

Busca sequencial de alvos intermediários em modelos DEA com soma de *outputs* constante

Eliane Gonçalves Gomes * João Carlos Correia Baptista Soares de Mello †

Marcos Pereira Estellita Lins ‡

* Embrapa Monitoramento por Satélite, SP, Brasil
eliane@cnpm.embrapa.br

† Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense, RJ, Brasil
jcsmello@sapo.pt

‡ Programa de Engenharia de Produção – Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lins@pep.ufrj.br

Abstract

Classic DEA models does not assume any kind of production equilibrium for the whole set of DMUs, i.e., the production of a given DMU does not affect the production of the others. Nevertheless, in some cases, the equilibrium should be addressed. In this paper we propose modifications in the classic DEA BCC model in order to consider that the sum of outputs is constant. The idea behind this approach can be thought of as a zero sum game, in which every player gains must be lost by one or more players. We present the proposed model, its general formulation and the output proportional reduction strategy. This is a non-linear model, which is solved through theorems that allows the immediate computation of targets and efficiencies, knowing the classic DEA model solution. However, some practical barriers can be found when trying to achieve the computed targets. We also propose a step-by-step search for achievable intermediate targets, which are on the iso-efficiency layers. This search can be done by a solely DMU or by co-operating DMUs.

Resumo

Uma suposição existente nos modelos DEA clássicos é a total liberdade de produção, ou seja, a produção de uma DMU não interfere na produção das demais. Em alguns casos, porém, esta liberdade não existe. É aqui proposta uma alteração no modelo DEA BCC clássico que considera estas limitações. Neste modelo a soma dos *outputs* é constante. Esta situação é semelhante à de um jogo com soma zero, no qual o que é ganho por um jogador é perdido pelos demais. São apresentadas sua formulação geral e uma estratégia de redução proporcional ao nível de *output*. Como o modelo obtido recai em Programação Não Linear, é demonstrado um teorema que permite sua solução imediata e o cálculo de

alvos e de eficiências, conhecendo-se a solução do modelo DEA clássico. Entretanto, podem ser encontradas barreiras práticas na realização em curto prazo dos alvos calculados. É, assim, proposta uma busca de alvos por etapas, com alvos intermediários nas camadas de iso-eficiência. A busca pode ser feita por uma única DMU ou por várias em regime de cooperação.

Keywords: DEA, Efficiency layers, Invariant production level, Zero Sum Gains DEA

Title: Step by step search for achievable intermediate targets in zero sum gains DEA model

1 Introdução

O objectivo da abordagem por Análise de Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) é avaliar a eficiência de unidades produtivas, chamadas de unidades de tomada de decisão (*Decision Making Units* – DMUs), ao comparar unidades que realizam tarefas similares e que distinguem-se umas das outras pelas quantidades de recursos (*inputs*) que consomem e de bens (*outputs*) que produzem (Cooper et al., 2000, Lins e Angulo-Meza, 2000). Além de identificar as DMUs eficientes, os modelos DEA permitem medir e localizar a ineficiência, e estimar uma função de produção linear por partes, que fornece o *benchmark* para as DMUs ineficientes. Esse *benchmark* é determinado pela projecção das DMUs ineficientes na fronteira de eficiência. A forma como é feita esta projecção determina a orientação do modelo. Orientação a *inputs* (quando deseja-se minimizar os recursos, mantendo-se os valores dos resultados constantes) e orientação a *outputs* (quando deseja-se maximizar os *outputs* sem diminuir os *inputs*) são as principais.

Os modelos DEA clássicos, tanto o modelo CCR (Charnes et al., 1978) quanto o modelo BCC (Banker et al., 1984), supõem total liberdade de produção, ou seja, a produção de uma DMU não interfere na produção das demais. Entretanto, em alguns casos esta liberdade não existe. No caso de competições, por exemplo, se for considerado como *output* um índice que agrega seus resultados (Soares de Mello et al., 2001; Gomes et al., 2001) [17, 10], a melhora de posição de qualquer competidor implica na perda de posição de um ou mais de seus adversários. Exemplificando com o caso dos Jogos Olímpicos, um país (DMU) que ganhasse medalhas extras ou melhorasse o nível das medalhas, automaticamente faria com que outros países deixassem de ganhar estas medalhas, ou seja, perderiam unidades de *output* (Lins et al., 2001).

Um outro exemplo é o caso da avaliação de eficiência de unidades produtivas que produzem um determinado produto cuja demanda é constante. Neste caso, uma certa DMU considerada ineficiente deverá produzir mais unidades do produto para atingir a fronteira de eficiência, com a conseqüente diminuição da produção das demais unidades.

É aqui proposta uma alteração no modelo DEA BCC clássico (Banker et al., 1984) que considera estas limitações. Este novo modelo será chamado de Modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ), já que apresenta situação semelhante à de um jogo com soma zero (Osborne e Rubinstein, 1999), no qual tudo o que é ganho por um jogador é perdido por algum outro(s). Ou seja, a soma líquida dos ganhos deve ser zero.

Neste novo modelo, ao contrário do que acontece nos modelos tradicionais, o modo como

uma DMU atinge seu alvo na fronteira, pode implicar na alteração da forma da fronteira eficiente. A busca por eficiência pode ser feita por uma única DMU ou por várias em regime de cooperação, o que conduz a um problema de Programação Não Linear Multiobjetivo.

Os gestores podem argumentar que é um salto extremamente grande tentar atingir a eficiência de uma só vez, sendo mais factível uma busca gradativa de alvos. Uma forma de determinar estes alvos intermediários, apresentada neste artigo, é buscá-los nas camadas de iso-eficiência, que representam diferentes níveis de utilização da tecnologia.

