MODELOS DEA CCR COM GANHOS DE SOMA ZERO

Eliane Gonçalves Gomes
Embrapa Monitoramento por Satélite
Av. Dr. Júlio Soares de Arruda 803, 13088-300, Campinas, SP
eliane@cnpm.embrapa.br

João Carlos C. B. Soares de Mello
Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, 24210-240, Niterói, RJ
jcsmello@producao.uff.br

Marcos Pereira Estellita Lins
Programa de Engenharia de Produção – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Cidade Universitária, Centro de Tecnologia F-105, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ
lins@pep.ufrj.br

Resumo

Nos modelos DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) a restrição dos modelos DEA clássicos de total liberdade de produção ou de uso dos recursos é substituída pela restrição de soma total constante de *inputs* ou *outputs*. Neste artigo será apresentado o modelo DEA-GSZ com retornos constantes de escala (DEA-GSZ CCR).

Palavras-chave: DEA; Ganhos de Soma Zero; Retornos Constantes de Escala.

1. INTRODUÇÃO

Uma suposição existente nos modelos de Análise de Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) clássicos (Cooper et al., 2000; Estellita Lins e Angulo Meza, 2000; Coelli et al., 1998; Charnes et al., 1994) é a total liberdade de produção ou de uso dos recursos, ou seja, a produção ou o uso dos recursos de uma unidade de tomada de decisão (*Decision Making Unit* – DMU) não interfere na produção ou no uso dos recursos das demais. Em alguns casos, porém, essa liberdade não existe.

Nos modelos DEA chamados de Modelos DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) (Gomes, 2003), uma DMU ineficiente que busque a fronteira pelo aumento de *outputs* (redução de *inputs*) imputará às demais a redução do valor de seus *outputs* (ou aumento de seus *inputs*) de modo a manter a soma total constante. Assim, os modelos DEA-GSZ têm aplicação direta nos estudos de alocação ou (re)alocação de recursos (ou de produção), em que a restrição de soma constante seja uma necessidade da modelagem.

A solução desses modelos depende da estratégia de redistribuição adotada (redistribuição igual, proporcional etc.). Por exemplo, na estratégia de redução proporcional, para que a DMU que busca eficiência ganhe determinada quantidade de *output* (perca quantidade de *input*), todas as demais DMUs devem perder quantidade de *output* (ganhar quantidade de *input*) proporcionalmente ao seu valor original, de modo que a soma das perdas seja igual ao ganho para que a soma seja mantida constante.

Dessa forma, quem tem menos *output* (*input*) perde (ganha) menos; quem tem mais *output* (*input*) perde (ganha) mais.

Em Gomes (2003), Estellita Lins et al. (2003), Gomes et al. (2002, 2003a, 2003b, 2001) e Gomes e Soares de Mello (2002) são formulados os modelos DEA-GSZ com retornos variáveis de escala (DEA-GSZ BCC), inspirado no modelo DEA BCC clássico (Banker et al., 1984). Nestas referências são apresentadas as formulações gerais para o caso de uma única DMU ou de várias (em cooperação) em busca de eficiência, ou seja, alcance da fronteira pela redução de *inputs* ou incremento de *outputs*. Para o caso do uso de estratégia proporcional, são demonstrados teoremas que permitem a simplificação do modelo geral de Programação Não Linear Multiobjetivo para a solução de uma equação linear.

Estes modelos têm sua aplicação prática em qualquer caso de estudo que envolva a necessidade de (re)alocação dos recursos ou da produção, de modo que o total existente não possa ser alterado. No caso do modelo orientado a recursos, um exemplo é aquele em que o *input* é a quantidade de servidores públicos (médicos, professores, policiais etc.) alocados a uma determinada atividade. Se para atingir eficiência uma DMU tiver que reduzir a quantidade de pessoal, esses servidores deverão ser realocados a outras unidades, já que possuem estabilidade no emprego (Gomes, 2003).

No caso de competições, por exemplo, se for considerado como *output* um índice que agrega seus resultados (Soares de Mello et al., 2001; Gomes et al., 2001), a melhora de posição de qualquer competidor implica na perda de posição de um ou mais de seus adversários. Nesse caso, um modelo DEA-GSZ (CCR ou BCC) orientado a *outputs* teria aplicação imediata.

