

# DESLOCAMENTO DE DMUS PELA FRONTEIRA DE EFICIÊNCIA EM MODELOS DE ANÁLISE DE ENVOLTÓRIA DE DADOS COM GANHOS DE SOMA ZERO

**Eliane Gonçalves Gomes** Embrapa Monitoramento por Satélite Av. Dr. Júlio Soares de Arruda, 803, Parque São Quirino, 13088-300, Campinas, SP  
[cliane@cnpm.cembrapa.br](mailto:cliane@cnpm.cembrapa.br)

**João Carlos Correia Baptista Soares de Mello**  
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, 24240-240, Niterói, RJ [jcsmllo@producao.uff.br](mailto:jcsmllo@producao.uff.br)

**Marcos Pereira Estellita Lins**  
Programa de Engenharia de Produção - Universidade Federal do Rio de Janeiro Cidade Universitária, Ilha do Fundão, Centro de Tecnologia, F-105, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ  
[lins@pep.ufRJ.br](mailto:lins@pep.ufRJ.br)

## Resumo

Neste artigo apresenta-se uma extensão do modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) para os casos em que devido à redução de *outputs* (para que a soma seja constante), há a possibilidade ou a imposição de redução dos *inputs* utilizados. Nesses casos, não há o deslocamento da fronteira, mas sim o deslocamento das DMUs pela fronteira eficiente (ou pelas camadas de iso-eficiência). São apresentados os casos bidimensional e multidimensional. Para este, devido à complexidade dos algoritmos de determinação de faces do poliedro envolvente (fronteira DEA), é proposto o uso do modelo de suavização da fronteira, que representa a fronteira inteira por uma única equação polinomial.

**Palavras-chave:** DEA - Ganhos de Soma Zero - Deslocamento pela fronteira - Fronteira suavizada.

## Abstract

This paper presents an extension to the Zero Sum Gains DEA models (ZSG-DEA) useful for the cases in which the output reduction (sum of the output is constant) obliges reductions in the inputs values. Instead of displacing the frontier, the DMUs move themselves along the efficient frontier (or iso-efficiency layers). The bidimensional and multidimensional cases are illustrated. For the latter case, due to the complexity of the algorithms that compute all the faces of the efficient frontier, we propose the use of the smoothed DEA frontier.

**Key words:** DEA - Zero Sum Gains - Movement along the efficient frontier - Smoothed frontier.

## 1. INTRODUÇÃO

O objetivo da Análise de Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* - DEA) é avaliar a eficiência de unidades produtivas que realizam tarefas similares, chamadas de unidades de tomada de decisão (*Decision Making Units* - DMUs). Essas unidades são comparadas e distinguem-se pelas quantidades de recursos (*inputs*) que consomem e de bens (*outputs*) que produzem (Cooper et al., 2000; Lins e Angulo-Meza, 2000).

Além de identificar as DMUs eficientes, os modelos DEA permitem medir e localizar a ineficiência, e estimar uma função de produção linear por partes, que fornece o *benchmark* para



as DMUs ineficientes. Esse *benchmark* é determinado pela projeção das DMUs ineficientes na fronteira de eficiência. A forma como é feita esta projeção determina a orientação do modelo. Orientação a *inputs* (quando deseja-se minimizar os recursos, mantendo-se os valores dos resultados constantes) e orientação a *outputs* (quando deseja-se maximizar os *outputs* sem diminuir os *inputs*) são as principais.

Os modelos DEA clássicos, tanto o modelo CCR (Charnes et al., 1978) quanto o modelo BCC (Banker et al., 1984), além de todas as suas variantes, supõem total liberdade de produção, ou seja, a produção de uma DMU não interfere na produção das demais. Entretanto, em alguns casos essa liberdade não existe. No caso de competições, por exemplo, se for considerado como *output* um índice que agrega seus resultados (Soares de Mello et al., 2001; Gomes et al., 2001 [15]), a melhora de posição de qualquer competidor implica na perda de posição de um ou mais de seus adversários.

Um outro exemplo é o caso da avaliação de eficiência de unidades produtivas que produzem um determinado produto cuja demanda é constante. Neste caso, uma certa DMU considerada ineficiente deverá produzir mais unidades do produto para atingir a fronteira de eficiência, com a consequente diminuição da produção das demais unidades.

Em Lins et al. (2003), Gomes (2002) e Gomes et al. (2003, 2002, 2001 [14]) são propostas alterações no modelo DEA BCC clássico que considerem essas limitações. Esse novo modelo, chamado de Modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ), apresenta uma situação semelhante à de um jogo com soma zero (Osborne e Rubinstein, 1999), no qual tudo o que é ganho por um jogador é perdido por algum outro(s). Ou seja, a soma líquida dos ganhos deve ser zero.

No modelo DEA-GSZ, ao contrário do que acontece nos modelos tradicionais, o modo como uma DMU atinge seu alvo na fronteira pode implicar na alteração da forma da fronteira eficiente. Essa alteração é função da estratégia adotada na determinação do alvo (igual redução, redução proporcional etc). A busca por eficiência pode ser feita por uma única DMU ou por várias em regime de cooperação, o que conduz a um problema de Programação Não Linear Multiobjetivo (Lins et al., 2003; Gomes et al., 2001 [14]).

