13** *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Há uma família encadeada de conjuntos de produção,* $V(E(y))$, *que c-racionaliza as observações.*

2. $E(y^j) \geq E(y^i)$ *implica* $w^i * x^j \geq w^i * x^i$.

3. *Existe uma família não trivial de conjuntos de produção, conjuntos esses que são convexos, fechados e satisfazem as pressuposições 1 e 2.*

Chavas e Cox (1993) procuraram estudar a influência que a incerteza possa ter quando a produção é certa e os preços incertos. O teorema 1 ainda é válido quando o agricultor é *indiferente ao risco.*

---

[7] O oponente do agricultor, no jogo sob análise, é a natureza.

# Testes de hipóteses

Pelo teorema 2, a condição relevante para o teste de hipótese se expressa asim:

$y_i \leq y_j$ implica $w_{i*} x_i \leq w_{i*} x_j$, $\forall i, j \in I$, $i \neq j$.

Há dois procedimentos a seguir. Em primeiro lugar, contam-se as divergências em relação às restrições expressas nas desigualdades acima. Para se obter o número de divergências, ordenam-se as observações do menor $y$ para o maior, obtendo-se os pares $(Y^i, C^i)$, em que $Y$ é a produção, por exemplo, a renda bruta é uma média de $Y$, e $C$ é o dispêndio total: se houver 4 insumos, a soma dos dispêndios neles equivale a $C$, e $i$ corresponde à observação. Então, $Y^1 \leq Y^2 \leq \cdots Y^n$. Se não houvesse erros, ter-se-ia $C^1 \leq C^2 \leq \cdots C^n$. Toma-se o par $(Y^1, C^1)$, compara-se $C^1$ com $C^2$ e, assim, sucessivamente. Ao todo, são realizadas $n$-$1$ comparações. Anotam-se os erros. Observe que $C^1 > C^i$, $i > 1$ é um erro. Faz-se o mesmo com $Y^2$, $n$-$2$ comparações são feitas e, assim, sucessivamente. No total, são feitas $n*(n-1)/2$ comparações[8]. Na prática, atribui-se 1 ao acerto e 0 ao erro. Para cada observação, somam-se os 1's, os acertos, portanto, e divide-se a soma pelo número de observações. A hipótese nula é 1. Sendo $p$ a proporção de acertos estimada, o intervalo de confiança pode ser aproximadamente estimado como $p \pm 1{,}96\sqrt{(\frac{p(1-p)}{n})}$, em que $n$ é o número de observações. Se o intervalo de confiança incluir 1, a hipótese nula não é rejeitada[9]. Também se pode obter o total de acertos e dividi-lo por $n^2/2$; agora, $n$ vale $n^2/2$.

---

[8] Caso considere a comparação consigo mesmo, isso resulta em $n^2/2$ comparações.

[9] Agradeço a sugestão de Geraldo da Silva e Souza, SGE-EMBRAPA. No caso de valores próximos de 1, a aproximação normal não deve ser usada, mas sim a tabela da binomial.

O segundo procedimento é o teste proposto por Varian (1982, 1983, 1984), que é elucidado por partes.

1. Tem-se a informação sobre o dispêndio em cada insumo $x$, mas esse dispêndio diverge do dispêndio ótimo, ou seja, da demanda $t$. É postulada a seguinte relação entre o dispêndio e a demanda: $t = x + x * \varepsilon$. Ou $\varepsilon = {}^{t}\!/\!_{x} - 1$. A vantagem de assim se proceder é que $t / x$ não depende das unidades de medida, como salientado por Varian (1985).

2. Minimiza-se a soma dos quadrados, cada insumo ($m$) e cada observação ($n$), mediante as restrições

$$Y = Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left[ \left( \frac{t_{ik}}{x_{ik}} \right) - 1 \right]^2$$

e

$$\sum_{k=1}^{m} w_{ik} t_{ik} \leq \sum_{k=1}^{m} w_{ik} t_{ij}, \ \forall j = 1, 2, \ldots, n, \ y_i \leq y_j.$$

3. Varian (1985) salienta que $T = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (z_{ik} - x_{ik})^2}{\sigma^2}$ tem distribuição de qui-quadrado com $mn$ graus de liberdade, e $z$ é a demanda não observada.

Pela fórmula com que $Y$ foi calculado, $Y / \sigma^2 \leq T$. Logo, ao se realizar o teste de qui-quadrado usando $Y / \sigma^2$ aumenta-se a chance de rejeição da hipótese nula.

Ora, desconhece-se $\sigma^2$. Seja $k_\alpha$ o valor crítico da tabela de qui-quadrado com $mn$ graus de liberdade. Fazendo $Y / \sigma^2 = k_\alpha$, e $Y$ é conhecido. então, $\sigma^2 = Y / k_\alpha$. Se o valor for relativamente pequeno, de acordo com a experiência do pesquisador, a hipótese nula não é rejeitada.

## Procedimentos de computação

O caso, que serve de exemplo, contém 75 observações e quatro insumos, o que gera 300 variáveis, quatro para cada observação. O preço dos insumos é igual a um. Novamente, ordenam-se os dados do menor para o maior *Y*. Mais detalhes em Souza (2003).