2 Formulação do modelo DEA com soma de *outputs* constante

A formulação clássica do modelo do envelope DEA BCC com orientação a *outputs*, usa para cada DMU o Problema de Programação Linear (PPL) apresentado em (I). Neste PPL, para a DMU o em análise, a eficiência é dada por $1/h_o$; x_j representam os *inputs*; y_j são os *outputs*; λ_j representam a contribuição da DMU j para a projecção da DMU o na fronteira. Esta projecção na fronteira de eficiência é o alvo a determinar.

$$\begin{aligned}
 & \max h_o \\
 & \text{sa} \\
 & \sum_j \lambda_j x_j \leq x_o \\
 & h_o y_o \leq \sum_j \lambda_j y_j \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{I}$$

A formulação geral do Modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) que, como descrito na primeira secção, considera a soma dos *outputs* constante, é a apresentada em (II) (Gomes et al., 2001) [9].

$$\begin{aligned}
 & \max h_{Ro} \\
 & \text{sa} \\
 & \sum_j \lambda_j x_j \leq x_o \\
 & h_{Ro} y_o \leq \sum_j \lambda_j y_j' \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{II}$$

Nesta formulação, a unidade em análise é igualmente a DMU o . h_{Ro} é o inverso da eficiência de DMU o no modelo DEA-GSZ; x_j e y_j são valores originais dos *inputs* e dos *outputs*, respectivamente; y_j' são novos *outputs* das DMUs restantes, considerando-se a perda de *outputs* devido ao ganho pela DMU o ; λ_j são as contribuições das DMUs na projecção eficiente; $z = \left(z = h_{Ro} y_o - y_o = \sum_{j \neq o} y_j - y_j' \right)$ é quanto a DMU o precisa ganhar para atingir a fronteira. As variáveis de decisão são λ_j , h_{Ro} , $y_j' = f_j(h_{Ro})$.

As soluções deste problema podem diferir dependendo da estratégia de redução de *outputs* adoptada, ou seja, da forma como as funções $y_j' = f_j(h_{Ro})$ forem definidas. Uma estratégia

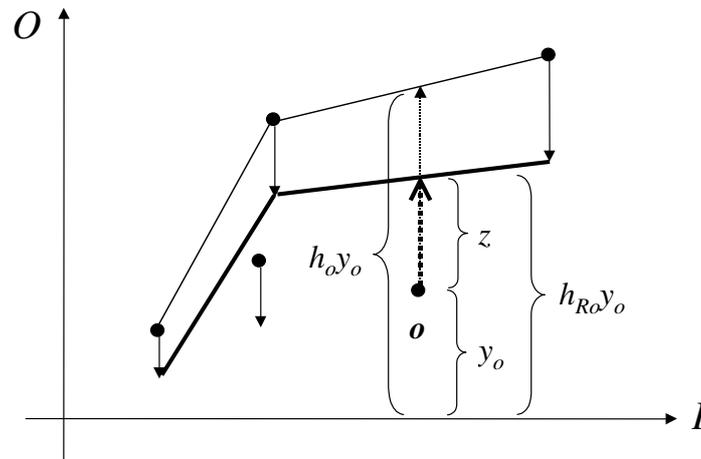


Figura 1: Representação da estratégia de redução proporcional de *output* das DMUs $j, j \neq o$.

em que a retirada da quantidade de *outputs* seja a mesma para todas as DMUs aparenta ser uma escolha equitativa, sem nenhuma necessidade de formular hipóteses que indiquem uma linha de acção mais específica. No entanto, esta estratégia traz sérios problemas quando existem DMUs com baixos valores para os *outputs*. Nestes casos, corre-se o risco de criar, artificialmente, situações em que surgem *outputs* negativos. A estratégia de igual redução (Gomes et al., 2001) [9] só pode ser usada sem problemas nos casos em que $\frac{z}{n-1} \leq \min(y_j)$.

Para evitar estas situações será usada estratégia de redução proporcional ao nível de *output* de cada DMU. O uso desta estratégia é justificado porque, além de também evitar hipóteses mais discricionárias, permite contornar a não linearidade do modelo DEA-GSZ, com a proposição e prova de dois teoremas, que permitem o uso de uma única equação para sua resolução. Além disso, em situações semelhantes na Programação Linear Multiobjectivo (Korhonen e Syrjänen, 2001), é defendida a preferência pela mudança proporcional. Evidentemente esta estratégia também possui seus inconvenientes, como o de não respeitar situações de sólida implantação de uma DMU em um determinado mercado. Ainda assim, para uma primeira abordagem, esta é a estratégia mais conveniente.

2.1 Estratégia de redução proporcional ao nível de *output* das DMUs $j, j \neq o$

Nesta estratégia a DMU o busca ganhar z unidades de *output*. A redução do nível de *output* das outras DMUs é proporcional, ou seja, aquelas com menor nível de *output* perdem menos, e as com maior nível de *output* perdem mais, mantendo-se a condição de a soma das perdas ser igual ao que será ganho pela DMU o .

A Figura 1 representa, para o caso bidimensional, a nova fronteira gerada a partir desta estratégia. A fronteira superior representa a fronteira do modelo clássico; a inferior representa a nova fronteira considerando-se redução proporcional de *outputs* de todas as DMUs, exceptuando-se a DMU o , que ganha a soma das perdas para tornar-se eficiente.

A perda de *output* para uma DMU $j, j \neq o$, é representada por $\frac{y_j z}{\sum_{j \neq o} y_j}$. Como $z =$

$y_o(h_{Ro} - 1)$, tem-se que a perda de *output* da DMU j é $\frac{y_j y_o (h_{Ro} - 1)}{\sum_{j \neq o} y_j}$. Aplicando-se estes resultados ao modelo geral (II), obtém-se o modelo (III).

$$\begin{aligned}
 & \max h_{Ro} \\
 & \text{sa} \\
 & \sum_j \lambda_j x_j \leq x_o \\
 & h_{Ro} y_o \leq \sum_j \lambda_j y_j \left(1 - \frac{y_o (h_{Ro} - 1)}{\sum_{j \neq o} y_j} \right) \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{III}$$

O termo $1 - \frac{y_o (h_{Ro} - 1)}{\sum_{j \neq o} y_j}$ será denominado “Coeficiente de Redução” (*CR*).