De forma análoga, esses modelos podem ser usados em situações em que os *inputs* são constantes, como é o caso de funcionários estáveis em empresas públicas.

Os gestores podem argumentar que é um salto extremamente grande tentar atingir a eficiência de uma só vez, sendo mais factível uma busca gradativa de alvos. Uma forma de determinar estes alvos intermediários, apresentada em Gomes (2002) e Gomes et al. (2003, 2002), é buscá-los nas camadas de iso-eficiência, que representam diferentes níveis de utilização da tecnologia. A busca de alvos consecutivos em camadas de iso-eficiência é chamada de busca sequencial de alvos intermediários. As camadas de iso-eficiência servem ainda como ferramenta na solução do problema de várias DMUs em busca simultânea da eficiência.

As camadas de iso-eficiência são obtidas da seguinte forma: as DMUs com 100% de eficiência formam a camada 1. Essas DMUs são, então, retiradas do conjunto de análise e corre-se novamente o modelo DEA. As DMUs eficientes neste subconjunto formam a camada 2. O processo repete-se até que todas as DMUs tenham sido retiradas do conjunto inicial.

O modelo DEA-GSZ para o caso de duas DMUs ( $A$  e  $B$ ) que buscam eficiência em cooperação é apresentado em (I). Nesse Problema Bi-objetivo Não Linear,  $h_{Rj}$  é a eficiência da DMU  $j$  no modelo DEA-GSZ;  $v_j$  e  $y_j$  são, respectivamente, os *inputs* e os *outputs*;  $X_j$  é a contribuição da DMU  $j$  na formação do alvo da DMU em análise;  $I$  é o conjunto de referência da DMU  $A$ ;  $J$  é o conjunto de referência da DMU  $B$ ;  $y_j'$  são os novos valores de *output* função da estratégia de busca escolhida.

No modelo DEA-GSZ, ao contrário dos modelos clássicos, nos quais a solução pode ser dividida em duas etapas distintas, a saber, construção da fronteira (através da identificação das DMUs extremo-eficientes) e determinação dos alvos (com as diferentes possibilidades de projeção na fronteira), as etapas de construção da fronteira e determinação dos alvos (sequenciais ou não) estão interligadas.

A Figura 1 e a Figura 2 mostram a alteração da fronteira para os casos em que uma única DMU busca eficiência e em que DMUs atuam em cooperação no modelo DEA-GSZ.  $\text{Max } h_{KB}$

$\text{Max } h_{KB}$

sujeito a

$$\tilde{X}_i, \dots, v_i, \langle A_i, \wedge, v_i, \langle x_{8r} i''$$

d)

$$\tilde{A} > 0$$

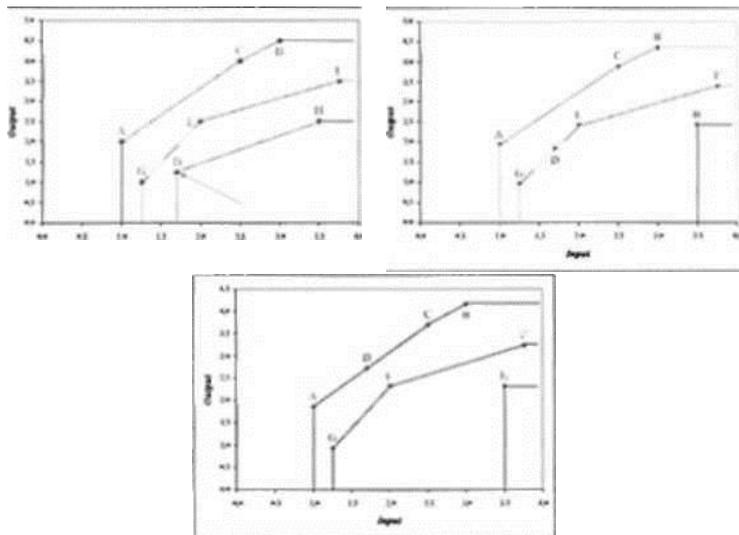


Figura 1. Alteração da fronteira para uma única DMU que busca eficiência no modelo DEA-GSZ seqüencial.

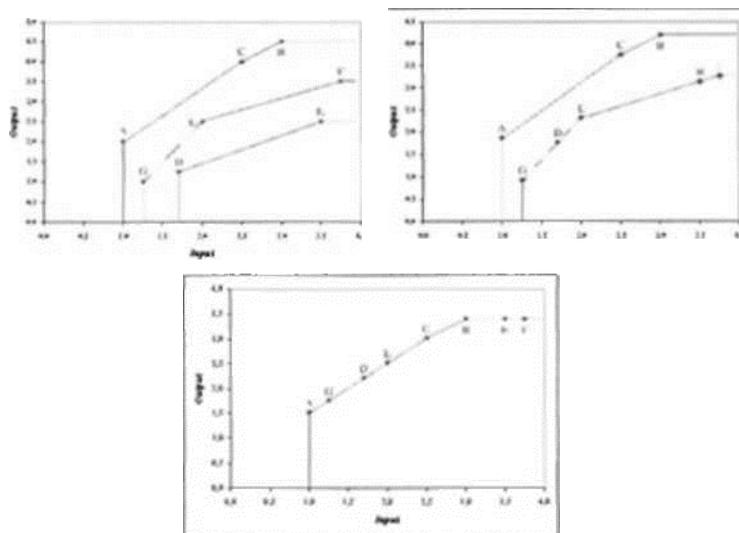


Figura 2. Alteração da fronteira para DMUs atuando em cooperação na busca da fronteira eficiente no modelo DEA-GSZ seqüencial.