Em Gomes (2003) é apresentado o emprego do modelo DEA-GSZ para realocar as emissões de CO_2 entre os países do mundo, com base nos mecanismos do Protocolo de Kyoto. Esse é um caso de análise de eficiência com a presença de *outputs* indesejáveis, em que os modelos DEA-GSZ tornam-se bastante úteis na determinação de diretrizes para as unidades em avaliação, já que a soma das quantidades produzidas por todas as DMUs deveria ser o limite máximo permitido. Logo, qualquer DMU que busque a fronteira aumentando a quantidade desse *output* deverá impor a perda dessa quantidade pelas demais.

Neste artigo é apresentado o modelo DEA-GSZ com retornos constantes de escala (DEA-GSZ CCR), que toma como o base o modelo DEA CCR clássico (Charnes et al., 1978). São apresentadas as formulações gerais para os casos de orientação a *inputs* e *outputs*, com e sem restrições aos pesos dos multiplicadores, para situações de uma única DMU em busca de eficiência, ou de várias DMUs atuando em cooperação.

É ainda mostrado que para o caso CCR, a estratégia de alcance da fronteira não é livre; é determinada pelas equações da fronteira. Desta forma, mostra-se que no modelo DEA-GSZ CCR, para que seja mantida a composição da fronteira eficiente, a menos da DMU que busca eficiência, o uso da estratégia proporcional é obrigatório.

2. MODELO DEA-GSZ CCR

2.1. Formulação Geral

Tal como foram desenvolvidos modelos DEA-GSZ BCC (Gomes, 2003; Estellita Lins et al., 2003; Gomes et al., 2003a, 2003b), é possível derivar modelos DEA com a restrição de ganhos de soma zero com base nos modelos DEA CCR clássicos. A formulação clássica do modelo do envelope DEA CCR com orientação a *outputs* usa para cada DMU o PPL apresentado em (1). Nesse PPL, para a DMU *o* em análise, a eficiência é dada por $1/h_o$, x_j representam os *inputs*, y_j representam os *outputs*, λ_j representam a contribuição da DMU j para a projeção (alvo) da DMU o na fronteira.

$$\begin{aligned}
&\text{Max } h_o \\
&\text{sujeito a} \\
&\sum_j \lambda_j x_j \le x_o \\
&h_o y_o \le \sum_j \lambda_j y_j \\
&\lambda_j \ge 0, \forall j
\end{aligned} \qquad (1)$$

Em casos em que não haja total independência entre as DMUs e que a soma dos *outputs* deva ser constante, o modelo é descrito em (2) e chamado de Modelo DEA CCR com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ CCR).

$$\begin{aligned}
&\text{Max } h_{Ro} \\
&\text{sujeito a} \\
&\sum_j \lambda_j x_j \le x_o \\
&h_{Ro} y_o \le \sum_j \lambda_j y_j' \\
&\lambda_j \ge 0, \forall j
\end{aligned} \qquad (2)$$

Em (2), a unidade em análise é a DMU o. h_{Ro} é o inverso da eficiência da DMU o sob a condição de soma de *outputs* constante; x_j e y_j são valores originais dos *inputs* e dos *outputs*, respectivamente; x_o e y_o são os valores de *inputs* e *outputs* para a DMU o; λ_j são as contribuições das DMUs na projeção eficiente; y_j' são novos *outputs* das DMUs restantes e incorporam a perda de *output* devido ao ganho da DMU o, de forma que a soma seja mantida constante. Assim como no caso do modelo BCC, as variáveis de decisão são λ_j, h_{Ro}, $y_j' = f_j(h_{Ro})$.

A Figura 1 representa um trecho da fronteira CCR para o caso bidimensional. Analogamente ao caso BCC, a DMU o receberá uma determinada quantidade de *output* para pertencer à fronteira. O ganho z pode ser definido por $z = h_{Ro} y_o - y_o = \sum_{j \ne o} y_j - y_j'$, ou seja, é o quanto a DMU o deverá ganhar para atingir a fronteira eficiente, que corresponde à perda das demais DMUs.

