

REDISTRIBUIÇÃO DE *INPUTS* E *OUTPUTS* EM MODELOS DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS COM GANHOS DE SOMA ZERO

Eliane Gonçalves Gomes *

Embrapa Monitoramento por Satélite
Campinas – SP
eliane@cnpm.embrapa.br

João Carlos C. B. Soares de Mello

Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Niterói – RJ
jcsmello@producao.uff.br

Marcos Pereira Estellita Lins

Programa de Engenharia de Produção
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Rio de Janeiro – RJ
lins@pep.ufrj.br

* *Corresponding author*/autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 08/2003; aceito em 04/2004 após 1 revisão

Received August 2003; accepted April 2004 after one revision

Resumo

Neste artigo apresenta-se uma extensão do modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) para os casos em que devido à redução de *outputs* (para que a soma seja constante) há a possibilidade ou a imposição de redução dos *inputs* utilizados. Nesses casos não há o deslocamento da fronteira como um todo, mas sim o deslocamento das DMUs pela fronteira eficiente (ou pelas camadas de iso-eficiência), o que provoca a deformação da fronteira. São apresentados os casos bidimensional e multidimensional. Para este, devido à complexidade dos algoritmos de determinação de faces do poliedro envolvente (fronteira DEA), é proposto o uso do modelo de suavização da fronteira que substitui a fronteira clássica linear por partes por uma única equação polinomial.

Palavras-chave: DEA; ganhos de soma zero; deslocamento pela fronteira; fronteira suavizada.

Abstract

This paper presents an extension to the Zero Sum Gains DEA model (ZSG-DEA) useful for the cases in which the output reduction (sum of the output is constant) obliges reductions in the inputs values. Instead of displacing the frontier, the DMUs move themselves along the efficient frontier (or iso-efficiency layers). The bidimensional and multidimensional cases are illustrated. For the latter case, due to the complexity of the algorithms that compute all the faces of the efficient frontier, we propose the use of the smoothed DEA frontier model.

Keywords: DEA; zero sum gains; movement along the efficient frontier; smoothed frontier.

1. Introdução

O objetivo da Análise Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) é avaliar a eficiência de unidades produtivas que realizam tarefas similares, chamadas de unidades de tomada de decisão (*Decision Making Units* – DMUs). Essas unidades são comparadas e distinguem-se pelas quantidades de recursos (*inputs*) que consomem e de bens (*outputs*) que produzem (Cooper *et al.*, 2000; Estellita-Lins & Angulo-Meza, 2000).

Além de identificar as DMUs eficientes, os modelos DEA permitem medir e localizar a ineficiência, e estimar uma função de produção linear por partes que fornece o *benchmark* para as DMUs ineficientes. Esse *benchmark* é determinado pela projeção das DMUs ineficientes na fronteira de eficiência. A forma como é feita esta projeção determina a orientação do modelo. As principais são orientação a *inputs* (quando deseja-se minimizar os recursos, mantendo-se os valores dos resultados constantes) e orientação a *outputs* (quando deseja-se maximizar os *outputs* sem diminuir os *inputs*).

Os modelos DEA clássicos, tanto o modelo CCR (Charnes *et al.*, 1978) quanto o modelo BCC (Banker *et al.*, 1984), além de todas as suas variantes, supõem total liberdade de produção, ou seja, a produção de uma DMU não interfere na produção das demais. Entretanto, em alguns casos essa liberdade não existe. No caso de competições, por exemplo, se for considerado como *output* o resultado final ou um índice que agrega seus resultados (Soares de Mello *et al.*, 2001; Gomes *et al.*, 2001b), a melhora de posição de qualquer competidor implica na perda de posição de um ou mais de seus adversários.

Um outro exemplo é o caso da avaliação de eficiência de unidades produtivas que produzem um determinado produto cuja demanda é constante. Neste caso, uma certa DMU considerada ineficiente deverá produzir mais unidades do produto para atingir a fronteira de eficiência, com a conseqüente diminuição da produção das demais unidades produtivas.

Em Estellita-Lins *et al.* (2003), Gomes *et al.* (2003), Gomes (2003), Gomes & Soares de Mello (2002) e Gomes *et al.* (2001a) são propostas alterações no modelo DEA BCC clássico que consideram essas limitações. Esse novo modelo, chamado de Modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ), apresenta uma situação semelhante à de um jogo com soma zero (Osborne & Rubinstein, 1999), no qual tudo o que é ganho por um jogador é perdido por outro(s). Ou seja, a soma líquida dos ganhos deve ser zero. Deve-se observar que o termo “jogo de soma zero” é usado aqui no sentido mais amplo possível, como em Osborne & Rubinstein (1999), Tavares *et al.* (1996) e Williams (1986). Estes autores mostram que qualquer jogo de soma constante tem as mesmas propriedades matemáticas de um jogo de soma zero, e como tal pode ser tratado. É suficiente para tal a subtração ao ganho de cada jogador da metade da soma total dos ganhos do jogo (no caso de jogos de 2 jogadores). A situação aqui examinada é inteiramente análoga, já que a soma efetiva dos *outputs* é diferente de zero, mas a soma das variações em relação ao valor original apresenta valor nulo. Nos trabalhos já publicados considera-se a imposição da restrição de soma constante dos *outputs* (ou *inputs*), o que implica no deslocamento da fronteira de eficiência. Isso ocorre porque foi considerada a impossibilidade de redução de *inputs* para adequação à redução de *outputs* (por exemplo, é totalmente sem sentido um país reduzir a sua população para adequar-se à quantidade de medalhas olímpicas obtidas). Dessa forma, quando uma DMU ineficiente busca a fronteira eficiente, as outras DMUs devem ter os valores de seus *outputs* reduzidos, sem que os seus *inputs* sejam alterados. Ora, esta situação ocorre para todas as DMUs que não caminharam para a fronteira, em particular para as eficientes, visto que já encontram-se na fronteira. Portanto, toda a fronteira será deslocada para uma posição que corresponda a um menor valor de *output*.