Os modelos DEA- $\bar{u}$ SZ até aqui desenvolvidos supõem o deslocamento da fronteira. Consideram a impossibilidade de redução de *inputs* para adequação à redução de *outputs*. No exemplo de avaliação de eficiência olímpica, seria o caso da redução do *input* população para que um país se adequasse à perda de medalhas, o que é evidente que não pode ocorrer, e por isso foi adotada orientação a *outputs*.

Entretanto, há casos em que, devido à redução de *outputs* (para que a soma seja constante), há a possibilidade ou a imposição de redução dos *inputs* utilizados. Esse seria o exemplo da avaliação de eficiência de companhias aéreas operando em uma determinada rota cuja elasticidade preço permita considerar a demanda como constante. Poder-se-ia considerar como *output* o número de passageiros e como *inputs* pessoal, assentos.Km oferecidos e combustível usado (Gomes et al., 2001 [17], Soares de Mello et al., 2003). Ao impor-se demanda constante, uma determinada DMU que tenha reduzido o número de passageiros transportados pelo fato de outra unidade ter aumentado esse número (por exemplo, pela redução das tarifas praticadas), poderá reduzir o número de vôos na rota, com a consequente redução dos *inputs* considerados. Nesse caso, não há o deslocamento da fronteira, mas sim o deslocamento das DMUs pela fronteira eficiente (ou pelas camadas de iso-eficiência).

Sob outras condições, DMUs em deslocamento pela fronteira são encontrados na literatura. Korhonen e Syrjänen (2001), por exemplo, apresentam uma proposta iterativa, baseada em DEA e Programação Linear Multiobjetivo para o problema da alocação eficiente de recursos. Nesta abordagem, as DMUs deslocam-se pela fronteira, mas não há a restrição de a soma dos *outputs* ou dos *inputs* ser constante.

Este artigo propõe um modelo, sob a hipótese de DEA-GSZ, em que as DMUs devem deslocar-se pela fronteira. São abordados os casos bidimensional e multidimensional.

## 2. DMUS EFICIENTES EM DESLOCAMENTO PELA FRONTEIRA: CASO BIDIMENSIONAL

Supõe-se o paradigma do DEA-GSZ, ou seja, a soma dos *outputs* deve ser constante, e busca sequencial de alvos intermediários, isto é, a DMU  $o$  (ineficiente) busca eficiência de forma gradual nas camadas de iso-eficiência.

As demais DMUs  $i, j \neq o$ , deslocam-se pela fronteira até atingir um ponto com o valor de *output* determinado pelo modelo DEA-GSZ, com *input* que, com este valor de *output*, a mantenha na fronteira. O valor do *input* é dado pela interseção das faces que contêm as DMUs (Gomes, 2002) com a reta horizontal que representa o valor do novo *output*.

A Figura 3 (a) e (b) representa um exemplo bidimensional hipotético. É representada a configuração espacial (8 DMUs e as camadas de iso-eficiência). A DMU  $o$  busca eficiência e as demais deslocam-se pela fronteira. Destaca-se que o procedimento é análogo para as buscas que não consideram alvos intermediários nas camadas de iso-eficiência.

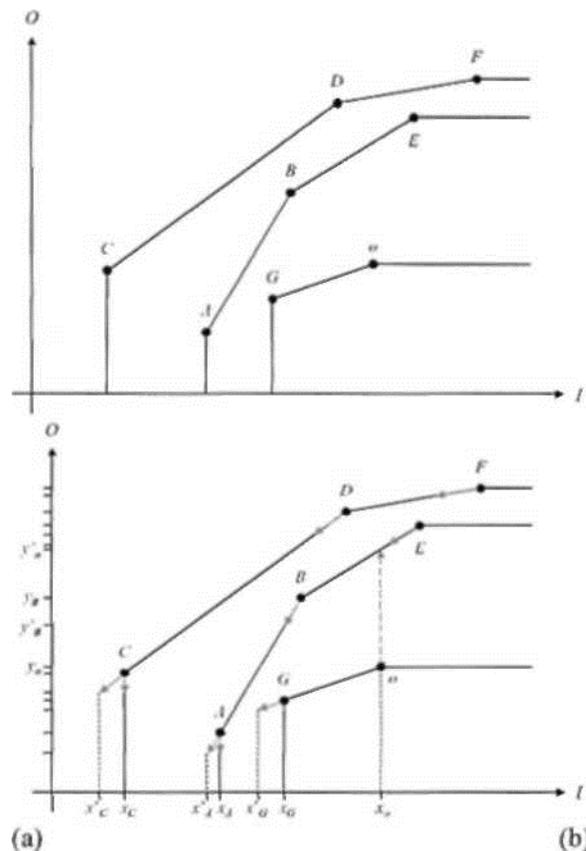


Figura 3 (a) c (b). Configuração espacial (a) e representação do deslocamento de DMUs eficientes pcla(s) fronteira(s) (b).