Este é um problema de Programação Não Linear, devido à restrição

$$h_{Ro} y_o \leq \sum_j \lambda_j y_j \left(1 - \frac{y_o (h_{Ro} - 1)}{\sum_{j \neq o} y_j} \right).$$

A não linearidade não é uma característica grave, já que ao usar-se o facto de que a fronteira eficiente é composta pelas mesmas DMUs nos casos clássico e de GSZ, sabe-se *a priori* que todas as DMUs que não pertençam ao conjunto de referência da DMU o apresentarão $\lambda_j = 0$. Assim, o número de variáveis do problema fica consideravelmente reduzido e, em certos casos, pode ser resolvido analiticamente com o emprego de técnicas de Cálculo Diferencial. Em casos mais complexos, no entanto (por exemplo, DMU ineficiente com número de DMUs de referência superior a dois), estas técnicas tornam-se extremamente árduas. É então necessária outra técnica de resolução do modelo DEA-GSZ, que é obtida através dos Teoremas demonstrados a seguir.

2.2 Teorema da igualdade das contribuições das DMUs de referência

No modelo DEA-GSZ em que seja adoptada uma estratégia que não altere a composição da fronteira eficiente (excepto pela DMU que busca o alvo), o valor da contribuição das DMUs j (λ_j), $j \neq o$, é igual ao seu valor no modelo DEA clássico.

Prova:

A Figura 2 mostra um trecho da fronteira para o caso bidimensional. A demonstração é análoga para casos multidimensionais, substituindo-se rectas por planos ou hiperplanos e suas respectivas equações.

A DMU o tem como referências as DMUs A e B no modelo DEA clássico, com alvo igual ao nível de *output* da DMU virtual C . No modelo DEA-GSZ, a DMU o terá alvo igual ao nível de *output* da DMU virtual C' . As equações das rectas suporte destes trechos das fronteiras original e deslocada são apresentadas em (IV) e em (V), respectivamente.

$$y_C = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x_C - x_A) + y_A \tag{IV}$$

$$y_{C'} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} (x_{C'} - x_{A'}) + y_{A'} \tag{V}$$

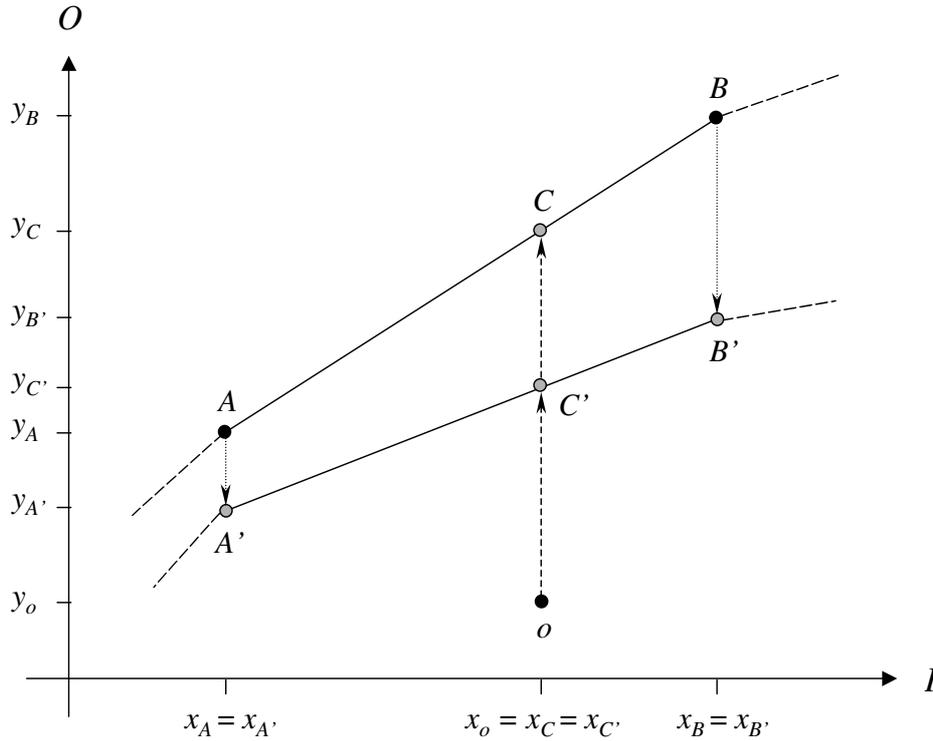


Figura 2: Manutenção das contribuições.

Da definição de contribuição das DMUs de referência na formação do alvo da DMU em análise, têm-se as equações (VI) e (VII).

$$y_C = y_B \lambda_B + y_A \lambda_A \tag{VI}$$

$$y_{C'} = y_{B'} \lambda_{B'} + y_{A'} \lambda_{A'} \tag{VII}$$

Ao compararem-se (IV) e (V) com (VI) e (VII), tem-se que $\lambda_B = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A}$ ($\lambda_A = 1 - \lambda_B$) e $\lambda_{B'} = \frac{x_{C'} - x_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}}$ ($\lambda_{A'} = 1 - \lambda_{B'}$). Como $x_A = x_{A'}$, $x_B = x_{B'}$ e $x_C = x_{C'}$, então $\lambda_B = \lambda_{B'}$ e $\lambda_A = \lambda_{A'}$, q.e.d..

Este teorema aplica-se em particular ao caso de uma estratégia de redução proporcional, já que não são retiradas DMUs da fronteira eficiente.

2.3 Teorema da determinação do alvo

O alvo da DMU em análise no modelo DEA-GSZ de estratégia proporcional é igual ao alvo no caso clássico multiplicado pelo coeficiente de redução.