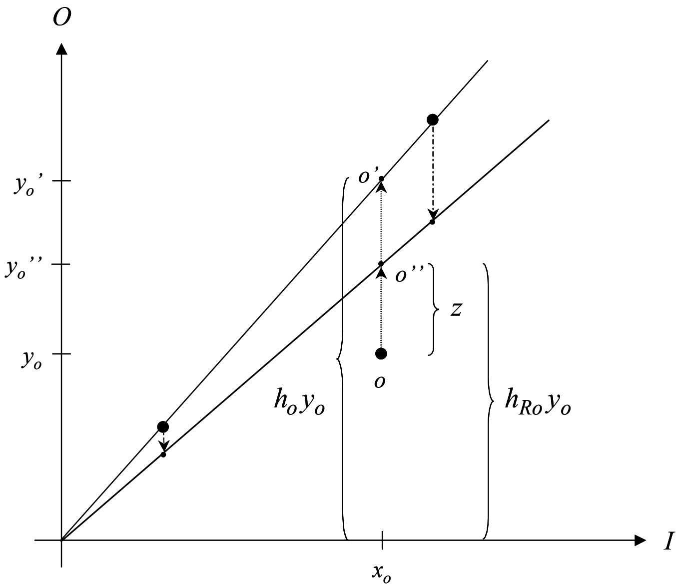

Figura 1. Trecho da fronteira CCR sob o paradigma DEA-GSZ.

A definição do modelo DEA CCR assume proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* na fronteira, ou seja, se uma atividade (x,y) é viável, para um escalar t positivo, a atividade (tx,ty) também o será. Assim, impõe-se que os hiperplanos suporte que formam a fronteira eficiente passem pela origem dos planos coordenados.

Para o caso bidimensional representado na Figura 2, A e B são DMUs de referência (perdem quantidade de *output*) para a DMU o que busca a fronteira (ganha quantidade de *output*).

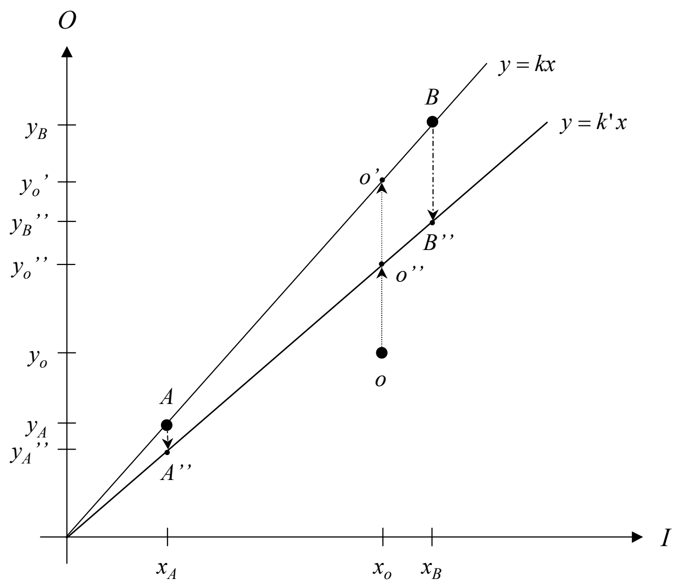

Figura 2. DEA-GSZ CCR bidimensional.

Da Figura 2 derivam-se as relações (3) e (4), que combinadas resultam na relação (5).

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_{o'}}{x_o} = k \qquad (3)$$

$$\frac{y_{A''}}{x_A} = \frac{y_{B''}}{x_B} = \frac{y_{o''}}{x_o} = k' \tag{4}$$

$$\frac{k}{k'} = \frac{y_B}{y_{B''}} = \frac{y_A}{y_{A''}} = \frac{y_{o'}}{y_{o''}} \tag{5}$$

A relação (5) expressa que o alvo da DMU *o* na fronteira original, $y_{o'}$, desloca-se como as DMUs reais da fronteira. Desta forma, a estratégia de alcance da fronteira, e conseqüente deslocamento, não é livre. Em outras palavras, a adoção de uma estratégia livre (qualquer) para o modelo DEA-GSZ CCR pode alterar a fronteira. Como a hipótese adotada é a de não alteração da composição da fronteira, a menos da DMU (ou DMUs) que busca(m) a eficiência, a estratégia deve ser determinada pelas equações da fronteira (para que não sejam retiradas DMUs eficientes da fronteira).