Entretanto, há casos em que a redução de *outputs* pode corresponder uma redução dos *inputs* utilizados. Neste caso, em vez de a fronteira eficiente ser deslocada, as DMUs eficientes deslocam-se ao longo da fronteira, até atingir o ponto correspondente ao seu novo nível de *output*. Como é evidente, o deslocamento das DMUs provoca uma alteração na fronteira. Neste tipo de alteração não há a movimentação da fronteira em apenas uma direção. Assim, esta alteração será designada por “deformação da fronteira”, para distinguir dos casos apresentados em Estellita-Lins *et al.* (2003) e Gomes *et al.* (2003), que foram chamados de deslocamento da fronteira.

Este artigo propõe um modelo, sob a hipótese de DEA-GSZ, em que as DMUs eficientes devem deslocar-se pela fronteira e propõe ainda como fazer o deslocamento das DMUs ineficientes. São abordados os casos bidimensional e multidimensional.

2. Modelos DEA com Ganhos de Soma Zero

2.1 Modelo Geral

A formulação clássica do modelo do envelope DEA BCC com orientação a *outputs* usa para cada DMU o Problema de Programação Linear (PPL) apresentado em (I). Neste PPL, para a DMU o em análise, a eficiência é dada por $1/h_o$; x_j representam os *inputs*; y_j são os *outputs*; λ_j representam a contribuição da DMU j para a projeção da DMU o na fronteira. Esta projeção na fronteira de eficiência é o alvo a determinar.

$$\begin{aligned}
 &\max h_o \\
 &\text{sujeito a} \\
 &\sum_j \lambda_j x_j \leq x_o \\
 &h_o y_o \leq \sum_j \lambda_j y_j \\
 &\sum_j \lambda_j = 1 \\
 &\lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{I}$$

Em modelos DEA-GSZ é necessária a informação adicional de como a DMU que pretende aumentar os *outputs*, reduzirá os das outras DMUs. A forma como ela tenta tirar os *outputs* das DMUs concorrentes é, segundo Estellita-Lins *et al.* (2003), Gomes *et al.* (2003) e Gomes (2003), a estratégia da DMU. Nas referências citadas mostram-se algumas possíveis estratégias que a DMU pode adotar. Neste artigo supõe-se que a DMU em busca da eficiência tenta retirar *output* das outras DMUs em valor proporcional ao *output* atual. Admite-se ainda como hipótese simplificadora que a DMU consegue atingir o seu objetivo, isto é, retira efetivamente *output* das demais em valor proporcional ao *output* atual. A esta forma de tentar retirar *output* das DMUs concorrentes, com a hipótese simplificadora de que consegue fazer da forma pretendida, chama-se estratégia de redução proporcional, segundo Estellita-Lins *et al.* (2003) e Gomes (2003).

Em (II) representa-se o modelo DEA-GSZ com estratégia de redução proporcional e sem alteração de *inputs* para nenhuma DMU. Nesta estratégia, quando a DMU o busca ganhar

z unidades de *output*, a redução do nível de *output* das outras DMUs é proporcional ao seu *output* original, ou seja, aquelas com menor nível de *output* perdem menos e aquelas com maior nível de *output* perdem mais. Evidentemente, mantém-se a condição de que a soma das perdas seja igual ao que será ganho pela DMU o .

$$\begin{aligned}
 & \max h_{Ro} \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \sum_j \lambda_j x_j \leq x_o \\
 & h_{Ro} y_o \leq \sum_j \lambda_j y_j \left(1 - \frac{y_o (h_{Ro} - 1)}{\sum_{j \neq o} y_j} \right) \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{II}$$

Em (II), a unidade em análise é igualmente a DMU o . h_{Ro} é o inverso da eficiência de DMU o no modelo DEA-GSZ; x_j e y_j são valores originais dos *inputs* e dos *outputs*, respectivamente; λ_j são as contribuições das DMUs na projeção eficiente. As variáveis de decisão são λ_j e h_{Ro} .

A Figura 1 representa, para o caso bidimensional, a nova fronteira gerada a partir desta estratégia. A fronteira superior representa a fronteira do modelo clássico; a inferior representa a nova fronteira considerando-se redução proporcional de *outputs* de todas as DMUs, excetuando-se a DMU o , que ganha a soma das perdas para tornar-se eficiente.

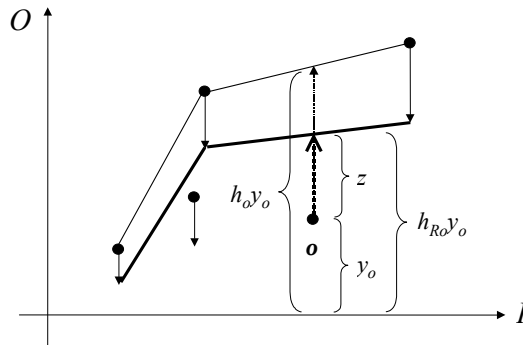


Figura 1 – Representação da estratégia de redução proporcional de *output* das DMUs j , $j \neq o$.

2.2 Determinação de Alvos

Como pode ser visto, no modelo DEA-GSZ, ao contrário do que acontece nos modelos DEA clássicos, o modo como uma DMU atinge seu alvo na fronteira provoca alteração na forma da fronteira eficiente. Essa alteração é função da estratégia adotada na determinação do alvo (igual redução, redução proporcional, entre outras).

A busca por eficiência pode ser feita por uma única DMU ou por várias DMUs em regime de cooperação. Neste caso, o modelo (II) transforma-se em um problema de Programação Não Linear Multiobjetivo, como apresentado em Gomes *et al.* (2003) e Gomes (2003).