Prova:

O alvo da DMU *o* no modelo DEA-GSZ é representado pela equação (VII) que, pelo teorema da igualdade das contribuições, pode ser rescrita como a equação (VIII).

$$y_{C'} = y_{B'} \lambda_B + y_{A'} \lambda_A \tag{VIII}$$

Com estratégia proporcional, $y_{A'} = y_A CR$ e $y_{B'} = y_B CR$, e ao considerar-se o valor de CR , tem-se a equação (IX), na qual j^* é conjunto referência da DMU o , λ_j^* e h_o^* são soluções óptimas do modelo DEA BCC clássico orientado a *outputs*, que mostra que o alvo no modelo DEA-GSZ proporcional (expresso pelo 1º termo da equação) é igual ao alvo clássico multiplicado pelo CR , *q.e.d.*.

$$h_{Ro}y_o = \sum_{j^*} \lambda_j^* y_j \left(1 - \frac{y_o(h_{Ro}-1)}{\sum_{j \neq o} y_j} \right) = h_o^* y_o \left(1 - \frac{y_o(h_{Ro}-1)}{\sum_{j \neq o} y_j} \right) \tag{IX}$$

Este teorema permite calcular a eficiência e os alvos das DMUs sob o modelo DEA-GSZ proporcional em duas etapas:

1. Correr o modelo DEA BCC clássico, orientado a *outputs*. Obter os valores dos *outputs* das DMUs de referência e os valores das contribuições ou da eficiência.
2. Com os valores anteriores, resolver a equação (IX).

3 Cooperação entre DMUs

Nas secções anteriores foi modelada a situação em que uma única DMU busca a fronteira eficiente. Entretanto, em casos reais há a possibilidade de mais de uma DMU procurar maximizar a eficiência, o que pode ser feito em competição ou cooperação. Este artigo trata apenas do caso de um número de DMUs que formam um grupo de cooperação.

No paradigma do DEA-GSZ, a busca em cooperação significa que as DMUs deste grupo tentam retirar determinada quantidade de *output* apenas das DMUs não pertencentes ao grupo.

A Figura 3 ilustra as ideias expostas, com as DMUs A e B em cooperação.

Para este caso, o modelo DEA-GSZ é expresso pelo Problema Bi-objectivo Não Linear apresentado em (X), no qual j^* é o conjunto de referência da DMU A ; j^{**} é o conjunto de referência da DMU B ; $y_{j'}$ são os novos valores de *output*.

$$\begin{aligned} & \max h_{RA} \\ & \max h_{RB} \\ & \text{sa} \\ & \sum_{j^*} \lambda_j x_j \leq x_A \\ & \sum_{j^{**}} \lambda_j x_j \leq x_B \\ & h_{RAYA} \leq \sum_{j^*} \lambda_j y'_{j'} \\ & h_{RBYB} \leq \sum_{j^{**}} \lambda_j y'_{j'} \\ & \sum_{j^*} \lambda_j = 1 \\ & \sum_{j^{**}} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \tag{X}$$

Para o caso de uma estratégia qualquer de redução, o modelo (X) deve ser resolvido com o

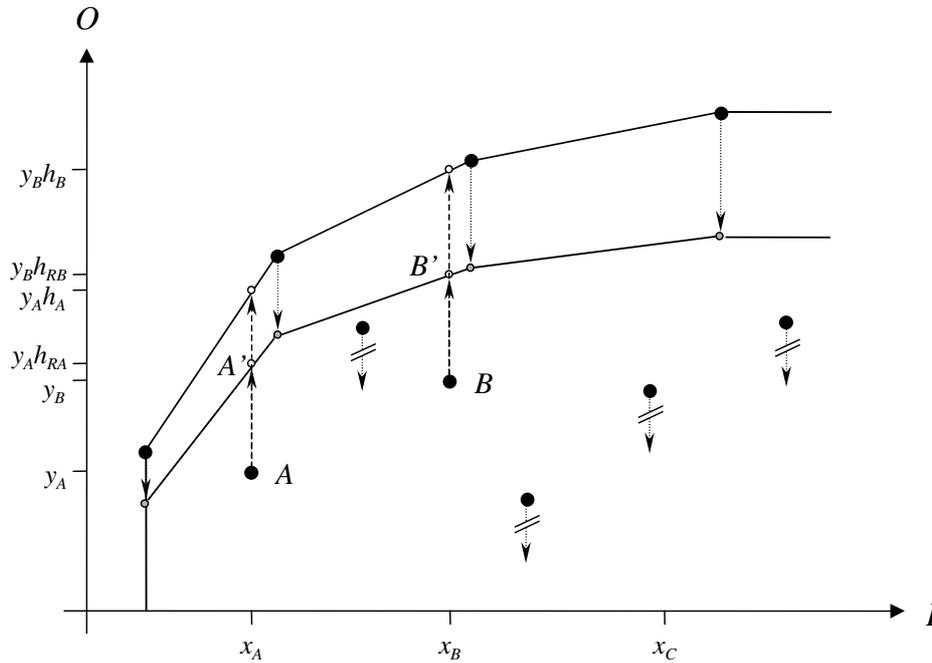


Figura 3: Busca de eficiência em cooperação.

uso de técnicas de Programação Não Linear Multiobjectivo. Problemas deste tipo conduzem frequentemente ao uso de metaheurísticas, como em Gomes et al. (2002) e Pires et al. (2002). No entanto, para a estratégia de redução proporcional, prova-se que o modelo é reduzido a um modelo de Programação Não Linear Mono-objectivo. Para tal, é necessário o seguinte teorema.

3.1 Teorema da proporcionalidade das eficiências em estratégia proporcional

Considere-se o problema de várias DMUs em cooperação na busca de alvos com estratégia proporcional. As eficiências das DMUs no modelo DEA-GSZ são directamente proporcionais às suas eficiências no modelo DEA clássico.

