

FORMULAÇÃO VETORIAL PARA EFICIÊNCIAS NÃO RADIAIS EM DEA

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello

Departamento de engenharia de Produção – Universidade federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, 24210-240, São Domingos, Niterói, RJ
jcsmello@producao.uff.br

Lidia Angulo Meza

Instituto de Ciência e Tecnologia – Universidade Veiga de Almeida
Rua Ibituruna, 108, 4º andar, 20271-020, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ
lidia_a_meza@yahoo.com

Eliane Gonçalves Gomes

Embrapa Monitoramento por Satélite
Av. Dr. Júlio Soares de Arruda, 803, 13088-300, Parque São Quirino, Campinas, SP
eliane@cnpm.embrapa.br

Luiz Biondi Neto

Departamento de Eletrônica e Telecomunicações – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rua São Francisco Xavier, 524, Bl. E, Sala 5025, 20550-900, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ
lbiondi@uerj.br

Resumo

Este artigo apresenta uma nova abordagem para o cálculo de eficiências não radiais em DEA, qual seja, uma formulação vetorial para eficiências não radiais. Propõe-se a construção de vetores de eficiência que fornecem um majorante para o módulo da eficiência não radial e um limite inferior para a mesma grandeza. Os desenvolvimentos referem-se ao modelo DEA BCC, já que no modelo CCR as eficiências são iguais independentemente da região de projeção. O índice proposto é aplicado a um exemplo numérico.

Palavras-chave: DEA; Eficiência direcional; Projeções de vetores.

Abstract

This paper presents a new approach to evaluate non-radial DEA efficiencies. This approach uses vector formulation to non-radial efficiencies. We propose the construction of an efficiency vector that leads to an index, which is an upper bound for the non-radial efficiency module. We also perform the evaluation of a lower limit for the same index. The developments here proposed are for DEA BCC model, as for the CCR model the efficiencies are the same independently from the projection region. The proposed score is applied in a numeric example.

Keywords: DEA; Directional efficiency; Vectors projection.

1. INTRODUÇÃO

As medidas de eficiência em DEA tem sido abordadas considerando dois enfoques clássicos. O primeiro, considera índices de eficiência radiais, isto é, que consideram a redução ou aumento equiproporcional dos *inputs* ou dos *outputs* (Debreu, 1951; Farrell, 1957) e que podem ser obtidos pelos modelos clássicos de DEA, CCR e BCC. Nos modelos radiais tem-se optado pela redução dos *inputs* ou aumento dos *outputs*, não ocorrendo alterações simultâneas.

O segundo enfoque considera índices de eficiência não radiais, isto é, variações não proporcionais dos *inputs* e *outputs* e permissão de alteração simultânea dos *inputs* e *outputs*. Tone

(2001) apresenta uma revisão bibliográfica dos índices de eficiência não radiais até a data, enfatizando o tratamento escalar.

Estes tratamentos acarretam várias inconsistências aos índices obtidos, entre elas citam-se os casos de eficiências negativas e maiores do que um (Gonzales-Araya, 2003), e combinação matematicamente inadequada de índices. A solução para esse problema está no tratamento vetorial da eficiência seguindo uma analogia com a derivada direcional.

De fato, uma vez que a eficiência depende do ponto de projeção, ela é caracterizada por um número e por uma direção de projeção. Grandezas caracterizadas desta forma são vetoriais (Nussenzveig, 2002). Assim, considerar a eficiência como escalar, como feito usualmente na literatura (Pastor, 1995; Tone, 2001, entre outras), não tem sentido. Seria como postular que a velocidade de um corpo devesse ser escalar.

Este artigo propõe a construção de um vetor de eficiências que projetado na direção do vetor (alvo – DMU de referência) fornece um majorante para o módulo da eficiência não radial. É ainda construído um segundo vetor que fornece um limite inferior para a mesma grandeza e verificadas as condições em que os dois limites são iguais. Destaca-se que os desenvolvimentos que se seguem referem-se ao modelo DEA BCC (Banker et al., 1984), já que no modelo DEA CCR (Charnes et al., 1978) as eficiências são iguais independentemente da região de projeção.