### 1. Programa SAS: teste da hipótese de Varian.

```
Proc nlp maxit=100000 maxfunc=100000 random=100 tech=congra absgtol=1e-20
min Y;   /*75 observações quatro insumos*/
parms h1-h300;
bounds h1-h300 >= 0 ;
/*bounds: alguns, o suficiente para o entendimento; note-se que é suficiente comparar-se a observação 1 com 2
e esta com a 3 e, assim, sucessivamente. Em cada linha, compara-se a observação com a seguinte */
lincon h1+h2+h3+h4-h5-h6-h7-8 <= 0; /* 1 a 4 refere-se à primeira observação, e 5 a 8 à segunda observação*/
lincon h5+h6+h7+h8-h9-h10-h11-h12 <= 0;
.....................................................................
lincon h293+h294+h295+h296-h297-h298-h299-h300 <= 0;
/* Construção da função objetiva; o denominador é o valor do respectivo insumo, dado coletado */
F1=(h1/3082.0 – 1)**2;
F2=(h2/7665.00 - 1)**2;
F3=(h3/15768.20 - 1)**2;
F4=(h4/1625.00 - 1)**2;
....................................
F297=(h297/102572.82 – 1)**2;
F298=(h299/31500.00 – 1)**2;
F299=(h299/281846.21 -1)**2;
F300=(h300/38500.00 – 1)**2;
Y= sum (of F1-F300);
run;
```

## 2. Computação de erros e acertos

```
data ordem;
input y x1 x2 x3 x4; /*xi= dispêndios, i=1,2,3,4 ;y renda bruta */
c=xi+x2+x3+x4;
q1=1;
q2=1;
Cards;
/* entrar os dados. No caso 114 observações ou qualquer outro
número /*
run;
proc sort; /* dados ordenado do menor para o maior y */
by  y;
run;
proc sort; /* artifício de computação*/
by q1;
run;
data jorge; /* Trata-se do data ordem, com os y's ordenados, as va-
riaveis x(i) captam os respectivos custos c, de modo que se possa fazer as
comparações */
array x(114) x1-x114;
do i=1 to 114 until(last.q1);
set ordem;
by q1;
x(i)=c;
end;
array w(114) w1-w114;
do i=1 to 114 until(last.q1);
set ordem;
by q1;
w(i)=c;
end;
array k(114) k1-k114; /* aqui são feitas as comparações=n(n-1)/2;
cria-se uma matriz 114x114;
de células que valem 0 ou 1; errado = 0; certo = 1;*/
Do i=1 to 114;
  do j=1 to 114;
```

```
    if j<i and w(j)>x(i) then k(j)=0;
    if j<i and w(j)<=x(i) then k(j)=1;
    if j=i then k(j)=1;
    if j>i and w(j)<x(i) then k(j)=0;
    if j>i and w(j)>=x(i) then k(j)=1;
    end;
  output;
  end;
  run;
  Proc print data=jorge;
  title 'Um contra todos';
  var k1-k114;
  run;
  Data jorge1; /* Data jorge tem 114 observações, cada Ki de k1-
k114, é comparada
  com cada um dos k's. O valor máximo da soma para cada k1, ou
seja para observação i, é 114*/
  set jorge;
  n=_N_;
  s=sum(of k1-k114);
  g=(s/114)*100;
  keep n k1-k114 s g;
  run;
  Proc sort;
  by s;
  run;
  proc print label data=jorge1;
  title1 'Um comparado com todos, soma';
  Title2 'Acerto na ordem=um e erro=0';
  var n s g ;
  label s='Soma acertos' n='Observação' g='Acertos/114*100' ;
  run;
```

# Referências

CHAVAS, J. P.; COX, T. L. On generalized revealed preference analyses. **The Quarterly Journal of Economics**, London, 108, p. 493-506, 1993.

NIKAIDO, H. **Convex structures and economic theory**. New York: Academic Press, 1968.

RAY, S. C.; BHADRA, D. Nonparametric test of cost minimizing behavior: a study of indian farmers. **American Journal of Agricultural Economics**, Iowa, v. 75, v. 4, p. 990-999, 1993.

SOUZA, D. F. **Avaliação de métodos paramétricos e não-paramétricos na análise da eficiência da produção de luta**. 2003. 136 f. Tese (Doutorado) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba.

VARIAN, H. R. Nonperemetral analyses of optmizing behavior with measurement error. **Journal of Econometrics**, v. 30, p. 445-458, 1985.

VARIAN, H. R. The nonparametric approach to demand analysis. **Econometrica**, Chicago, v. 50, p. 945-974, 1982.

VARIAN, H. R. The nonparametric test of consumer behavior. **Review of Economic Studies**, London, v. 50, p. 99-110, 1983.

VARIAN, H. R. The nonparametric approach to production analysis. **Econometrica**, Chicago, v. 52, p. 579-597, 1984.

*Impressão e acabamento*
***Embrapa Informação Tecnológica***

***O papel utilizado nesta publicação foi produzido conforme a certificação da Bureau Veritas Quality International (BVQI) de Manejo Florestal.***