A estratégia da DMU  $o$  na busca por eficiência é a estratégia proporcional de projeção na  $T$  camada de iso-eficiência. A vantagem dessa estratégia (Gomes et al., 2003, 2002; Gomes, 2002) é a possibilidade de aprender e gerar conhecimento sobre as práticas desse estágio de utilização da tecnologia. As DMUs  $B$  e  $E$  são referências para a DMU  $o$  nessa camada.

O alvo da DMU  $o$  na 2<sup>a</sup> camada é dado por  $r \cdot v$ , onde  $v = I r v$ . Como a condição de DEA-GSZ é imposta, o ganho deve ser igual à soma das perdas, ou seja,  $\text{ganho} = (r - 1) \cdot v$ .

Para a estratégia proporcional, a perda de *output* de cada DMU  $y^j$ ,  $j \in O$  tem valor  $v \cdot v \cdot (ir - 1)$  (Lins et al., 2003; Gomes, 2002; Gomes et al., 2001 [14]). Com o valor da perda.

é possível calcular o valor dos níveis de *output* para essas DMUs. O valor dos *inputs* é obtido através das equações das faces que contêm as DMUs. Ressalte-se que a obtenção dessas equações, para dimensões superiores, é um problema combinatório de alta complexidade (Fukuda, 1993).

Na Figura 3 (b) verifica-se que há duas possibilidades para o cálculo do nível de *input* após o deslocamento para as DMUs  $A$  e  $C$ , extremos da região não Pareto eficiente "inferior". Ou o valor do *input* não se altera ( $I_{SA}$ ) ou é calculado pelo prolongamento da face ( $I_{PF}$ ) que contém esta DMU.

Ainda é possível facultar ao decisor escolher um valor para o *input* que esteja contido no intervalo  $(I_{PF}, I_{SA}]$ . A Figura 4 é um recorte ampliado para o caso da DMU  $C$ .

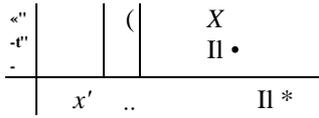


Figura 4. Possibilidades do valor de  $in/ntf$  para DMUs limites da região Parcto ineficiente.

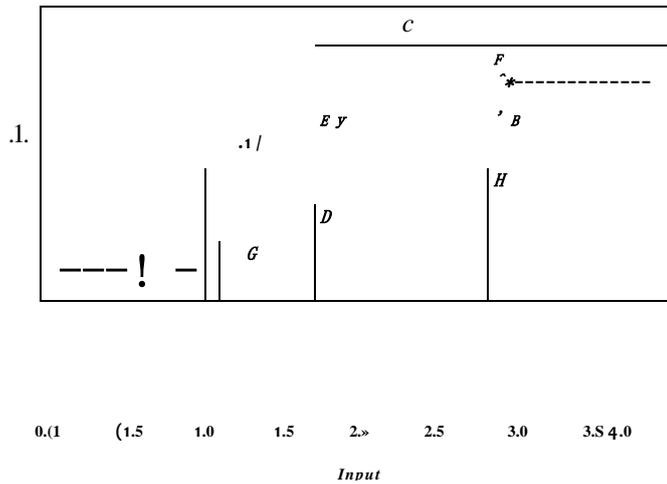
2.1. Exemplo numérico

Na Tabela I são apresentados os dados para o exemplo numérico hipotético para o caso bidimensional. A Figura 5 traz a configuração espacial das DMUs nas camadas de iso-eficiência.

Figura 5. Localização das DMUs nas camadas de iso-eficiência.

Tabela I. Valores de input e output para o exemplo numérico bidimensional.

DMU	Input	Output
A	1,0	2,0
B	3,0	3,0
C	2,5	4,0
D	1,7	1,5
E	2,0	2,5
F	3,1	3,5
G	1,1	1,0
H	2,8	2,0
I	3,5	2,5
Soma		22,0



Supondo que a DMU B busque eficiência na camada de eficiência imediatamente superior, as DMUs E e F são seus benchmarks. Rodando-se o modelo DEA BCC clássico, obtém-se que a eficiência de B na 2ª camada é 88%, ou seja,  $h_j = 1,1364$ .

O alvo  $y_B'$  que deve ser atingido tem valor 3.41. O ganho é dado por  $(//j - 1)i$  ou ainda  $\text{ganho} = y_B' - y_B$ . Assim,  $\text{ganho} = 0,41$  e esse valor deve ser igual à soma das perdas (proporcionais ao

*IrB*

Para a DMU *B* o valor do *input* permanece igual ao valor original. Para as DMUs *A, C, E, F, H, I*, o valor do *input* é dado pela equação das faces à qual pertencem. A Tabela 2 traz os valores do *input* e do *output* para o conjunto de DMUs do exemplo após deslocamento pelas fronteiras; a Figura 6 mostra sua representação gráfica.