Além da possibilidade de cooperação entre unidades ineficientes, os gestores podem argumentar que é um salto extremamente grande tentar atingir a eficiência de uma só vez, sendo mais factível uma busca gradativa de alvos. Uma forma de determinar estes alvos intermediários, apresentada em Gomes *et al.* (2003), Gomes & Soares de Mello (2002) e Gomes (2003), é buscá-los nas camadas de iso-eficiência, que representam diferentes níveis de utilização da tecnologia.

As camadas de iso-eficiência são obtidas da seguinte forma: as DMUs com 100% de eficiência formam a camada 1. Essas DMUs são, então, retiradas do conjunto de análise e calculam-se novamente as eficiências, com o mesmo modelo DEA. As DMUs eficientes neste subconjunto formam a camada 2. O processo repete-se até que todas as DMUs tenham sido retiradas do conjunto inicial (Barr *et al.*, 2000; Tavares, 1998).

A busca de alvos consecutivos em camadas de iso-eficiência é chamada de Busca Seqüencial de Alvos Intermediários (Gomes *et al.*, 2003). As camadas de iso-eficiência, além da sua utilidade gerencial, servem ainda como ferramenta na solução do problema de várias DMUs em busca simultânea de eficiência (Gomes, 2003).

O modelo DEA-GSZ para o caso de duas DMUs (A e B) que buscam eficiência em cooperação é apresentado em (III). Nesse Problema Bi-objetivo Não Linear, h_{Rj} é a eficiência da DMU j no modelo DEA-GSZ; x_j e y_j são, respectivamente, os *inputs* e os *outputs*; λ_j é a contribuição da DMU j na formação do alvo da DMU em análise; j^* é o conjunto de referência da DMU A ; j^{**} é o conjunto de referência da DMU B ; y_j' são os novos valores de *output*, função da estratégia de busca escolhida.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } h_{RA} \\
 & \text{Max } h_{RB} \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \sum_{j^*} \lambda_j x_j \leq x_A \\
 & \sum_{j^{**}} \lambda_j x_j \leq x_B \\
 & h_{RA} y_A \leq \sum_{j^*} \lambda_j y'_j \\
 & h_{RB} y_B \leq \sum_{j^{**}} \lambda_j y'_j \\
 & \sum_{j^*} \lambda_j = 1 \\
 & \sum_{j^{**}} \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{III}$$

Em Gomes *et al.* (2003) e Gomes (2003) prova-se que, em determinadas condições, o problema não linear multiobjetivo reduz-se a um problema não linear com uma única função objetivo. Isto ocorre, em particular, quando é usada a estratégia de redução proporcional.

2.3 Alterações na Fronteira de Eficiência

No modelo DEA-GSZ, ao contrário dos modelos clássicos, nos quais a solução pode ser dividida em duas etapas distintas, a saber, construção da fronteira (através da identificação das DMUs extremo-eficientes) e determinação dos alvos (com as diferentes possibilidades de projeção na fronteira), as etapas de construção da fronteira e determinação dos alvos estão interligadas.

As Figuras 2 e 3 mostram a alteração da fronteira para os casos em que uma única DMU busca eficiência e em que DMUs atuam em cooperação no modelo DEA-GSZ. Nestas figuras, a busca da eficiência é feita de forma seqüencial, isto é, em vez de buscar-se a projeção diretamente na fronteira eficiente, cada alvo é determinado na camada de iso-eficiência imediatamente superior. O processo é repetido até ser atingida a fronteira eficiente.

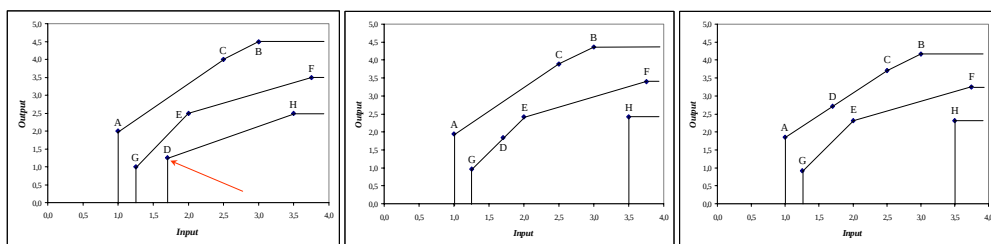


Figura 2 – Alteração da fronteira para uma única DMU que busca eficiência no modelo DEA-GSZ seqüencial.

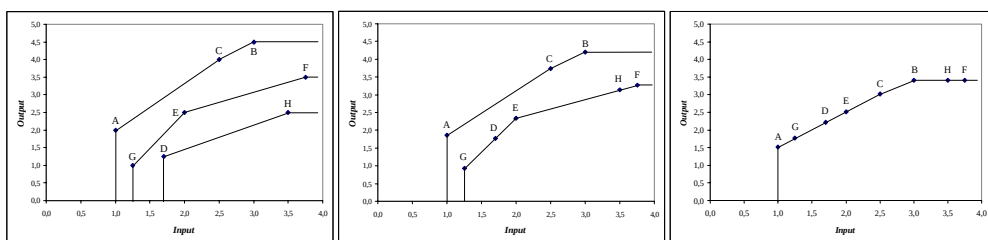


Figura 3 – Alteração da fronteira para DMUs atuando em cooperação na busca da fronteira eficiente no modelo DEA-GSZ seqüencial.

Nos casos até aqui tratados, verifica-se que o ajuste às novas condições impostas dá-se somente pela alteração no valor do *output*, com conseqüente deslocamento da fronteira eficiente. Entretanto, há casos em que, devido à redução de *outputs* (no valor necessário para que a soma permaneça constante), há a possibilidade ou a imposição de redução dos *inputs* utilizados.