Das relações (3) e (4), para as DMUs *A* e *B* obtêm-se (6) e (7), que combinadas resultam em (8), que expressa que a perda de *output* é proporcional ao novo valor de *output*.

$$\frac{y_B}{y_{B''}} = \frac{y_B}{y_{B''}} - \frac{y_{B''}}{y_{B''}} + \frac{y_{B''}}{y_{B''}} = \frac{y_B - y_{B''}}{y_{B''}} + 1 = \frac{k}{k'} \tag{6}$$

$$\frac{y_A}{y_{A''}} = \frac{y_A}{y_{A''}} - \frac{y_{A''}}{y_{A''}} + \frac{y_{A''}}{y_{A''}} = \frac{y_A - y_{A''}}{y_{A''}} + 1 = \frac{k}{k'} \tag{7}$$

$$\frac{y_A - y_{A''}}{y_{A''}} = \frac{y_B - y_{B''}}{y_{B''}} \tag{8}$$

Ainda das relações (3) e (4) é possível derivar as relações (9) e (10) que, ao serem substituídas em (8), resultam na expressão (11).

$$\frac{y_A}{y_{A''}} = \frac{k}{k'} \Rightarrow y_{A''} = y_A \frac{k'}{k} \tag{9}$$

$$\frac{y_B}{y_{B''}} = \frac{k}{k'} \Rightarrow y_{B''} = y_B \frac{k'}{k} \tag{10}$$

$$\frac{y_A - y_{A''}}{y_A} = \frac{y_B - y_{B''}}{y_B} \tag{11}$$

Da expressão (11) afirma-se que a perda de *output* de cada DMU *j*, $j \neq o$, sendo *o* a DMU que busca a eficiência, é proporcional ao seu valor original. Esse é o enunciado da estratégia de redução proporcional (Gomes, 2003), ou seja, no modelo DEA-GSZ CCR, para que seja mantida a composição da fronteira eficiente, a menos da DMU que busca eficiência, o uso da estratégia proporcional é obrigatório.

2.2. Modelagem

Analogamente aos desenvolvimentos feitos para o modelo DEA-GSZ BCC de redução de *outputs* por estratégia proporcional (Gomes, 2003; Estellita Lins et al., 2003, Gomes et al., 2003a, 2003b), para o modelo DEA-GSZ CCR orientado a *outputs* (Gomes, 2003; Gomes et al., 2004), a DMU *o* precisa ganhar *z* unidades de *output* e a perda das outras DMUs é, obrigatoriamente, proporcional aos seus níveis de *output*, mantendo-se a restrição de que a soma dos *outputs* é constante.

Da Figura 1, tem-se que o ganho *z* vale $y_o(h_{Ro}-1)=\sum_{j\neq o} y_j - y_j'$. De Gomes (2003; Estellita Lins et al., 2003; Gomes et al., 2003), tem-se que a perda de *output* de cada DMU j, $j \neq o$ (o é a DMU que busca a fronteira) vale $\frac{y_j y_o(h_{Ro}-1)}{\sum_{j\neq o} y_j}$.

Aplicando-se este resultado ao modelo geral (2), obtém-se o modelo (12) para o modelo DEA-GSZ CCR orientado a *output* (*output* único), no qual o termo $1-\frac{y_o(h_{Ro}-1)}{\sum_{j\neq o} y_j}$ é denotado de Coeficiente de Redução (CR). Assim como no caso de DEA-GSZ BCC, esse modelo é um Problema de Programação Não Linear.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } h_{Ro} \\
&\text{sujeito a} \\
&\sum_j \lambda_j x_j \leq x_o \\
&h_{Ro} y_o \leq \sum_j \lambda_j y_j \left(1-\frac{y_o(h_{Ro}-1)}{\sum_{j\neq o} y_j}\right) \\
&\lambda_j \geq 0, \forall j
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Não há dificuldades em provar-se que os teoremas da Igualdade das Contribuições das DMUs de Referência ("No modelo DEA-GSZ em que seja adotada uma estratégia que não altere a composição da fronteira eficiente (exceto pela DMU que busca o alvo), o valor da contribuição das DMUs j (λ_j), $j \neq o$, é igual ao seu valor no modelo DEA clássico") e de Determinação do Alvo ("O alvo da DMU em análise no DEA-GSZ de estratégia proporcional é igual ao alvo no caso clássico multiplicado pelo coeficiente de redução"), demonstrados em Gomes (2003) e Gomes et al. (2003a, 2003b), são válidos também para o caso DEA-GSZ CCR. Dessa forma, o modelo deve ser resolvido em duas etapas:

1. Correr o modelo DEA CCR clássico, orientado a *outputs*. Obter os valores dos *outputs* das DMUs de referência e os valores das contribuições (λ_j^*) ou da eficiência (h_o^*).
2. Com os valores anteriores, resolver a equação (13), resultante dos dois teoremas anteriores, na qual h_{Ro} é o valor da eficiência segundo o modelo DEA-GSZ CCR.

$$h_{Ro}y_o = \sum_{j^*}\lambda_j^* y_j\left(1-\frac{y_o(h_{Ro}-1)}{\sum_{j\neq o} y_j}\right) = h_o^* y_o\left(1-\frac{y_o(h_{Ro}-1)}{\sum_{j\neq o} y_j}\right) = h_o^* y_o CR_{DEA-GSZ\ CCR}$$

(13)

Tal como o análogo BCC, o modelo DEA-GSZ CCR também admite a orientação a *inputs* com *input* único, bem como presença de múltiplos *outputs* ou *inputs* de soma constante. Em (14) é apresentado o modelo DEA-GSZ CCR orientado a *outputs*, com *outputs* múltiplos de soma constante. Em (15) e (16) estão os modelos DEA-GSZ CCR orientados a *inputs*, com *input* único e múltiplos de soma constante, respectivamente.

$$\begin{aligned}
&\text{Max } h_{Ro}\\
&\text{sujeito a}\\
&\sum_j \lambda_j x_{jk} \le x_{ok}, \forall k \qquad (14)\\
&h_{Ro}y_{or} \le \sum_j \lambda_j y_{jr}\left(1-\frac{y_{or}(h_{Ro}-1)}{\sum_{j\neq o} y_{jr}}\right), \forall r\\
&\lambda_j \ge 0, \forall j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \ h_{Ro}\\
&\text{sujeito a}\\
&h_{Ro}x_o \ge \sum_j \lambda_j x_j\left[1+\frac{x_o(1-h_{Ro})}{\sum_{j\neq o} x_j}\right] \qquad (15)\\
&\sum_j \lambda_j y_j \ge y_o\\
&\lambda_j \ge 0, \forall j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \ h_{Ro}\\
&\text{sujeito a}\\
&h_{Ro}x_{ok} \ge \sum_j \lambda_j x_{jk}\left[1+\frac{x_o(1-h_{Rok})}{\sum_{j\neq o} x_{jk}}\right], \forall k \qquad (16)\\
&\sum_j \lambda_j y_{jr} \ge y_{or}, \forall r\\
&\lambda_j \ge 0, \forall j
\end{aligned}$$

É possível, ainda, derivar modelos DEA-GSZ CCR com restrições aos pesos. Tomando como base os modelos apresentados por Cooper et al. (2000), que incorporam restrições do tipo Regiões de Segurança ao modelo DEA CCR do envelope, apresentase em (17) e (18), os modelos DEA-GSZ CCR com restrições aos pesos, orientados a *inputs* e a *outputs*, respectivamente, nos quais ϑ_i e γ_i são as variáveis duais que representam as restrições aos pesos no modelo dos multiplicadores, conforme proposto por Estellita Lins e Silva (2001, 2002). Em (17) e (18), $B^T\vartheta$ e $A^T\gamma$ representem as matrizes dos coeficientes das restrições aos pesos de *inputs* e *outputs*, $Bv \le 0$ e $Au \le 0$, respectivamente.