Tabela 2. Valor do *input* e do *output* após deslocamento pela fronteira.

DMU	Input	Output
A	0,97	1,96
B	3,00	3,41
C	2,44	3,91
D	1,67	1,47
E	1,97	2,45
F	3,02	3,42
G	1,09	0,97
H	2,74	1,96
I	3,42	2,45
Soma		22,00

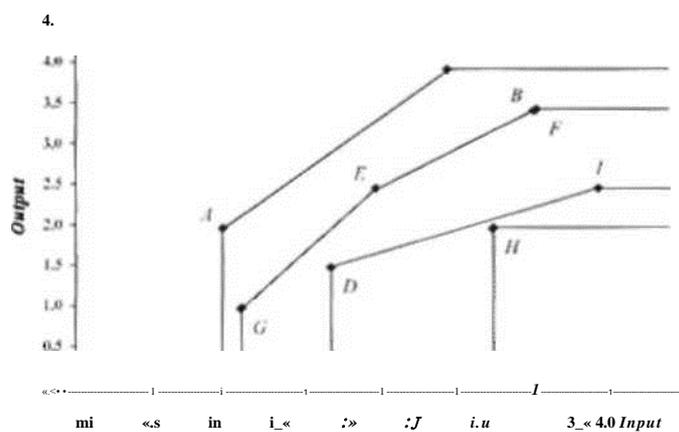


Figura 6. Disposição das DMUs após deslocamento pela fronteira.

XXXVSBPD

nível de *output*) das demais DMUs. Cada DMU  $j \in B$ , perderá

oposição, as faces que cumprem essas condições de eficiência são denominadas de regiões Pareto-Koopmans eficientes, ou fortemente eficientes.

A determinação das DMUs eficientes, em especial extremo-eficientes, como forma de acelerar os algoritmos de solução dos modelos DEA, tem sido objeto de estudo de diversos autores (Ali, 1993, 1994; Dulá & Thrall, 2001; Dulá, 2002).

A especificação de todas as faces do poliedro envolvente também tem recebido atenção (González-Araya, 2003). No caso bidimensional, a determinação de todas as faces, na verdade, segmentos de reta, é relativamente simples e pode ser feita analiticamente. Para os casos de dimensões superiores, como já destacado, a obtenção dessas equações, agora planos ou hiperplanos, é um problema combinatório de alta complexidade, já que devem ser testadas todas as combinações possíveis de formação de hiperplanos a partir das DMUs eficientes.

Na literatura são encontrados diferentes algoritmos que permitem encontrar todas as faces eficientes em um poliedro (Ecker et al., 1980; Armand, 1993; Fukuda, 1993; Barber et al., 1996). Entretanto, esses algoritmos têm a limitação na determinação da fronteira estimada por DEA de ou não serem facilmente implementados, ou não serem factíveis de implementação.

Em DEA, Pille e Paradi (1997) desenvolveram um algoritmo ("Algoritmo Gerador de Facets"), que determina todas as *faces* eficientes presentes na fronteira estimada pelos modelos com rendimentos de escala variáveis. Esse algoritmo envolve uma série de modelos de programação linear que devem ser resolvidos sequencialmente. González-Araya (2003) propõe um algoritmo de busca de todas as faces eficientes da fronteira DEA com maior dimensão.

Devido à grande complexidade dos algoritmos existentes na literatura, optou-se por uma abordagem alternativa de determinação da fronteira. Foi usada a abordagem proposta por Soares de Mello et al. (2004, 2002) de suavização da fronteira DEA por meio de uma única equação. Nessa abordagem, a fronteira DEA clássica é substituída por outra que tem propriedades semelhantes, mas continuamente diferenciável. Entre as propriedades mantidas, está a atribuição de eficiência unitárias às DMUs extremo-eficientes do modelo DEA original, convexidade, monotonicidade crescente dos *inputs* com os *outputs* e atribuição de pesos diferentes por cada DMU (Soares de Mello et al., 2004).

O polinômio que substituirá a fronteira DEA original tem a forma apresentada em (2), onde  $Z$  representa o *output* e  $x$  e  $y$  os *inputs*. O polinômio deve possuir o menor grau possível que não cause inviabilidade da suavização. Assim, o grau do polinômio é função do número de DMUs extremo-eficientes.

$$Z = a + hx + cr + iv + exy + fy^2 + ff'x' + hx^*y + ix'y^2 + Jy^l + kx^A + lx'y + mx^2y + nxy' + oy^* + \dots \quad (2)$$

O modelo (3) representa a formulação geral do modelo DEA BCC tridimensional suavizado, com garantia de convexidade (Soares de Mello et al., 2004; Soares de Mello, 2002). Nesse modelo,  $Z$  representa o aproximante polinomial que substituirá a fronteira DEA clássica;  $V_{min}$ ,  $X_{min}$ ,  $V_{max}$  e  $x_{max}$  representam o menor e o maior valor de cada *input*;  $d, f, g, \dots$  são as variáveis de decisão (coeficientes do polinômio).