Prova:

Não há perda de generalidade em considerar-se apenas duas DMUs em cooperação, como as DMUs A e B da Figura 3. Para a estratégia proporcional, cada DMU j , $j \neq A, B$, perde quantidade de *output* $\frac{y_j z}{\sum_{j \neq A, j \neq B} y_j}$, proporcional ao valor de seu *output*. A perda de *output* de todas as DMUs fora do grupo de cooperação é igual a $\sum_{j \neq A, j \neq B} \frac{y_j z}{\sum_{j \neq A, j \neq B} y_j}$, onde z corresponde à soma dos ganhos. Se $\sum_{j \neq A, j \neq B} \frac{y_j z}{\sum_{j \neq A, j \neq B} y_j} = S$, as parcelas ganhas por A e por B correspondem, respectivamente, aos valores qS e $(1 - q)S$. Pelo Teorema da Determinação do Alvo, tem-se para a DMU A, $h_{RAYA} = CR(h_{AYA})$ e para a DMU B, $h_{RBYB} = CR(h_{BYB})$. Fazendo-se o quociente entre estes termos, $\frac{h_{RA}}{h_{RB}} = \frac{h_A}{h_B} = q$, *q.e.d.*

O número não negativo q pode ser definido como a proporção de aumento de *output* entre as DMUs A e B .

Corolário

Considere-se o problema de várias DMUs em cooperação na busca de alvos com estratégia proporcional. O Problema de Programação Não Linear Multiobjectivo é reduzido a um Problema de Programação Não Linear Mono-objectivo.

Como $h_{RB} = qh_{RA}$, o modelo (X) é convertido no modelo (XI) que possui uma única função objectivo.

$$\begin{aligned}
 & \max h_{RA} \\
 & \text{sa} \\
 & \sum_{j^*} \lambda_j x_j \leq x_A \\
 & \sum_{j^{**}} \lambda_j x_j \leq x_B \\
 & h_{RA} y_A \leq \sum_{j^*} \lambda_j y'_j \\
 & qh_{RA} y_B \leq \sum_{j^{**}} \lambda_j y'_j \\
 & \sum_{j^*} \lambda_j = 1 \\
 & \sum_{j^{**}} \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{XI}$$

Sendo z_A o acréscimo de *output* da DMU A e z_B o da DMU B , z é igual à soma dos ganhos, ou seja, $z = z_A + z_B$. Como $z_A = y_A (h_{RA} - 1)$, $z_B = y_B (h_{RB} - 1)$ e $h_{RB} = qh_{RA}$, z tem o valor de $z = h_{RA} (y_A + qy_B) - (y_A + y_B)$. A perda de *output* de cada DMU j , $j \neq A, B$, é, assim representada pela expressão (XII).

$$\frac{y_j [h_{RA}(y_A + qy_B) - (y_A + y_B)]}{\sum_{j \neq A, j \neq B} y_j}, \forall j \neq A, B, \quad \forall j \neq A, B \tag{XII}$$

Ao substituir-se (XII) em (XI), resulta (XIII), onde as variáveis de decisão são h_{RA} e λ_j .

$$\begin{aligned}
 & \max h_{RA} \\
 & \text{sa} \\
 & \sum_{j^*} \lambda_j x_j \leq x_A \\
 & \sum_{j^{**}} \lambda_j x_j \leq x_B \\
 & h_{RA} y_A \leq \sum_{j^*} \lambda_j y_j \left(1 - \frac{[h_{RA}(y_A + qy_B) - (y_A + y_B)]}{\sum_{j \neq A, j \neq B} y_j} \right) \\
 & qh_{RA} y_B \leq \sum_{j^{**}} \lambda_j y_j \left(1 - \frac{[h_{RA}(y_A + qy_B) - (y_A + y_B)]}{\sum_{j \neq A, j \neq B} y_j} \right) \\
 & \sum_{j^*} \lambda_j = 1 \\
 & \sum_{j^{**}} \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{XIII}$$

Este modelo pode ser facilmente generalizado para o caso de o conjunto de DMUs em cooperação ter cardinalidade superior a 2.

Para o caso geral, a equação que representa o Teorema da Determinação do Alvo é apresentada em (XIV), na qual W é conjunto das DMUs em cooperação e $q_{ij} = h_i/h_j$.

$$h_{Ri} = h_i \left(1 - \frac{\sum_{j \in W} [y_j (q_{ij} h_{Ri} - 1)]}{\sum_{j \notin W} y_j} \right) \quad (\text{XIV})$$

4 Busca sequencial de alvos intermediários

4.1 Alvos intermediários em modelos DEA clássicos

Atingir os alvos determinados pelos modelos DEA é uma tarefa que pode encontrar barreiras práticas. Uma determinada DMU que busca eficiência pode não ser capaz de alcançar aquele alvo que lhe é atribuído. Na literatura existem algumas propostas para solucionar esta dificuldade, ao auxiliar na busca por alvos alternativos situados na fronteira eficiente, com o uso de Programação por Metas (Athanassopoulos, 1995, Athanassopoulos et al., 1999), Programação Linear Multiobjectivo (Angulo-Meza, 2001, Tavares, 1998, Joro, 1998) e outras abordagens (Thanassoulis e Dyson, 1992). Todas estas proposições tomam como base os modelos DEA clássicos e buscam os alvos na fronteira eficiente.

Uma nova abordagem para a busca de alvos é descrita neste artigo: a busca de forma sequencial, nas camadas de iso-eficiência. Considera-se que uma DMU é capaz de promover mudanças em suas práticas de gestão de forma gradual. As vantagens desta abordagem residem em possibilitar à unidade aprender com o processo e incorporar as mudanças nas práticas de gestão para melhoria do nível de utilização da tecnologia disponível. Ou seja, a unidade pode obter metas em curto prazo mais realistas. Os alvos intermediários, atingidos em sequência, estão localizados nas camadas de iso-eficiência, portanto, abaixo da fronteira eficiente.