2. ABORDAGEM PROPOSTA

2.1 FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL

2.1.1 Modelo baseado em analogia com derivada direcional

A Figura 1 ilustra os conceitos que serão a seguir definidos. O vetor \vec{ef} , aqui chamado vetor eficiência, tem por coordenadas o simétrico da eficiência orientada a *inputs* e o inverso da eficiência orientada a *outputs*. O simétrico da eficiência orientada a *inputs* é usado no lugar da própria eficiência visto que a projeção é feita na direção decrescente do eixo horizontal. O inverso da eficiência orientada a *outputs* justifica-se pelo fato de nesta orientação a eficiência ser representada por números maiores que a unidade, e pretende-se manter a apresentação de eficiências sempre no intervalo $[0,1]$. No entanto, por simplicidade, o inverso da eficiência orientada a *outputs* será, doravante, denominada apenas por eficiência orientada a *outputs*. Matematicamente, o vetor eficiência \vec{ef} é dado por (I), onde e_i e e_o são as eficiências nas orientações a *inputs* e *outputs*, respectivamente.

$$\vec{ef} = -e_i \vec{i} + e_o \vec{j} \quad (I)$$

Dado um ponto p na fronteira, define-se o vetor \vec{v} como aquele que tem origem na DMU o e extremidade no ponto p . O vetor \vec{v} determina a direção da projeção da eficiência, sendo que esta direção faz um ângulo θ com o vetor eficiência \vec{ef} .

Da definição de produto interno tem-se que o módulo da projeção do vetor eficiência no vetor \vec{v} , ou o módulo da eficiência no vetor \vec{v} (doravante chamado eficiência direcional) é dado por (II), onde α é o ângulo que o vetor \vec{v} faz com o semi-eixo positivo dos *inputs* (havendo decréscimo de *inputs*, como ocorre em projeções dominantes, α é um ângulo maior que 90°). Note-se que em (II), $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ são as coordenadas do vetor unitário $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, ou seja, são os cosenos diretores do vetor \vec{v} .

$$ef_{\vec{v}} = \vec{ef} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -e_i \cos \alpha + e_o \sin \alpha \quad (II)$$

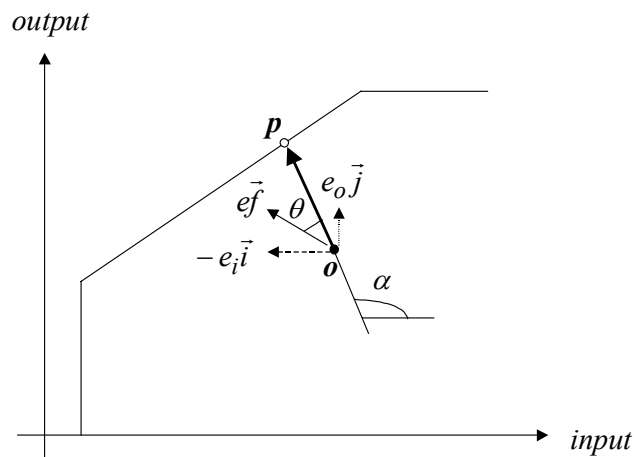


Figura 1: Representação bidimensional da fronteira DEA BCC.

Tem-se, por outro lado, que o produto interno também pode ser calculado em função dos módulos dos dois vetores e do ângulo formado por eles, como apresentado em (III), ou ainda em (IV). De (IV) tem-se que a eficiência direcional é máxima quando $\theta = 0^\circ$.

$$\vec{ef} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{ef} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cos \theta \tag{III}$$

$$\vec{ef} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{ef} \cos \theta \tag{IV}$$

Segundo o modelo até agora adotado, conclui-se que a eficiência direcional máxima é obtida na direção do vetor eficiência. Tendo em vista essa propriedade, é fácil observar que a formulação proposta apresenta inconsistências. Com efeito, no caso de $e_o = e_i = e$, tem-se $ef_{\vec{v}_{\max}} = e\sqrt{2} > 1$, o que é uma clara contradição. Repare-se, ainda, que uma aplicação deste índice ao modelo CCR conduziria a valores da eficiência direcional $ef_{\vec{v}}$ variáveis com a direção, o que contradiz a propriedade deste modelo de ter a eficiência técnica invariante com a orientação.