Esse seria o exemplo da avaliação de eficiência de companhias aéreas operando em uma determinada rota, cuja elasticidade preço permita considerar a demanda como constante. Poder-se-ia considerar como *output* o número de passageiros e como *inputs* pessoal, assentos.Km oferecidos e combustível usado (Gomes *et al.*, 2001c; Soares de Mello *et al.*, 2003). Ao impor-se demanda constante, uma determinada DMU que tenha reduzido o número de passageiros transportados pelo fato de outra companhia ter aumentado esse número (por exemplo, pela redução das tarifas praticadas), poderá reduzir o número de vôos na rota, com a conseqüente redução dos *inputs* considerados. Nesse caso, não há o

deslocamento da fronteira, mas sim o deslocamento das DMUs pela fronteira eficiente ou pelas camadas de iso-eficiência (para as DMUs que perderam *output* e não eram eficientes).

Sob outras condições, DMUs em deslocamento pela fronteira são encontrados na literatura. Korhonen & Syrjänen (2001), por exemplo, apresentam uma proposta interativa, baseada em DEA e Programação Linear Multiobjetivo para o problema da alocação eficiente de recursos. Nessa abordagem, as DMUs deslocam-se pela fronteira mas não há a restrição de a soma dos *outputs* ou dos *inputs* ser constante.

A seguir desenvolvem-se os modelos DEA-GSZ em que as DMUs devem deslocar-se pela fronteira. São abordados os casos bidimensional e multidimensional.

3. DMUs Eficientes em Deslocamento pela Fronteira: Caso Bidimensional

Supõe-se o paradigma do DEA-GSZ, ou seja, a soma dos *outputs* deve ser constante e a busca é a seqüencial de alvos intermediários, isto é, a DMU o (ineficiente) busca eficiência de forma gradual nas camadas de iso-eficiência (Gomes *et al.*, 2003).

As demais DMUs j , $j \neq o$, deslocam-se pela fronteira até atingir um ponto com o valor de *output* determinado pelo modelo DEA-GSZ, e com *input* que, com este valor de *output*, a mantenha na fronteira. O valor do *input* é dado pela interseção das faces que contêm as DMUs (Gomes, 2003) com a reta horizontal que representa o valor do novo *output*.

A Figura 4 (a) e (b) representa um exemplo bidimensional hipotético. É representada a configuração espacial (8 DMUs e as camadas de iso-eficiência). A DMU o busca eficiência e as demais deslocam-se pela fronteira. Destaca-se que o procedimento é análogo para as buscas que não consideram alvos intermediários nas camadas de iso-eficiência.

A estratégia da DMU o na busca por eficiência é a estratégia proporcional de projeção na 2ª camada de iso-eficiência. A vantagem dessa estratégia é a possibilidade de aprender e gerar conhecimento sobre as práticas desse estágio de utilização da tecnologia (Gomes *et al.*, 2003; Gomes & Soares de Mello, 2002; Gomes, 2003). As DMUs B e E são referências para a DMU o nessa camada.

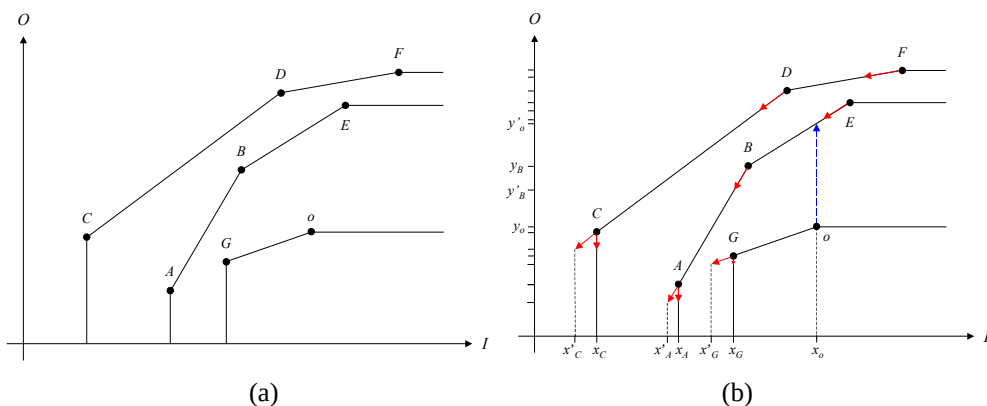


Figura 4 – (a) Configuração espacial e (b) representação do deslocamento de DMUs eficientes pela(s) fronteira(s).

O alvo da DMU o na 2ª camada é dado por y_o' , onde $y_o' = h_o^{2a} y_o$. Como o modelo utilizado é o DEA-GSZ, o ganho deve ser igual à soma das perdas, ou seja, $\text{ganho} = (h_o^{2a} - 1)y_o$.

Para a estratégia proporcional, a perda de *output* de cada DMU j , $j \neq o$ tem valor

$$\frac{y_j y_o (h_o^{2a} - 1)}{\sum_{j \neq o} y_j} \quad (\text{Estellita-Lins et al., 2003; Gomes, 2003; Gomes et al., 2001a}).$$

Com o valor da perda, é possível calcular o valor dos níveis de *output* para essas DMUs. O valor dos *inputs* é obtido através das equações das faces que contêm as DMUs. Ressalte-se que a obtenção dessas equações, para dimensões superiores, é um problema combinatório de alta complexidade (Fukuda, 1993).

Na Figura 4 (b) verifica-se que há duas possibilidades para o cálculo do nível de *input* após o deslocamento para as DMUs A e C , extremos da região não Pareto eficiente “inferior”. Ou o valor do *input* não se altera (I_{NA}) ou é calculado pelo prolongamento da face (I_{PF}) que contém esta DMU.

Ainda é possível facultar ao decisor escolher um valor para o *input* que esteja contido no intervalo $(I_{PF}, I_{NA}]$. A Figura 5 é um recorte ampliado para o caso da DMU C .