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad h_{Ro}\\
&\text{sujeito a}\\
&h_{Ro}x_{ok} \ge \sum_j \lambda_j x_{jk}\left[1+\frac{x_o\left(1-h_{Rok}\right)}{\sum_{j\neq o} x_{jk}}\right]+B^T\vartheta_i, \forall k \qquad (17)\\
&\sum_j \lambda_j y_{jr} \ge y_{or}, \forall r\\
&\lambda_j, \vartheta_i \ge 0, \forall j, i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Max } h_{Ro}\\
&\text{sujeito a}\\
&\sum_j \lambda_j x_{jk} \le x_{ok}, \forall k \qquad (18)\\
&h_{Ro}y_{or} \le \sum_j \lambda_j y_{jr}\left(1-\frac{y_{or}\left(h_{Ro}-1\right)}{\sum_{j\neq o} y_{jr}}\right)-A^T\gamma_i, \forall r\\
&\lambda_j, \gamma_i \ge 0, \forall j, i
\end{aligned}$$

2.3. Cooperação entre DMUs

A situação até aqui modelada representa o caso em que uma única DMU busca a fronteira eficiente. Entretanto, há a possibilidade de mais de uma DMU procurar maximizar a eficiência, o que pode ser feito em competição ou cooperação. Neste artigo trata-se apenas do caso de um número de DMUs que formam um grupo de cooperação. No paradigma do DEA-GSZ, a busca em cooperação significa que as DMUs deste grupo tentam retirar determinada quantidade de *output* apenas das DMUs não pertencentes ao grupo.

Para o caso de duas DMUs atuando em cooperação para a busca de eficiência, o modelo DEA-GSZ é expresso por um Problema Bi-objetivo Não Linear; no caso geral, de múltiplas DMUs atuarem em regime de cooperação, o modelo DEA-GSZ é um problema de programação não linear multiobjetivo (Gomes, 2003; Gomes et al., 2003a, 2003b).

Para o caso de uma estratégia qualquer de redução, o modelo multiobjetivo deve ser resolvido com o uso de técnicas de Programação Não Linear Multiobjetivo. Problemas deste tipo conduzem freqüentemente ao uso de metaheurísticas. No entanto, para a estratégia de redução proporcional, em especial para o modelo CCR, Gomes (2003) e Gomes et al. (2004) provam que o modelo é reduzido a um modelo de Programação Não Linear Mono-objetivo, segundo o Teorema da Proporcionalidade das Eficiências em Estratégia Proporcional (Gomes, 2003; Gomes et al., 2003a), cujo enunciado diz: "Considere-se o problema de várias DMUs em cooperação na busca de alvos com estratégia proporcional; as eficiências das DMUs no modelo DEA-GSZ são diretamente proporcionais às suas eficiências no modelo DEA clássico".

Como conseqüência deste teorema, ao considerar-se o caso em que várias DMUs atuam em cooperação na busca de alvos com estratégia proporciona, o Problema de Programação Não Linear Multiobjetivo é reduzido a um Problema de Programação Não Linear Mono-objetivo.

2.4. Uniformização da fronteira DEA

No caso em que todas as DMUs ineficientes formam um único grupo de cooperação e buscam eficiência na fronteira de eficiência DEA clássica, a aplicação do modelo DEA-GSZ fará com que ocorra a redistribuirão do *input* ou do *output* de soma constante. Após essa redistribuição, todas as DMUs pertencerão à fronteira eficiente, ou seja todas serão 100% eficientes.

Esta nova fronteira DEA, aqui chamada de fronteira DEA uniformizada ou de eficientização máxima, estará localizada em níveis inferiores aos da fronteira DEA do modelo clássico, já que as DMUs eficientes perdem unidades de *output* (ou ganham unidades de *input*) para compensar o ganho (ou perda) das unidades ineficientes, de modo a manter a soma constante. Esta situação de eficientização máxima pode ser vista como "ideal" por órgão reguladores, já que será apresentado ao decisor a distribuição de recursos (ou produtos) que faz com que todas as unidades sejam 100% eficientes.

Para a construção da fronteira uniformizada de forma direta, em que as DMUs ineficientes forma um grupo de cooperação *W*, segundo o modelo DEA CCR, tem-se as equações (19), para orientação a *inputs*, e (20), para orientação a *outputs*, que representam o Teorema da Determinação do Alvo ("o alvo da DMU em análise no DEA-GSZ de estratégia proporcional é igual ao alvo no caso clássico multiplicado pelo coeficiente de (19) e (20), h_{Ri} e h_i são, respectivamente, as eficiências nos modelos DEA-GSZ CCR e DEA CCR clássico; *W* é o grupo de DMUs em cooperação; $r_{ij} = h_{i-I} / h_{j-I}$ é o fator de proporcionalidade resultante do emprego da estratégia proporcional, na orientação a *inputs*; $q_{ij} = h_{i-O} / h_{j-O}$ é o fator de proporcionalidade na orientação a *outputs*. Para os modelos DEA BCC orientados a *outputs* e a *inputs* são derivadas expressões análogas (Gomes, 2003).