2.1.2 Modelo com fator de correção

As inconsistências mencionadas no item anterior são particularmente evidentes no caso da DMU o já estar na fronteira. Neste caso, o vetor \vec{v} não pode ser determinado pela diferença de pontos (uma vez que as duas são coincidentes), mas pelos seus cosenos diretores. Para tal DMU, $\vec{ef} = (-1,1)$ e, portanto, a eficiência direcional é dada pela expressão (V).

$$ef_{\vec{v}} = -\cos \alpha + \text{sen } \alpha \neq 1 \tag{V}$$

Para uma DMU na fronteira, a eficiência direcional deveria ser unitária qualquer que seja a direção. Para obter este resultado basta dividir o valor obtido por $-\cos \alpha + \text{sen } \alpha$. A proposta para a eficiência direcional de qualquer outra DMU é corrigir o índice (IV), dividindo-o pela eficiência direcional do seu alvo, ou seja, pelo resultado da expressão (V). Obtém-se, assim, um número entre 0 e 1. De acordo com esta proposta, a eficiência direcional da DMU o na direção do vetor \vec{v} é dada pela equação (VI).

$$ef_{\vec{v}} = \frac{-e_i \cos \alpha + e_o \text{sen } \alpha}{-\cos \alpha + \text{sen } \alpha} \tag{VI}$$

Evidentemente, a expressão (VI) somente é válida para o caso em que o denominador não seja zero. Como na formulação em análise só se consideram projeções dominantes, $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ nunca assumiram o mesmo valor e, conseqüentemente, o denominador será sempre diferentes de zero.

Para investigar as propriedades do índice proposto é conveniente calcular a sua derivada em relação ao ângulo α , conforme apresentado em (VII).

$$\frac{def_{\bar{v}}}{d\alpha} = \frac{-e_o + e_i}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \quad (VII)$$

Três situações podem ocorrer:

- $e_i > e_o \rightarrow$ neste caso, a derivada é positiva e a eficiência direcional é estritamente crescente com o ângulo α . Conseqüentemente, assume o maior valor na orientação a *input* e o menor na orientação a *output*.
- $e_i < e_o \rightarrow$ analogamente, a derivada é sempre negativa e, portanto, a orientação a *output* fornece o valor máximo e a orientação a *input* o valor mínimo.
- $e_i = e_o \rightarrow$ nesta situação, a derivada é nula e, portanto, a eficiência direcional é constante.

Como caso particular deste último tem-se o modelo CCR. Comprova-se, assim, que o índice corrigido mantém coerência com as propriedades do modelo DEA CCR.

É importante destacar que todos os desenvolvimentos anteriores consideraram que as projeções orientadas a *input*, a *output* ou não radiais teriam os alvos sempre na mesma fase. Como pode ser observado na Figura 2 nem sempre isso acontece. Neste caso, os índices propostos supõem que os alvos encontram-se no segmento \overline{AC} , quando na verdade estão na face \overline{BC} . Portanto, a eficiência direcional calculada é maior ou igual que a eficiência direcional real. Dessa forma, a equação (VI) transforma-se na inequação (VIII).

$$\vec{ef} \leq \frac{-e_i \cos \alpha + e_o \sin \alpha}{-\cos \alpha + \sin \alpha} \quad (VIII)$$

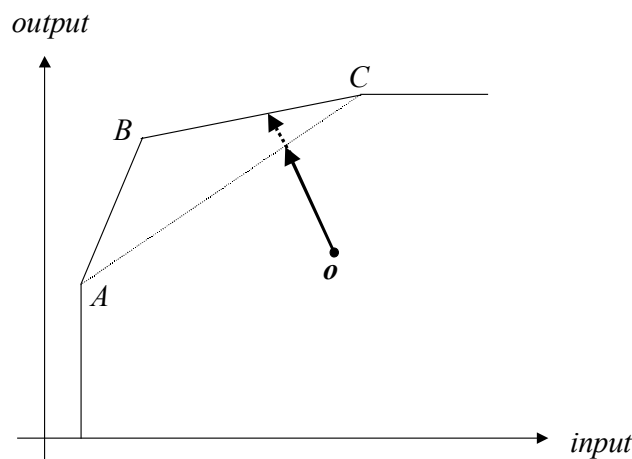


Figura 2. Projeção em diferentes faces.

Para obter uma melhor avaliação da eficiência direcional é necessário, além do limite superior, estimar um limite inferior. Para tal, estende-se a face onde o alvo é projetado e calculam-se as eficiências orientadas a *input* e a *output* em relação a uma fronteira fictícia, composta apenas por essa face. Como a DMU em observação está mais afastada desta fronteira fictícia que da fronteira real, os cálculos efetuados fornecem um valor inferior à eficiência direcional real. Se as duas estimativas forem iguais, ou seja todas as projeções forem na mesma fase, tem-se o valor exato da eficiência direcional. Caso contrário, são válidas as desigualdades apresentadas em (IX), onde x_o e y_o são o

input e o *output* da DMU *o* em análise; *a* e *b* são, respectivamente, os coeficientes angular e linear da face de projeção.

$$\frac{(ax_o + b)(y_o - b)\cos \alpha + ax_o y_o \sin \alpha}{ax_o(ax_o + b)(\sin \alpha + \cos \alpha)} \leq \vec{ef} \leq \frac{-e_i \cos \alpha + e_o \sin \alpha}{-\cos \alpha + \sin \alpha} \quad (\text{IX})$$

Cabe observar que a determinação do limite inferior exige o cálculo da equação da fase de projeção, o que pode acarretar problemas computacionais em problemas de ordem de dimensão superior (Dulá, 2002, Gonzalez-Araya, 2003).