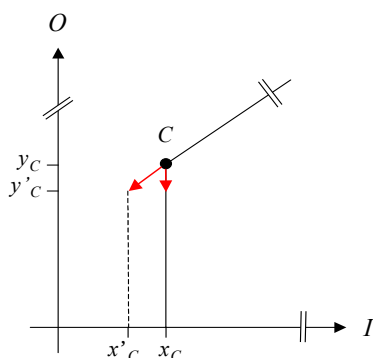


Figura 5 – Possibilidades do valor de *input* para DMUs limites da região Pareto ineficiente.

4. DMUs Eficientes em Deslocamento pela Fronteira: Caso Multidimensional

Os modelos DEA clássicos geram uma fronteira eficiente empírica, linear por partes, baseada nas melhores práticas observadas. Essa fronteira é constituída pelas DMUs eficientes e pelas faces por elas geradas, que criam uma envoltória sob o conjunto de DMUs ineficientes. González-Araya & Estellita-Lins (2002) e González-Araya (2003) afirmam que essa fronteira eficiente tem regiões com propriedades diferentes. Muitas faces não cumprem as condições de eficiência de Pareto-Koopmans e são denominadas regiões não Pareto-Koopmans eficientes ou fracamente eficientes (a projeção radial das DMUs ineficientes nessas regiões apresenta folgas diferentes de zero nos *inputs* e/ou nos *outputs*). Em oposição, as faces que cumprem essas condições de eficiência são denominadas regiões Pareto-Koopmans eficientes ou fortemente eficientes.

A determinação das DMUs eficientes, em especial extremo-eficientes, como forma de acelerar os algoritmos de solução dos modelos DEA, tem sido objeto de estudo de diversos autores (Ali, 1993, 1994; Dulá & Thrall, 2001; Dulá, 2002).

A especificação de todas as faces do poliedro envolvente também tem recebido atenção (González-Araya, 2003; González-Araya & Estellita-Lins, 2002). No caso bidimensional, a determinação de todas as faces, na verdade, segmentos de reta, é relativamente simples e pode ser feita com o uso de geometria analítica elementar. Para os casos de dimensões superiores, como já destacado, a obtenção dessas equações, agora planos ou hiperplanos, é um problema combinatório de alta complexidade, já que devem ser testadas todas as combinações possíveis de formação de hiperplanos a partir das DMUs eficientes.

Na literatura são encontrados diferentes algoritmos que permitem encontrar todas as faces eficientes em um poliedro (Ecker *et al.*, 1980; Armand, 1993; Fukuda, 1993; Barber *et al.*, 1996). Entretanto, esses algoritmos têm a limitação de na determinação da fronteira estimada por DEA ou não serem facilmente implementados, ou não serem factíveis de implementação, ou ainda terem tempo de execução extremamente elevado.

Em DEA, Pille & Paradi (1997) desenvolveram um algoritmo (“Algoritmo Gerador de Faces”) que determina todas as faces eficientes presentes na fronteira estimada pelos modelos com rendimentos de escala variáveis. Esse algoritmo envolve uma série de modelos de programação linear que devem ser resolvidos seqüencialmente. Em González-Araya & Estellita-Lins (2002) e González-Araya (2003) é proposto um algoritmo de busca de todas as faces eficientes da fronteira DEA com maior dimensão.

Devido à complexidade dos algoritmos existentes na literatura e pela impossibilidade de obter-se um algoritmo eficiente para a determinação de todas as faces (Dulá, 2002), optou-se pelo uso do modelo de fronteira DEA suavizada. Este tipo de fronteira foi originalmente desenvolvido por Soares de Mello *et al.* (2002) para resolver o problema de múltiplas soluções ótimas na formulação dos multiplicadores. A técnica usada consiste em substituir a fronteira DEA clássica por outra que tenha propriedades semelhantes, mas que seja continuamente diferenciável. Entre as propriedades mantidas estão a atribuição de eficiência unitária às DMUs extremo-eficientes do modelo DEA original, convexidade e monotonicidade crescente dos *outputs* com os *inputs*.

O modelo de suavização original, desenvolvido para fronteiras bidimensionais, substituiu cada face linear por outra parabólica, o que obriga à determinação de todas as faces. Como já foi visto, esta determinação apresenta problemas de praticidade e, assim, um outro modelo foi proposto por Soares de Mello *et al.* (2004) e Soares de Mello (2002). Esse modelo mantém todas as características anteriores da fronteira suavizada mas, em vez de determinar uma equação para cada face, representa toda a fronteira suavizada por uma única equação polinomial.

Dessa forma, o uso da fronteira suavizada no lugar da fronteira original permite contornar o problema da complexidade de determinação das equações das faces, já que há uma única equação a ser determinada.

Para o caso de um *output* e dois *inputs*, o polinômio que substituirá a fronteira DEA original tem a forma apresentada em (IV), onde z representa o *output* e x e y os *inputs*. O polinômio deve possuir o menor grau possível que não cause inviabilidade da suavização. Logo, o grau do polinômio é função do número de DMUs extremo-eficientes.

$$z = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3 + kx^4 + lx^3y + mx^2y^2 + nxy^3 + oy^4 + \dots \quad (\text{IV})$$