$$h_{Ri} = h_i \left(1 + \frac{\sum_{j \in W} \left[x_j \left(1 - r_{ij} \; h_{Ri} \right) \right]}{\sum_{j \notin W} x_j} \right) \tag{19}$$

$$h_{Ri} = h_i \left(1 - \frac{\sum_{j \in W} \left[y_j \left(q_{ij} h_{Ri} - 1 \right) \right]}{\sum_{j \notin W} y_j} \right) \tag{20}$$

3. CONCLUSÕES

Os modelos DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ), tanto com retornos constantes (CCR) ou variáveis de escala (BCC), com orientação a *inputs* ou a *outputs*, com ou sem restrições aos pesos, preenchem uma lacuna na atual literatura em modelagem DEA, qual seja, a da inserção da restrição de soma constante para *inputs* ou *outputs* (únicos ou múltiplos).

A proposição de modelos DEA-GSZ CCR complementa os modelos já propostos na literatura. Nesses modelos, a adoção de uma estratégia livre (qualquer) pode alterar a fronteira. Prova-se, neste artigo, que com base na geometria da fronteira DEA CCR, a estratégia que não altera a composição da fronteira, a menos da DMU (ou DMUs) que busca(m) a eficiência, é a estratégia proporcional, o que simplifica bastante o modelo.

As estratégias de busca da fronteira por várias DMUs atuando em cooperação pode ser levada ao ponto em que se obtenha a fronteira de eficientização máxima, ou fronteira uniformizada. Essa situação pode ser vista como "ideal" por órgãos reguladores ou agências de controle central, já que representa a alocação ótima de recursos ou de produção entre todas as DMUs da amostra em avaliação.

4. REFERÊNCIAS

Banker, R.D., Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.

Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y. & Seiford, L.M. (1994). *Data envelopment analysis: Theory, methodology and applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.

Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

Coelli, T.J., Rao, D.S.P. & Battese, G.E. (1998). *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publishers.

Cooper, W.W., Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, USA.

Estellita Lins, M.P. & Angulo Meza, L. (2000). *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*, Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Estellita Lins, M.P., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Soares de Mello, A.J.R. (2003). Olympic ranking based on a Zero Sum Gains DEA model. *European Journal of Operational Research*, 148(2), 312-322.

Estellita Lins, M.P. & Silva, A.C.M. (2001). Evitando a inviabilidade em modelos DEA com restrições aos pesos. *Relatório Técnico EP03/01-PO*, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Estellita Lins, M. P. & Silva, A.C.M. (2002). Avoiding unfeasibility in DEA models with weight restrictions. *Anais do XI Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa*, Concepción, Chile. Disponível em: <http://www.udec.cl/~claioxi/english/comprog.htm>.

Gomes, E.G. (2003). *Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Dezembro.

Gomes, E.G. & Soares de Mello, J.C.C.B. (2002). Determinação de alvos em modelos DEA com ganhos de soma zero. *Anais do XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, RJ, Novembro.

Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita Lins, M.P. (2001). Modelos DEA com soma de *outputs* constante. *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campos do Jordão, SP, Novembro.

Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita Lins, M.P. (2003a). Busca seqüencial de alvos intermediários em modelos DEA com soma de *outputs* constante. *Investigação Operacional*, 23 (2), 163-178.

Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita Lins, M.P. (2003b) Deslocamento de DMUs pela fronteira de eficiência em modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero. *Anais do XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Natal, RN, Novembro.

Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita Lins, M.P. (2004). Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero e Retornos Constantes de Escala. Actas do 11º Congresso da Associação Portuguesa de Investigação Operacional, Porto, Portugal, Abril.

Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Estellita Lins, M.P. & Soares de Mello, A.J.R. (2001). Uso da Pesquisa Operacional em esportes: o caso das Olimpíadas. *Boletim da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional*, 19, p. 5-6.