Assim, para o caso das DMUs que se deslocam na fronteira DEA para o caso multidimensional, após obtida a equação da fronteira suavizada, procede-se como no caso bidimensional, ou seja, determinam-se os novos valores de *inputs* calculando-se a interseção dos planos horizontais que representam os novos níveis de *output* com a fronteira suavizada. Os novos *outputs* são calculados

## 1 DMUS EFICIENTES EM DESLOCAMENTO PELA FRONTEIRA: CASO ML LTIDIMENSIONAL

Os modelos DEA clássicos geram uma fronteira eficiente empírica, linear por partes, baseada nas melhores práticas observadas. Essa fronteira é constituída pelas DMUs eficientes e pelas faces por elas geradas, que criam uma envoltória sob o conjunto de DMUs ineficientes. Como afirmado por González-Araya (2003), essa fronteira eficiente não é homogênea. Muitas faces não cumprem as condições de eficiência de Pareto-Koopmans e são denominadas de regiões não Pareto-Koopmans eficientes, ou fracamente eficientes (a projeção radial das DMUs ineficientes nessas regiões apresenta folgas diferentes de zero nos *inputs* e/ou nos *outputs*). Em

### XXXVSBPD

segundo o modelo DEA-GSZ. Os passos dessa abordagem são mostrados através de um exemplo numérico.

$$\text{Min } \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1} + \frac{azV}{dx} \quad \text{dvd}x$$

sujeito a

$$\tilde{\theta}x$$

$$-(v, y) > 0$$

$$\langle \lambda, \mathbf{1} \rangle < 0 \quad (3)$$

### 3.1. Exemplo numérico

Na Tabela 3 são apresentados os dados para o exemplo numérico hipotético (caso multidimensional) e as eficiências segundo o modelo DEA BCC clássico.

Rodando-se o modelo DEA BCC clássico, a DMU *E* é a unidade ineficiente que busca eficiência; as DMUs *C* e *D* são seus *benchmarks*. A eficiência de *E* é 84,3%, ou seja,  $h_E = 1,1867$ . O alvo  $y_F'$  que deveria ser atingido na fronteira clássica tem valor 29,71. Entretanto, sob o paradigma DEA-GSZ as DMUs não devem caminhar nas faces produzidas pelo modelo clássico, mas sim na fronteira suavizada. Para tal, é necessário obter a equação dessa fronteira que substituirá o poliedro DEA BCC clássico.

Tabela 3. Valores de *input* e *output* para o exemplo numérico tridimensional.

DMU	Input 1	Input 2	Output	Eficiência BCC clássica (%)
A	1,0	1,0	18,5	100,0
B	2,0	5,0	26,0	100,0
C	3,0	4,0	33,5	100,0
D	2,0	1,0	22,0	100,0
E	5,0	3,0	25,0	84,3
Soma			125,0	

Para a escolha do aproximante há uma relação entre o número de DMUs extremo-eficientes *c* o grau do polinómio (Soares de Mello et al., 2004; Soares de Mello, 2002). Essa relação garante que o número de restrições de igualdade seja inferior ao número de variáveis de decisão (coeficientes do polinómio). As restrições de igualdade garantem que a fronteira suavizada contenha todas as DMUs extremo-eficientes. Como no exemplo há 3 DMUs extremo-eficientes (DMU *B* é eficiente mas não extremo-eficiente), o polinómio deve ser de grau 2 e é expresso pela equação (3). O que se deseja é determinar os coeficientes desse polinómio.

$$z = a + bx + cy + dx^2 + c.v^n + fy^j \quad (3)$$

Dev-se obter a função objetivo (FO) do modelo suavizado, que envolve a integração dupla do quadrado das derivadas parciais do aproximante apresentado em (3). Dessa forma, obtêm-se as equações (4), (5) e (6).

$$\frac{\partial}{\partial x} = h + dv + 2ex \Rightarrow \int \int -\frac{1}{ydx} -b^2 + d \cdot v^2 + 4e^2x^2 + 2bdv + 4bex + 4dex \quad (4)$$

$$\frac{2}{v} = c + dx +$$

$$(5)$$

$$\text{ar} = c' + cl' + 4f'y' + 2cdx + Acfy + 4dfxy$$

$$+ d^2y' + 4e^2x^2 + 2bdy + 4bex + 4dcx + c^2 + d'x' + 4/2 y^2 + 2cdx + 4cfy + 4d/xypxáy$$

(6)

Ao integrar-se a expressão em (6) e aplicar-se os limites de integração, obtém-se a FO. Assim, o modelo de suavização é o apresentado em (7).

$$\text{Min } 4^{24}(bd + 2tf) + 4(h^2 + c^1) + Y(d^2 + 4f^2) + 12 \cdot 8(2/e + \langle l \rangle) + 48(\langle fe + \langle l \rangle \rangle) + Y(d^2 + 4e^2)$$

sujeito a

$$b + 5d + \langle 0e \rangle > 0$$

$$c + 5d + \langle 0f \rangle > 0$$

$$a + b + c + d + e + f = 18,5$$

$$a + 2b + 5c + 10d + 4e + 25f = 26$$

$$a + 3b + 4c + 12d + 9e + 16f = 33,5$$

$$a + 2b + c + 2d + 4e + f = 22$$

$$i' < 0$$

$$e < 0$$

$$f < 0$$

(7)