O modelo (V) representa a formulação geral do modelo DEA BCC tridimensional suavizado, com garantia de convexidade (Soares de Mello *et al.*, 2004; Soares de Mello, 2002). Nesse modelo, z representa o aproximante polinomial que substituirá a fronteira DEA clássica; $y_{\min}$, $x_{\min}$, $y_{\max}$ e $x_{\max}$ representam o menor e o maior valor de cada *input*; $e, f, g, \dots$ são as variáveis de decisão (coeficientes do polinômio). Esta formulação, por aproximar toda a fronteira por um único polinômio, garante a existência de derivadas parciais em todo o domínio, uma vez que as parcelas de um polinômio são funções de classe C^1 (contínuas e com primeira derivada contínua) em $\Re^2$. Assim, além do aproximante garantir a suavidade de toda a fronteira, as restrições garantem que a fronteira será convexa (mesmo fora da região de calibração) e monotonamente crescente para os valores dos *inputs* menores ou iguais ao maior valor de cada um. Garante-se ainda, além das propriedades já enunciadas, que a fronteira suavizada está próxima da fronteira original, onde o conceito de proximidade refere-se a uma pseudo-métrica baseada em comprimento de arco. O estudo detalhado dessas propriedades é apresentado em Soares de Mello *et al.* (2002) e Soares de Mello (2002).

$$\begin{aligned} \text{Min } & \left\{ \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dy dx \right\} \\ \text{sujeito a } & z(x_{efi}, y_{efi}) = Z_{efi} \\ & \frac{\partial z}{\partial x}(x_{\max}, y_{\max}) \geq 0 \\ & \frac{\partial z}{\partial y}(x_{\max}, y_{\max}) \geq 0 \\ & e, f, g, h, i, \dots \leq 0 \end{aligned} \tag{V}$$

Assim, para o problema das DMUs que se deslocam na fronteira DEA para o caso multidimensional, após obtida a equação da fronteira suavizada, procede-se como no caso bidimensional, ou seja, determinam-se os novos valores de *inputs* calculando-se a interseção dos planos horizontais que representam os novos níveis de *output* com a fronteira suavizada. Os novos *outputs* são calculados segundo o modelo DEA-GSZ. Os passos dessa abordagem são mostrados através de um exemplo numérico.

4.1 Exemplo numérico

Na Tabela 1 são apresentados os dados para o exemplo numérico hipotético (caso multi-dimensional) e as eficiências segundo o modelo DEA BCC clássico.

Tabela 1 – Valores de *input* e *output* para o exemplo numérico tridimensional.

DMU	Input 1	Input 2	Output	Eficiência BCC clássica (%)
A	1,0	1,0	18,5	100,0
B	2,0	5,0	26,0	100,0
C	3,0	4,0	33,5	100,0
D	2,0	1,0	22,0	100,0
E	5,0	3,0	25,0	84,3
		Soma	125,0	

Rodando-se o modelo DEA BCC clássico, a DMU E é a unidade ineficiente que busca eficiência; as DMUs C e D são seus *benchmarks*. A eficiência de E é 84,3%, ou seja, $h_E = 1,1867$. O alvo y_E' que deveria ser atingido na fronteira clássica tem valor 29,71. Entretanto, sob o paradigma DEA-GSZ, as DMUs não devem caminhar nas faces produzidas pelo modelo clássico, mas sim na fronteira suavizada. Para tal, é necessário obter a equação dessa fronteira que substituirá o poliedro DEA BCC clássico.

Para a escolha do aproximante há uma relação entre o número de DMUs extremo-eficientes e o grau do polinômio (Soares de Mello *et al.*, 2004; Soares de Mello, 2002). Essa relação garante que o número de restrições de igualdade seja inferior ao número de variáveis de decisão (coeficientes do polinômio). As restrições de igualdade garantem que a fronteira suavizada contenha todas as DMUs extremo-eficientes. Como no exemplo há 3 DMUs extremo-eficientes (DMU B é eficiente mas não extremo-eficiente), o polinômio deve ser de grau 2 e é expresso pela equação (VI). O problema da suavização fica resolvido com o cálculo dos coeficientes desse polinômio.

$$z = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 \quad (\text{VI})$$

Deve-se obter a função objetivo (FO) do modelo suavizado, que envolve a integração dupla do quadrado das derivadas parciais do aproximante apresentado em (VI). Dessa forma, obtêm-se as equações (VII), (VIII) e (IX).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = b + dy + 2ex \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = b^2 + d^2 y^2 + 4e^2 x^2 + 2bdy + 4bex + 4dexy \quad (\text{VII})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = c + dx + 2fy \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = c^2 + d^2 x^2 + 4f^2 y^2 + 2cdx + 4cfy + 4dfxy \quad (\text{VIII})$$

$$\int_1^5 \int_1^5 (1 + b^2 + d^2 y^2 + 4e^2 x^2 + 2bdy + 4bex + 4dexy + c^2 + d^2 x^2 + 4f^2 y^2 + 2cdx + 4cfy + 4dfxy) dx dy \quad (\text{IX})$$

Ao integrar-se a expressão em (IX) e aplicarem-se os limites de integração, obtém-se a FO. Assim, o modelo de suavização é apresentado pelo problema de programação quadrática (X).

$$\text{Min } 4 \left[24(bd + 2cf) + 4(b^2 + c^2) + \frac{124}{3}(d^2 + 4f^2) \right] + 12[8(2be + cd) + 48(de + df)] + \frac{496}{3}(d^2 + 4e^2)$$

sujeito a

$$b + 5d + 10e \geq 0$$

$$c + 5d + 10f \geq 0$$

$$a + b + c + d + e + f = 18,5$$

$$a + 2b + 5c + 10d + 4e + 25f = 26 \quad (\text{X})$$

$$a + 3b + 4c + 12d + 9e + 16f = 33,5$$

$$a + 2b + c + 2d + 4e + f = 22$$

$$e \leq 0$$

$$f \leq 0$$

Como resultado do modelo de otimização (X), tem-se $a = 9,2964$, $b = 4,6910$, $c = 5,2513$, $d = 1,1005$, $e = -0,7639$ e $f = -1,0754$. Com os valores dos coeficientes obtém-se a equação da fronteira suavizada, apresentada em (XI) e é sob essa curva que as DMUs eficientes deslocar-se-ão em busca dos novos valores de *inputs* e *outputs* no modelo DEA-GSZ.

$$z = 9,2964 + 4,6910x + 5,2513y + 1,1005xy - 0,7639x^2 - 1,0754y^2 \tag{XI}$$

O alvo a ser buscado pela DMU E , y_E' , está na fronteira suavizada e tem valor de 36,24. O ganho tem valor $y_E' - y_E$, ou seja, $36,24 - 25 = 11,24$. No modelo DEA-GSZ, o ganho deve ser igual à soma das perdas (proporcionais ao nível de *output*) das demais DMUs. Assim, cada DMU j , $j \neq E$, perderá $\frac{y_j (y_E' - y_E)}{\sum_{j \neq E} y_j} = \frac{11,24 y_j}{100}$. A Tabela 2 apresenta os novos valores de *output* para as DMUs em questão.