As camadas de iso-eficiência são obtidas da seguinte forma: as DMUs com 100% de eficiência formam a camada 1. Essas DMUs são, então, retiradas do conjunto de análise e corre-se novamente o modelo DEA. As DMUs eficientes neste subconjunto formam a camada 2. O processo repete-se até que todas as DMUs tenham sido retiradas do conjunto inicial. Na literatura, as camadas de iso-eficiência são utilizadas para obter uma forma alternativa de ordenação e divisão em classes em DEA (Barr et al., 2000, Tavares, 1998).

4.2 Busca sequencial de alvos intermediários em modelos DEA-GSZ

A aplicação de busca sequencial descrita, quando aplicada aos modelos com soma de *outputs* constante, gera propriedades matemáticas adicionais a seguir detalhadas.

Durante a busca sequencial todas as camadas de iso-eficiência apresentam deslocamentos com redução do nível de *output*, sempre que uma ou mais DMUs busquem um alvo na camada seguinte. Este processo pode ser levado ao ponto em que todas as DMUs pertençam a uma única camada, promovendo, assim, a uniformização da fronteira. A fronteira uniformizada

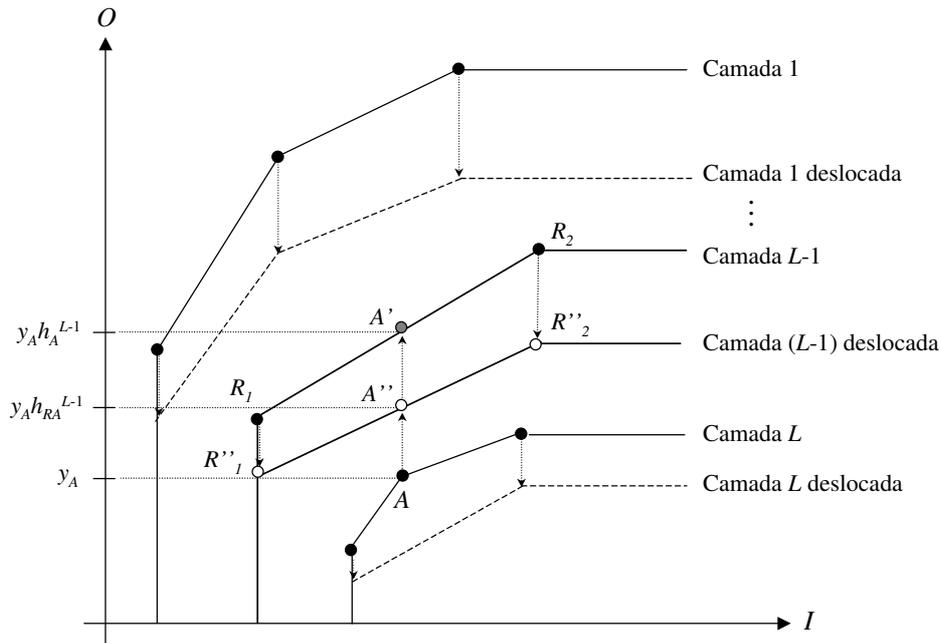


Figura 4: DMU A ao buscar o alvo na camada seguinte no modelo DEA-GSZ.

estará localizada em níveis inferiores aos da fronteira DEA do modelo clássico. Esta situação pode ser vista como “ideal” por órgão reguladores, que desejem cooperação entre suas unidades.

A Figura 4 representa a busca sequencial de alvos intermediários para uma única DMU, no caso bidimensional com o paradigma DEA-GSZ. A' e A'' são, respectivamente, o alvo da DMU A no modelo clássico e no modelo DEA-GSZ na camada L-1.

Os modelos DEA-GSZ, de busca de alvos na fronteira eficiente, continuam válidos para busca de alvos nas camadas de iso-eficiência. Exceptua-se o valor das eficiências que, neste caso, são calculadas em relação à camada alvo. Os teoremas demonstrados anteriormente permanecem válidos e, assim, a equação de determinação dos alvos para uma única DMU deslocando-se da camada L para a camada L-1 é apresentada em (XV).

$$h_{Ri}^{L-1} = h_i^{L-1} \left(1 - \frac{y_i (h_{Ri}^{L-1} - 1)}{\sum_{j \neq i} y_j} \right) \tag{XV}$$

Como anteriormente colocado, pode ocorrer de duas ou mais DMUs associarem-se em cooperação para a busca de eficiência no DEA-GSZ sequencial. Os alvos estarão localizados nas camadas de iso-eficiência. A Figura 5 mostra as DMUs A e B, localizadas na camada L, actuando em cooperação, ao buscar alvos na camada L-1. Neste caso as DMUs A e B pertencem à mesma camada de iso-eficiência, podendo também ocorrer a associação de DMUs localizadas em diferentes camadas.

De forma análoga à busca de alvos na fronteira eficiente com soma de *outputs* constante, tem-se um modelo multiobjectivo, que pode ser resolvido pela equação (XVI), desde que seja adoptada estratégia proporcional. A adopção desta estratégia garante a validade dos teoremas anteriores. Em (XVI), W é conjunto das DMUs em cooperação e $q_{ij} = \frac{h_i}{h_j} \Big|^{L-1}$.