Como resultado do modelo de otimização (7), temos  $\langle = 11.3333$ ,  $b = 2,6905$ ,  $c = 4.5238$ ,  $d = 0.8095$ ,  $e = 0.0000$  e  $f = -0,8571$ . Note-se que como a DMU B é eficiente

mas não extremo eficiente, o modelo suavizado desprezou o termo em  $x^2$  ( $e = 0$ ). Com os valores dos coeficientes obtém-se a equação da fronteira suavizada, apresentada em (8) e sob essa curva que as DMUs eficientes deslocar-se-ão em busca dos novos valores de *inputs* e *outputs* no modelo DEA-GSZ.

$$z = 11.3333 + 2.6905 \cdot v + 4.5238 \cdot v + 0.8095 \cdot vv - 0,8571 \cdot f \quad (8)$$

O alvo a ser buscado pela DMU E,  $y_F'$ , está na fronteira suavizada e tem valor de 42,78. O ganho tem valor  $y_r' - y_r$ , ou seja,  $42,78 - 25 = 17,78$ . No modelo DEA-GSZ, o ganho deve ser igual à soma das perdas (proporcionais ao nível de *output*) das demais DMUs. Assim,

para cada DMU  $j \in E$ ,  $v_j \cdot (v_E' - v_j) = 17,78$ . A Tabela 4 apresenta os novos valores de

к с

*output* para as DMUs em questão.

Tabela 4. Novos valores de *output* para as DMUs no modelo DEA-GSZ em fronteira suavizada.

DMU	Novo valor de <i>output</i>
A	15,21
B	21,38
C	27,54
D	18,09
E	42,78
Soma	125,00

A análise da Tabela 4 permite verificar que houve o deslocamento das DMUs pela fronteira de eficiência suavizada, já que todas, exceto a DMU E, tiveram seus valores de *output* reduzido, de modo a manter a soma constante (igual a 125,0).

Para a DMU E os valores dos *inputs* permanecem inalterados. Para as demais DMUs, os valores dos *inputs* são dados pela equação da fronteira suavizada. Entretanto, ao deslocar-se nessa fronteira a DMU pode seguir qualquer direção de movimento, já que qualquer ponto na curva de nível resultante da intersecção da fronteira suavizada com o plano de corte  $z = z_v$  é

solução do problema, onde  $z_v$  é o novo valor do *output*. Optou-se por escolher o deslocamento que dê o caminho mais curto até o plano  $z = z_v$ , considerando -se a distância Euclidiana. Esta opção garante que a DMU em questão deve promover alterações mínimas nos seus *inputs*. Assim, para cada DMU  $i \in J^*$ , é resolvido o problema de otimização apresentado em (9). Nesse problema,  $x_{i0}$ ,  $y_{i0}$  e  $z_{i0}$  são os valores originais dos *inputs* e do *output*, respectivamente, e  $x_{iN}$  e  $y_{iA}$  são os novos valores de *inputs*, ou seja, as variáveis de decisão. A Tabela 5 apresenta os resultados finais.

$$\text{Min } (v_1 - v_1)^2 + (v_2 - v_2)^2 + (z_0 - z_v)^2 \text{ sujeito a}$$

$$11,3333 + 2,6905.v_1 + 4,5238.v_2 + 0,8095.z_0 - 0,8571.z_v = z_v$$

$$v_1, v_2, z_0 > 0$$

(9)

Tabela 5. Novos valores dos *inputs* para as DMUs no modelo DEA-GSZ em fronteira suavizada.

DMU	Input 1	Input 2
A	1,44	0,00
B	1,93	0,91
C	2,72	1,68
D	1,66	0,42
E	5,00	3,00

Comparando-se os valores iniciais dos *inputs* (Tabela 3) com os resultados finais (Tabela 5) no paradigma do modelo DEA-GSZ, constata-se que todas, exceto a DMU E, tiveram o valor do *input* alterado para adequarem-se à redução do *output*.

#### 4. CONCLUSÕES

Um resultado importante dos modelos DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) é o fato de os dois problemas tradicionais em DEA (determinação da fronteira e busca de alvos) ficarem estreitamente acoplados, ou seja, a simples busca por eficiência altera a forma da fronteira.

Alem disso, a possibilidade de redução de *inputs* para as DMUs que tiveram redução no nível de *output*, provocando o deslocamento dessas DMUs ao longo da fronteira de eficiência (ou camadas de iso-eficiência) expande as aplicações do modelo DEA-GSZ e os resultados obtidos anteriormente, cm que havia o deslocamento da fronteira.