Tabela 2 – Novos valores de *output* para as DMUs no modelo DEA-GSZ em fronteira suavizada.

DMU	Novo valor de <i>output</i>
A	16,42
B	23,08
C	29,73
D	19,53
E	36,24
Soma	125,00

A análise da Tabela 2 permite verificar que houve o deslocamento das DMUs pela fronteira de eficiência suavizada, já que todas, exceto a DMU E , tiveram seus valores de *output* reduzido, de modo a manter a soma constante (igual a 125,0).

Para a DMU E os valores dos *inputs* permanecem inalterados. Para as demais DMUs, os valores dos *inputs* são dados pela equação da fronteira suavizada. Entretanto, ao deslocar-se nessa fronteira, a DMU pode seguir qualquer direção, já que qualquer ponto na curva de nível resultante da interseção da fronteira suavizada com o plano de corte $z = z_N$ é solução do problema, onde z_N é o novo valor do *output*. Optou-se por escolher o deslocamento que dê o caminho mais curto até o plano $z = z_N$, considerando-se a distância Euclidiana. Esta opção garante que a DMU em questão deve promover alterações mínimas nos seus *inputs*. Assim, para cada DMU j , $j \neq E$, é resolvido o problema de otimização apresentado em (XII). Nesse problema, x_O , y_O e z_O são os valores originais dos *inputs* e do *output*, respectivamente, e x_N e y_N são os novos valores de *inputs*, ou seja, as variáveis de decisão. A Tabela 3 apresenta os resultados finais.

$$\begin{aligned} &\text{Min } (x_O - x_N)^2 + (y_O - y_N)^2 + (z_O - z_N)^2 \\ &\text{sujeito a} \\ &9,2964 + 4,6910x + 5,2513y + 1,1005xy - 0,7639x^2 - 1,0754y^2 = z_N \\ &x_N, y_N \geq 0 \end{aligned} \tag{XII}$$

Tabela 3 – Novos valores dos *inputs* para as DMUs no modelo DEA-GSZ em fronteira suavizada.

DMU	Input 1	Input 2
A	0,76	0,76
B	1,69	5,16
C	2,28	4,14
D	1,84	0,63
E	5,00	3,00

Comparando-se os valores iniciais dos *inputs* (Tabela 1) com os resultados finais (Tabela 3) no paradigma do modelo DEA-GSZ, constata-se que todas, exceto a DMU E, tiveram o valor do *input* alterado para adequarem-se à redução do *output*.

5. Conclusões

Um resultado importante dos modelos DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ) é o fato de os dois problemas tradicionais em DEA (determinação da fronteira e busca de alvos) ficarem estreitamente acoplados, ou seja, a simples busca por eficiência altera a forma da fronteira.

Além disso, a possibilidade de redução de *inputs* para as DMUs que tiveram redução no nível de *output*, provocando o deslocamento dessas DMUs ao longo da fronteira de eficiência (ou camadas de iso-eficiência), expande as aplicações do modelo DEA-GSZ e os resultados obtidos anteriormente, em que havia o deslocamento da fronteira.

O caso bidimensional, que provoca o deslocamento das DMUs por retas, é de implementação relativamente fácil para as DMUs que não estejam no início da região fracamente eficiente. Para estas, o problema do deslocamento ao longo da fronteira não tem solução única.

No caso multidimensional, além do problema das DMUs que marcam o início da região fracamente eficiente, existe um outro problema, qual seja, a necessidade de determinar a equação de todas as faces. Este é um problema de alta complexidade, para o qual não existe algoritmo eficiente. O uso de uma fronteira suavizada permitiu contornar estes dois problemas. De fato, a fronteira suavizada tem uma única face de equação polinomial, determinada por um problema de programação quadrática. E, pelo fato de a equação ser polinomial, não existem, neste tipo de fronteira, regiões fracamente eficientes. Portanto, para todas as DMUs é possível calcular de forma única o seu deslocamento. Desta argumentação conclui-se que o uso da fronteira suavizada tem dupla vantagem: simplifica os cálculos e permite solução única para todas as DMUs.

Uma alternativa à distância Euclidiana para encontrar o novo valor dos *inputs* no caso tridimensional é o emprego das métrica de Tchebycheff. Neste caso, o problema de programação quadrática é substituído por um problema MinMax, possível de ser linearizado.

Cabe ainda ressaltar que, de forma análoga, os modelos apresentados neste artigo podem ser usados em situações em que a soma dos *inputs* deve ser constante, como é o caso de funcionários estáveis em empresas públicas. Nessa situação, o modelo DEA-GSZ (orientado a *inputs*) é uma ferramenta útil nos problemas de (re)alocação de recursos.

Os desenvolvimentos futuros deverão contemplar a aplicação dos modelos aqui propostos a estudos de casos reais, em especial na modelagem de *outputs* indesejáveis (emissão de poluentes, por exemplo) (Gomes, 2003).