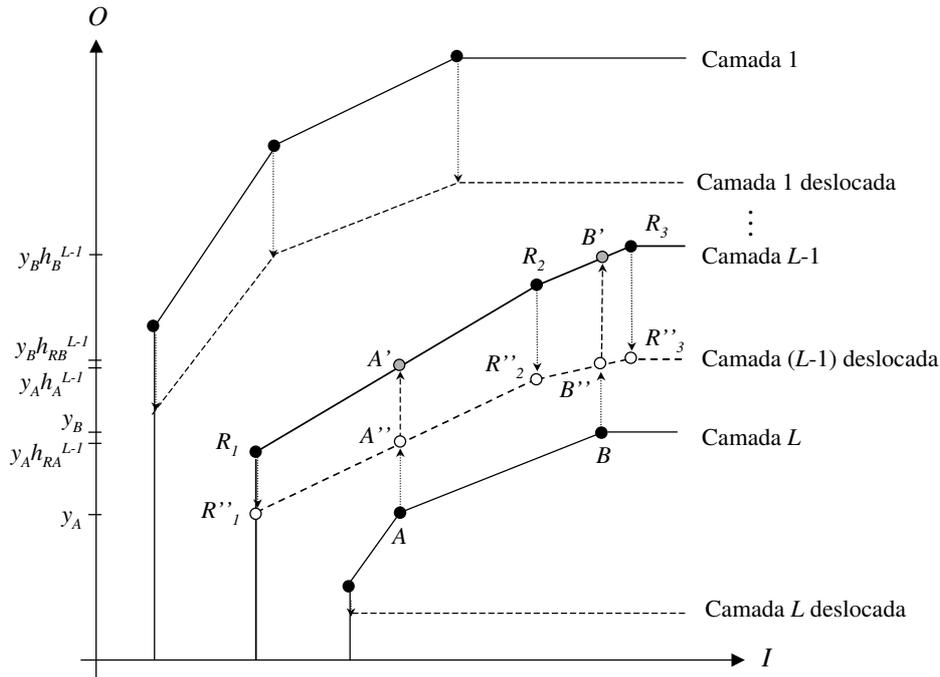


Figura 5: DMUs *A* e *B* buscando eficiência em cooperação no modelo DEA-GSZ, com alvos na camada seguinte.

$$h_{Ri}^{L-1} = h_i^{L-1} \left(1 - \frac{\sum_{j \in W} [y_j (q_{ij} h_{Ri}^{L-1} - 1)]}{\sum_{j \notin W} y_j} \right) \tag{XVI}$$

Apesar de a equação (XVI) não impor restrição quanto às camadas de localização das DMUs do conjunto *W* (conjunto de DMUs em cooperação), podem ocorrer problemas se uma DMU for referência de outra na camada alvo.

4.3 Exemplo numérico

Para ilustrar os conceitos aqui desenvolvidos apresenta-se um exemplo hipotético para um conjunto de 9 DMUs, com dois *inputs* e um *output*, que deve ter soma constante (21,5). A Tabela 1 mostra os dados utilizados neste exemplo.

As DMUs do exemplo dividem-se em três camadas de iso-eficiência:

- Camada 1 (fronteira eficiente): DMUs *A*, *B* e *C*;
- Camada 2: DMUs *D*, *E* e *F*;
- Camada 3: DMUs *G*, *H* e *I*.

Em uma primeira etapa, as DMUs *G*, *H* e *I* formam um conjunto de cooperação em busca de alvos na Camada 2, com eficiência 66,7%, 80,0% e 84,7% em relação a esta camada. Se não fosse considerada a restrição de a soma dos *outputs* ser constante, os alvos de *G*, *H* e *I* seriam,

Tabela 1: Dados para o exemplo numérico.

<i>DMU</i>	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>
<i>A</i>	1,0	1,0	2,0
<i>B</i>	2,0	3,0	3,0
<i>C</i>	3,0	3,0	4,0
<i>D</i>	1,0	1,0	1,5
<i>E</i>	2,0	2,0	2,5
<i>F</i>	3,0	3,1	3,0
<i>G</i>	1,0	1,1	1,0
<i>H</i>	2,0	3,0	2,0
<i>I</i>	3,0	3,0	2,5

Tabela 2: Resultados da 1ª etapa de busca sequencial de alvos.

	<i>DMU</i>	<i>Output</i>
<i>Camada 1</i>	<i>A</i>	1,9
	<i>B</i>	2,8
	<i>C</i>	3,7
<i>Camada 2</i>	<i>D</i>	1,4
	<i>E</i>	2,3
	<i>F</i>	2,8
	<i>G</i>	1,4
	<i>H</i>	2,3
	<i>I</i>	2,8

respectivamente, 1,50, 2,50 e 2,95. Aplicando-se a equação (XV) são obtidos os resultados apresentados na Tabela 2.

Procedendo-se a uma nova iteração, com o conjunto W constituído pelas DMUs D , E , F , G , H e I , obtêm-se os resultados mostrados na Tabela 3, com todas as DMUs eficientes. Esta é a situação de fronteira uniformizada, que pode ser usada para emitir directrizes de políticas públicas, nos casos em que várias unidades atendam a uma demanda constante.

Ressalta-se que nas Tabelas 2 e 3 a restrição de a soma dos *outputs* ser constante é satisfeita (soma igual a 21,5).

5 Conclusões

A constatação de que os modelos clássicos não consideram a existência de um número limitado de unidades de *output*, tornou necessário o desenvolvimento de um modelo DEA no qual a soma dos *outputs* seja constante, ou seja, a soma líquida dos ganhos deve ser zero. Este modelo, denominado *Modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ)*, foi desenvolvido neste artigo para a estratégia de redução proporcional, no qual os valores das eficiências são sempre maiores e os dos alvos menores daqueles encontrados no modelo DEA BCC clássico. A estratégia proporcional, embora tenha limitações, é uma primeira abordagem para o modelo DEA-GSZ e possibilita a obtenção de resultados matemáticos que poderão ser usados em

Tabela 3: Resultados da 2ª etapa de busca sequencial de alvos.

	<i>DMU</i>	<i>Output</i>
	<i>A</i>	1,6
	<i>B</i>	2,4
	<i>C</i>	3,2
<i>Camada 1 ou</i>	<i>D</i>	1,6
<i>Fronteira Uniformizada</i>	<i>E</i>	2,4
	<i>F</i>	3,2
	<i>G</i>	1,6
	<i>H</i>	2,4
	<i>I</i>	3,2

outras abordagens.