O caso bidimensional, que provoca o deslocamento das DMUs por retas, é de implementação relativamente fácil. Já para o caso multidimensional, a complexidade do problema c aumentada pelo fato de a determinação de todas as faces do poliedro envolvente requerer algoritmos de complexidade NP. Alternativamente, foi utilizado o método de suavização da fronteira, que reduziu essa complexidade de cálculos. Além disso, essa abordagem não necessita de escolha por parte do decisor para as DMUs que estão localizadas no limite da região Pareto ineficiente (recordar Figura 4), já que a fronteira suavizada elimina as regiões Pareto ineficientes.

Uma alternativa à distância Euclidiana para encontrar o novo valor dos *inputs* no caso tridimensional é o emprego das métrica de Tchbycheff. Neste caso, o problema de programação quadrática é substituído em um problema MinMax, possível de ser linearizado.

Os desenvolvimentos futuros deverão contemplar a aplicação dos modelos aqui propostos a estudos de casos reais.

## REFERÊNCIAS

- [I] Ali, A. I. (1993). Streamlined computation for data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **64** (1), 61-67.
- [2] Ali, A.I. (1994). Computational aspects of Data Envelopment Analysis. **In: DEA: Theory, Methodology and Applications** [edited by A. Chames, W.W. Cooper, A.Y. Lewin and L.M. Sciford], Kluwer Academic Publishers, Boston. [3] Armand, P. (1993). Finding all Maximal Efficient Faces in Multiobjective Linear Programming. *Mathematical Programming*, **61**, 357-375. [4] Banker, R.D., Chames, A. & Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, **30** (9), 1078-1092.
- [5] Barber, C.B., Dobkin, D.P. & Huhdanpaa, II. (1996). The Quickhull Algorithm for Convex Hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **22** (4), 469-483.
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decisionmaking units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.
- [7] Cooper, W.W., Sciford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, Reference's and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, USA.
- [8] Dulá, J.II. & Thrall, R.M. (2001). A computational framework for accelerating DEA. *Journal of Productivity Analysis*, **16**, 63-78.
- [9] Dulá, J.H. (2002). Computations in DEA. *Pesquisa Operacional*, **22** (2), 165-182.
- [10] Ecker, J.G., Hegner, N.S. & Kouada, LA. (1980). Generating all Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **30**, 353-381.
- [II] Fukuda, K. (1993). *cdd.c: C Implementation of the Double Description method for computing all vertices and extremal rays of a convex polyhedron given a system of linear inequalities*. Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland.
- [12] Gomes, E.G. & Soares de Mello, J.C.C.B. (2002). Determinação de Alvos em Modelos DEA com Ganhos de Soma Zero. *Anais do XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, Brasil. [13] Gomes, E.G. (2002). *Modelos de Análise de Envoltório de Dados com inputs ou outputs de soma constante*. Exame de Qualificação ao Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.



- [14] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Lins, M.P.E. (2001). Modelos DEA com soma de outputs constante. *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campos do Jordão, Brasil.
- [15] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Lins, M.P.E. (2001). Uso de Análise de Envoltória de Dados e Auxílio Multicritério à Decisão na análise de dados das Olimpíadas 2000". *Anais do XXIENEGEP - Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, Salvador, Brasil.
- [16] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Lins, M.P.E. (2003). Busca sequencial de alvos intermediários em modelos DEA com soma de outputs constante. *Investigação Operacional*, 23 (no prelo). [17] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Serapião, B.P., Lins, M.P.E. & Biondi, L.N. (2001). Avaliação de Eficiência de Companhias Aéreas Brasileiras: Uma Abordagem por Análise de Envoltória de Dados. **In:** *Panorama Nacional da Pesquisa em Transportes 2001* [editado por J.R.A. Sctti e O.F. Lima Júnior], 2, 125-133. [18] Gonçalves-Araya, M.C. (2003). *Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. [19] Korhonen, P. & Syrjänen, M. (2001). Resource allocation based on efficiency analysis. *Working Paper W-293*, Helsinki School of Economics and Business Administration, 25 p.. [20] Lins, M.P.E. & Angulo-Meza, L. (2000). *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- [21] Lins, M.P.E., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Soares de Mello, A.J.R. (2003). Olympic ranking based on a Zero Sum Gains DEA model. *European Journal of Operational Research*, **148** (2), 312-322. [22] Osborne, M.J. & Rubinstein, A. (1999). *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Boston, USA.
- [23] Pille, P. & Paradi, J. (1997). Facets at the Frontier and Efficiency Measurement in DEA. *Fifth European Workshop on Efficiency and Productivity Analysis*, Copenhagen, Denmark, October.
- [24] Soares de Mello, J.C.C.B. (2002). *Suavização da fronteira DEA com o uso de métodos variacionais*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.
- [25] Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi, L.N. & Lins, M.P.E. (2004). Suavização da fronteira DEA: o caso BCC tridimensional. *Investigação Operacional* (a publicar).
- [26] Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo-Meza, L., Gomes, E.G., Serapião, B.P., Lins, M.P.E. (2003) Análise de Envoltória de dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. *Pesquisa Operacional*, 23 (no prelo). [27] Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Lins, M.P.E. & Soares de Mello, A.J.R. (2001). Uso da Pesquisa Operacional em esportes: o caso das Olimpíadas. *Boletim da SOBRA PO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional*, **19**, 5-6.