Agradecimentos

Ao CNPq pelo apoio financeiro e aos revisores pelas valiosas contribuições para melhoria deste artigo.

Referências Bibliográficas

- (1) Ali, A.I. (1993). Streamlined computation for data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **64**(1), 61-67.
- (2) Ali, A.I. (1994). Computational aspects of Data Envelopment Analysis. **In:** *DEA: Theory, Methodology and Applications* [edited by A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin and L.M. Seiford], Kluwer Academic Publishers, Boston.
- (3) Armand, P. (1993). Finding all Maximal Efficient Faces in Multiobjective Linear Programming. *Mathematical Programming*, **61**, 357-375.
- (4) Banker, R.D.; Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, **30**(9), 1078-1092.
- (5) Barber, C.B.; Dobkin, D.P. & Huhdanpaa, H. (1996). The Quickhull Algorithm for Convex Hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **22**(4), 469-483.
- (6) Barr, R.S.; Durchholz, M.L. & Seiford, L. (2000). Peeling the DEA onion: Layering and rank-ordering DMUs using tiered DEA. *Southern Methodist University Technical Report*, USA.
- (7) Charnes, A.; Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.
- (8) Cooper, W.W.; Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, USA.
- (9) Dulá, J.H. & Thrall, R.M. (2001). A computational framework for accelerating DEA. *Journal of Productivity Analysis*, **16**, 63-78.
- (10) Dulá, J.H. (2002). Computations in DEA. *Pesquisa Operacional*, **22**(2), 165-182.

- (11) Ecker, J.G.; Hegner, N.S. & Kouada, I.A. (1980). Generating all Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **30**, 353-381.
- (12) Estellita-Lins, M.P. & Angulo-Meza, L. (2000). *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- (13) Estellita-Lins, M.P.; Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Soares de Mello, A.J.R. (2003). Olympic ranking based on a Zero Sum Gains DEA model. *European Journal of Operational Research*, **148**(2), 312-322.
- (14) Fukuda, K. (1993). *cdd.c: C Implementation of the Double Description method for computing all vertices and extremal rays of a convex polyhedron given a system of linear inequalities*. Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland.
- (15) Gomes, E.G. & Soares de Mello, J.C.C.B. (2002). Determinação de Alvos em Modelos DEA com Ganhos de Soma Zero. *Anais do XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, Brasil.
- (16) Gomes, E.G. (2003). Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.
- (17) Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita-Lins, M.P. (2001a). Modelos DEA com soma de outputs constante. *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campos do Jordão, Brasil.
- (18) Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita-Lins, M.P. (2001b). Uso de Análise de Envoltória de Dados e Auxílio Multicritério à Decisão na análise de dados das Olimpíadas 2000. *Anais do XXI ENEGEP – Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, Salvador, Brasil.
- (19) Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita-Lins, M.P. (2003). Busca seqüencial de alvos intermediários em modelos DEA com soma de *outputs* constante. *Investigação Operacional*, **23**(2), 163-178.
- (20) Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Serapião, B.P.; Estellita-Lins, M.P. & Biondi, L.N. (2001c). Avaliação de Eficiência de Companhias Aéreas Brasileiras: Uma Abordagem por Análise de Envoltória de Dados. **In:** *Panorama Nacional da Pesquisa em Transportes 2001* [editado por J.R.A. Setti e O.F. Lima Júnior], **2**, 125-133
- (21) González-Araya, M.C. & Estellita-Lins, M.P. (2002). Un algoritmo para encontrar las facetas eficientes de mayor dimensión de la frontera DEA. *Anais do XI Congreso Latino Iberoamericano de Investigacion de Operaciones (CLAIO)*, Concepción, Chile.
- (22) González-Araya, M.C. (2003). Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA – Algoritmos e Aplicações. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- (23) Korhonen, P. & Syrjänen, M. (2001). Resource allocation based on efficiency analysis. *Working Paper W-293*, Helsinki School of Economics and Business Administration, 25p.

- (24) Osborne, M.J. & Rubinstein, A. (1999). *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Boston, USA.
- (25) Pille, P. & Paradi, J. (1997). Facets at the Frontier and Efficiency Measurement in DEA. *Fifth European Workshop on Efficiency and Productivity Analysis*, Copenhagen, Denmark, October.
- (26) Soares de Mello, J.C.C.B. (2002). Suavização da fronteira DEA com o uso de métodos variacionais. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.
- (27) Soares de Mello, J.C.C.B.; Angulo-Meza, L.; Gomes, E.G.; Serapião, B.P. & Estellita-Lins, M.P. (2003). Análise de Envoltória de dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. *Pesquisa Operacional*, **23**(2), 325-345.
- (28) Soares de Mello, J.C.C.B.; Estellita-Lins, M.P. & Gomes, E.G. (2002). Construction of a smoothed DEA frontier. *Pesquisa Operacional*, **22**(2), 183-201. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/pope/v22n2/a06v22n2.pdf>>.
- (29) Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Biondi, L.N. & Estellita-Lins, M.P. (2004). Suavização da fronteira DEA: o caso BCC tridimensional. *Investigação Operacional*, **24**(1), 89-107.
- (30) Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Estellita-Lins, M.P. & Soares de Mello, A.J.R. (2001). Uso da Pesquisa Operacional em esportes: o caso das Olimpíadas. *Boletim da SOBRAPO – Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional*, **19**, 5-6.
- (31) Tavares, G. (1998). Data envelopment analysis: the basic models and their main extensions. A model to analyse the modernisation of telecommunication services in OECD countries. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Portugal.
- (32) Tavares, L.V.; Oliveira, R.C.; Themido, I.H. & Correia, F.N. (1996). *Investigação Operacional*. Editora McGraw Hill de Portugal Ltda.
- (33) Williams, J.D. (1986). *The Complete Strategist: Being a Primer on the Theory of Games of Strategy*. Dover Publications Inc., New York.