Vale ainda ressaltar que caso o ponto de projeção seja uma DMU extremo-eficiente não existirá uma única face de suporte. Neste caso, pode-se usar a reta tangente à fronteira suavizada (Soares de Mello, 2002; Soares de Mello et al., 2002; Soares de Mello et al., 2004).

2.2. FORMULAÇÃO MULTIDIMENSIONAL

A formulação bidimensional do problema determina a direção de projeção através de um único ângulo α . Para dimensões superiores vários ângulos devem ser considerados. Estes ângulos são determinados através dos cosenos diretores do vetor que indica a direção de projeção, ou seja, pelas coordenadas do unitário de tal vetor (o vetor dividido pela sua norma), conforme apresentado em (X), onde $\cos \alpha_i$ é a *i*-ésima coordenada do unitário do vetor de projeção.

$$\vec{ef}_{\vec{v}} = \frac{ef \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \sum_i \cos \alpha_i \quad (\text{X})$$

Deve-se considerar que o vetor eficiência tem número de coordenadas igual à dimensão do problema, isto é, a soma do número de *inputs* e *outputs*. Portanto, o simples cálculo das eficiências radiais orientadas a *input* e a *output* não é suficiente para caracterizar tal vetor.

Observe-se que cada coordenada do vetor está associado, *ceoteris paribus*, ao índice de contração (expansão) do *i*-ésimo *input* (*output*) para atingir a fronteira. No caso de *input* este índice é o simétrico do fator de contração, e no caso do *output* é o inverso do fator de contração. O fator de contração é calculado segundo o PPL (XI) e o de expansão segundo o PPL (XII).

A Tabela 1 apresenta um exemplo numérico para o caso de dois *inputs* e um *output*. A DMU *D* é BCC ineficiente e em qualquer direção é projetada com dominância na fase composta pelas DMUs *A*, *B* e *C*. A Tabela 2 apresenta os resultados do cálculo dos fatores de contração e de expansão para a DMU *D*. Os resultados não radiais foram obtidos pelos PPLs já apresentados e os resultados radiais obtidos pelo programa SIAD (Angulo-Meza et al., 2003).

Tabela 1: Dados para o exemplo numérico multidimensional.

DMU	Input 1	Input 2	Output
<i>A</i>	1	1	1
<i>B</i>	11	1	11
<i>C</i>	1	11	11
<i>D</i>	5	5	8

Tabela 2: Resultados da DMU *D* para os dados da Tabela 1.

	<i>Ef</i> _{Input 1}	<i>Ef</i> _{Input 2}	<i>Ef</i> _{Output}	<i>Ef</i> _{input radial}
Eficiência	0,80	0,80	0,89	0,90
λ_A	0,30	0,30	0,20	0,30
λ_B	0,30	0,40	0,40	0,35
λ_C	0,40	0,30	0,40	0,35

Minimizar h_o

sujeito a

$$h_o x_1 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j1}$$

$$x_2 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j2}$$

...

$$y_1 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j1}$$

$$y_2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j2}$$

....

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

(XI)

Maximizar h_o

sujeito a

$$x_1 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j1}$$

$$x_2 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j2}$$

...

$$h_o y_1 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j1}$$

$$y_2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j2}$$

....

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

(XII)

Para a DMU D o vetor eficiência é dado por $(-0,80, -0,80, 0,89)$ (Tabela 2). Observa-se que tanto as eficiências radiais quanto as componentes do vetor eficiência são relativas a alvos da mesma face. Portanto, para esta DMU, os valores obtidos por qualquer eficiência direcional são valores exatos já que os majorantes são iguais aos minorantes.