O caso geral de várias DMUs a buscar eficiência em cooperação conduz a um modelo de optimização multiobjectivo não linear. Os teoremas demonstrados neste artigo permitem uma grande simplificação deste modelo, que reduz-se à resolução de uma, ou mais, equações algébricas lineares. Deve-se enfatizar que o uso do factor de proporcionalidade q não é uma opção dos autores. É uma decorrência da adopção da estratégia de redução proporcional. A exploração directa do modelo multiobjectivo não linear poderá conduzir a resultados interessantes, mas só pode ser efectuada com a adopção de outras estratégias de redução do nível de *output*.

O estabelecimento de uma busca sequencial por alvos apresenta a vantagem gerencial de permitir que as unidades possam obter metas em curto prazo mais realistas. Do ponto de vista matemático, a busca sequencial fornece os meios para, no modelo DEA-GSZ, determinar uma situação ideal de fronteira uniformizada.

Um resultado importante é o facto de os dois problemas tradicionais em DEA (determinação da fronteira e busca de alvos) ficarem estreitamente acoplados no modelo DEA-GSZ, ou seja, a simples busca por eficiência altera a forma da fronteira.

Este novo modelo proposto apresenta um amplo potencial de aplicações práticas e novos desenvolvimentos teóricos, como:

- Análise simultânea de mais de um *output*, com e sem restrições aos pesos;
- DMUs que buscam a fronteira em competição;
- Considerar a possibilidade de redução de *inputs* para as DMUs que tiveram redução no nível de *output*, o que provocaria o deslocamento destas DMUs ao longo das camadas de iso-eficiência.

Entre as aplicações, além da já citada avaliação de eficiência em eventos desportivos com premiação total constante, exemplificada pelas olimpíadas, podem-se citar:

- Avaliação de eficiência em eleições, considerando-se o número constante de eleitores;

- Estudo de desempenho de companhias aéreas em mercado altamente competitivo para uma rota de demanda considerada constante (por exemplo, ponte aérea Rio-São Paulo);
- Avaliar políticas públicas municipais, que visem promover o acesso dos cidadãos ao ensino superior, cujo total de vagas oferecidas é constante. Este estudo seria um refinamento do modelo apresentado em Soares de Mello et al. (2001) [18].

Finalmente, os resultados obtidos podem ser facilmente estendidos para modelos com soma de *inputs* constante, geometricamente equivalente a uma rotação de eixos, e pode ser aplicado à redistribuição de recursos, como é o caso de funcionários estáveis em empresas públicas.

6 Referências bibliográficas

- [1] Angulo-Meza, L. Um enfoque multiobjectivo para os modelos de determinação de alvos em DEA. Exame de Qualificação ao Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (2001).
- [2] Athanassopoulos, A.D. Goal Programming and Data Envelopment Analysis (GoDEA) models for multi-level multi-unit organizations: An application to Greek local authorities. *European Journal of Operational Research* 87 (3) (1995) 535-550.
- [3] Athanassopoulos, A.D., Lambroukos, N., Seiford, L. Data envelopment scenario for setting targets to electricity generating plants. *European Journal of Operational Research* 115 (1999) 413-428.
- [4] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science* 30 (9) (1984) 1078-1092.
- [5] Barr, R.S., Durchholz, M.L., Seiford, L. Peeling the DEA onion: Layering and rank-ordering DMUs using tiered DEA. Technical Report (2000).
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research* 2 (1978) 429-444.
- [7] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K. *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, USA (2000).
- [8] Gomes, A., Martins, A.G., Antunes, C.H. Utilização de algoritmos genéticos para identificação e escolha de acções de condicionamento da procura de energia. *Actas do IO 2002 – X Congresso da APDIO, Guimarães, Portugal* (2002) 122.
- [9] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E. Modelos DEA com soma de outputs constante. *Anais do XXXIII SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Campos do Jordão, Brasil* (2001).
- [10] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E. Uso de Análise de Envoltória de Dados e Auxílio Multicritério à Decisão na análise de dados das Olimpíadas 2000. *Anais do XXI ENEGEP – Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Salvador, Brasil* (2001).
- [11] Joro, T. Models for identifying target units in Data Envelopment Analysis: comparison and extension. Interim Report IR-98-055, International Institute for Applied Systems Analysis (1998).
- [12] Korhonen, P., Syrjänen, M. Resource allocation based on efficiency analysis. Working Paper W-293, Helsinki School of Economics and Business Administration (2001).
- [13] Lins, M.P.E., Angulo-Meza, L. Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão. Editora da COPPE/UFRJ, Brasil (2000).

- [14] Lins, M.P.E., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Soares de Mello, A.J.R. Analysis of multi-event contest results and the establishment of realistic targets: the Olympic Games case, Relatório Técnico, Programa de Engenharia de Produção/COPPE/UFRJ, Brasil (2001).
- [15] Osborne, M.J., Rubinstein, A. A Course in Game Theory. The MIT Press, Boston, USA (1999).
- [16] Pires, D.F., Martins, A.G., Antunes, C.H. Modelo multiobjectivo para apoio à localização de condensadores em redes radiais de distribuição. Actas do IO 2002 – X Congresso da APDIO, Guimarães, Portugal (2002) 175.
- [17] Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Lins, M.P.E., Soares de Mello, A.J.R. Uso da Pesquisa Operacional em esportes: o caso das Olimpíadas. Boletim da SOBRAPO – Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional 19 (2001) 5-6.
- [18] Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Lins, M.P.E., Vieira, L.A.M. Um caso de estudo de integração SIG-DEA-MCDA: a influência de uma instituição de ensino superior em vários municípios do Estado do Rio de Janeiro. Investigação Operacional 21 (2) (2001) 171-190.
- [19] Tavares, G. Data envelopment analysis: the basic models and their main extensions. A model to analyse the modernisation of telecommunication services in OECD countries. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Portugal (1998).
- [20] Thanassoulis, E., Dyson, R. Estimating preferred targets input-output levels using data envelopment analysis. European Journal of Operational Research 56 (1992) 80-97.