Dentre as várias direções possíveis, pode-se calcular eficiência na direção do próprio vetor eficiência. Para este caso, é possível obter uma forma geral do majorante, que é dada pela expressão (XIII).

$$ef_{\vec{e}} \leq \frac{\vec{ef} \cdot \vec{ef}}{\|\vec{ef}\| \cdot \sum_i \cos \alpha_i} = \frac{\|\vec{ef}\| \cdot \|\vec{ef}\|}{\|\vec{ef}\| \sum_i \cos \alpha_i} \cdot \cos \theta = \frac{\|\vec{ef}\|}{\sum_i \cos \alpha_i} = \frac{\vec{ef} \cdot \vec{ef}}{\sum_n ef_o + \sum_r ef_i} \quad (XIII)$$

Para o exemplo das Tabelas 1 e 2, a desigualdade transforma-se em igualdade e, assim, tem-se que $ef_{\vec{e}} = \frac{\vec{ef} \cdot \vec{ef}}{\sum_n ef_o + \sum_r ef_i} = \frac{(0,8)^2 + (0,8)^2 + (0,89)^2}{0,8 + 0,8 + 0,89} \cong 0,83$.

3. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta uma nova abordagem para o cálculo de eficiências não radiais. O índice proposto não apresenta inconvenientes caso o alvo esteja situado na região de dominância. De fato, o sinal negativo nas eficiências orientadas a *input* impede o surgimento das eficiências negativas.

Por outro lado, o fator de correção impede que a eficiência seja maior que um. Este fator de correção poderia acarretar outro problema, qual seja o da divisão por zero. No entanto, mais uma vez, observa-se que tal fato não acontece na região de dominância.

A abordagem apresentada apenas leva ao cálculo de um índice em casos particulares. Em casos mais gerais, fornece limites inferiores e superiores da eficiência direcional. Estes limites são baseados na geometria do problema. São, portanto, mais consistentes que os índices tradicionais baseados em somas (sem sentido para o cálculo da eficiência, já que esta é baseada em distâncias euclidianas) ou em ponderações, que sempre exigem arbitrariedade de um decisor (situação contrária aos paradigmas de DEA). Os limites aqui apresentados podem servir como teste de consistência para os numerosos índices não radiais já existentes.

Finalmente, as dificuldades computacionais para o cálculo de alvos e de limites inferiores em modelos multidimensionais, poderão ser resolvidos com a formulação multiobjetivo de DEA (Angulo-Meza, 2002, Soares de Mello et al., 2003).

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Angulo-Meza, L. (2002). *Um Enfoque Multiobjetivo para determinação de Alvos na Análise Envoltória de Dados (DEA)*. Tese de Doutorado. Programa de Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ.
- Angulo-Meza, L., Biondi Neto, L., Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Coelho, P.H.G. (2003). SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão: Uma Implementação Computacional de Modelos de Análise Envoltória de Dados. *Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção*, v. 3, n. 20. Niterói: Universidade Federal Fluminense - Mestrado em Engenharia de Produção. [http://www.producao.uff.br/rpep/relpesq303/relpesq_303_20.doc]
- Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984). Some Models For Estimating Technical Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30 (9), 1078-1092.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, v. 2, p. 429-454.
- Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, v. 19, p. 273-292.
- Dulá, J.H. (2002). Computations in DEA. *Pesquisa Operacional*, v. 22, n. 2, p. 165-182.
- Farrell, M.J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Static Society*. Ser. A. 120, p. 253-281.
- Gonzales-Araya, M.C. (2002). *Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações*. Tese de Doutorado. Programa de Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ.

- Nussenzveig, H.M. (2002). *Curso de Física Básica – I Mecânica*. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo.
- Pastor, J.T. (1995). Improving the new DEA-efficiency measure of Tone. *Working paper*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Alicante.
- Soares de Mello, J.C.C.B. (2002). *Suavização da fronteira DEA com o uso de métodos variacionais*. Tese de Doutorado. Programa de Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ.
- Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E. G., Biondi Neto, L., Estellita Lins, M.P. (2004). Suavização da Fronteira DEA: O caso BCC tridimensional. *Investigação Operacional*, v. 24, n. 1 (no prelo).
- Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo-Meza, L., Gomes, E.G., Serapiao, B.P., Estellita-Lins, M.P. (2003). Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para Companhias Aéreas brasileiras. *Pesquisa Operacional*, v. 23, n. 2, p. 325-345.
- Soares De Mello, J.C.C.B., Estellita-Lins, M.P., Gomes, E.G. (2002). Construction of a Smoothed DEA Frontier. *Pesquisa Operacional*, v. 22, n. 2, p. 183-201.
- Tone, K. (2001). A slacks based measure of efficiency in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 130, p. 498-509.