

UMA FUNÇÃO PARA FORMA DE TRONCO E VOLUME DE *Pinus taeda* L.*
(A taper and volume model for loblolly pine)

Sergio Ahrens**
Donald Holbert***

RESUMO

Este trabalho descreve o desenvolvimento de uma função de forma para troncos de *Pinus taeda* L. e a transformação do modelo definido em uma função de volume. O método de Hohenadl para estimativa de volume foi utilizado na obtenção dos dados necessários em 188 árvores estabelecidas na Floresta Nacional de Irati, PR. Uma técnica exploratória de estatística multivariada, Análise de Componentes Principais, PCA, foi utilizada na simulação e desenvolvimento da função de forma. Sete raízes latentes e vetores característicos associados foram obtidos na solução da equação característica da matriz de somatório dos quadrados e produtos cruzados preparada com base nos dados. A primeira raiz latente justificou 99,72% da variabilidade de forma e concluiu-se que o vetor característico associado foi uma expressão da forma média de tronco. Uma função de forma foi desenvolvida e após a sua integração, obteve-se uma função de volume. Estimativas de volume total sem casca foram determinadas para o tronco de todas as 188 árvores-amostra utilizando-se os dois procedimentos: a função de volume derivada da função de forma e o método de Hohenadl. Resíduos volumétricos percentuais entre os dois procedimentos de volumetria foram obtidos. Considerando-se a dispersão consistente dos resíduos (-30,60 a 28,50%), a Análise de Componentes Principais foi considerada uma técnica extremamente útil para a investigação da forma do tronco.

ABSTRACT

This paper describes the development of a mathematical expression of tree stem form or taper, and the transformation of such a model into a volume function. Hohenadl's method for volume estimation was used in collecting diameter data in 188 loblolly pine stems established in the Irati National Forest, located in Southern Brazil. A multivariate exploratory technique, principal component analysis, PCA, was used in the taper model building process. That statistical technique required a solution for the eigenequation of the sum of squares and cross-products matrix prepared with the data. Seven latent roots (eigenvalues) and characteristic vectors (eigenvectors) were obtained. The first eigenvalue accounted for 99.72 percent of the stem form variability, and its associated eigenvector was assumed to be an expression of average stem form. A taper model was developed and after integration provided a volume function. Inside bark total volume estimates for all 188 sampled trees were obtained by using both procedures: the taper-derived volume function and Hohenadl's method. Residuals of the taper-derived volume function estimates over those of

* Baseado na tese apresentada pelo primeiro autor para a obtenção do grau de mestre por Oklahoma State University, Stillwater, OK, USA.

** Eng.º Florestal, M.Sc., Pesquisador da Unidade Regional de Pesquisa Florestal Centro-Sul (PNPF/EMBRAPA/IBDF).

*** Estatístico, M.Sc., Ph.D., Professor do Departamento de Estatística de Oklahoma State University, OK, 74074, USA.

Hohenadl's were computed. Percent residuals ranged from - 30.60 to 28.50 and were uniformly distributed over most of the data range. Principal component analysis was found to be an extremely useful technique for the investigation of stem form.

PALAVRAS-CHAVE: **Pinus taeda**; forma de tronco; funções de forma; volume; taper.

1. INTRODUÇÃO

1.1 O PROBLEMA DE PESQUISA

Embora o crescente interesse pelo uso da biomassa como uma medida para quantificação de material lenhoso, o volume de madeira certamente continuará sendo a mais importante alternativa de uso prático, quer para o responsável pelo manejo florestal, quer para as indústrias. Com raras exceções, é com base no volume que se desenvolvem o comércio de madeira, os inventários florestais e o abastecimento de indústrias.

O volume de madeira de um povoamento florestal é o somatório do volume de madeira de cada árvore incluída naquele povoamento. O volume de um tronco tem sido tradicionalmente definido como uma função da sua altura, diâmetro à altura do peito e forma, e pode ser estimado através de métodos alternativos: deslocamento de água (xilômetro), processos gráficos, o uso de fórmulas como as de Smalian, Huber ou Newton, ou por meio da integração de uma função de forma (taper function).

O objetivo deste estudo é descrever o desenvolvimento de uma expressão matemática da forma de tronco de **Pinus taeda** L. e a transformação do referido modelo em uma função de volume.

1.2 JUSTIFICATIVA

Para algumas atividades industriais como a produção de celulose, carvão vegetal ou chapas de madeira, o volume total de madeira por árvore ou por unidade de área é informação suficiente. Atualmente, entretanto, observa-se que indústrias florestais têm demonstrado interesse em desenvolver sua produção obedecendo a uma integração vertical de atividades. Assim, o resíduo da elaboração de um determinado produto, como lâminas ou madeira serrada, torna-se matéria-prima na estrutura de produção de celulose, chapas de madeira aglomerada ou chapas de fibra.

Esta integração de atividades, principalmente em se considerando o crescente custo da madeira bruta, justifica plenamente a definição de novos objetivos e métodos nos estudos envolvidos com a quantificação do volume de madeira. Torna-se necessário desta maneira, determinar estimativas de volume por árvore para qualquer limite de utilização, expresso em termos de altura (comprimento da tora) ou diâmetro.

Informações desta natureza, podem, certamente, ser produzidas com métodos tradicionais de cubagem de madeira. Entretanto, o uso dos volumes estimados estará sempre condicionado à maneira com que os dados de campo foram coletados para a análise.

Com a disponibilidade de equipamentos eletrônicos para o processamento de dados, o estudo de um outro enfoque ao assunto é permissível, ou seja: a direta investigação da forma de tronco. O perfil de um tronco e o conceito do seu

seccionamento associado a certos sólidos geométricos é ilustrado por HUSCH et al. (1972), (Fig. 1).

Uma função de forma é uma descrição matemática do perfil longitudinal de um tronco. Assumindo-se que a secção transversal seja circular em qualquer ponto ao longo do tronco, o seu volume pode ser obtido por integração daquela função. Assim, em termos geométricos, o tronco é tratado como um sólido de revolução. Uma vez definido um modelo matemático para forma, pode-se determinar o volume de madeira entre quaisquer pontos ao longo do tronco. Desta maneira, a natureza do algoritmo viabiliza a obtenção das estimativas de volume necessárias à multiplicidade de usos da madeira.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

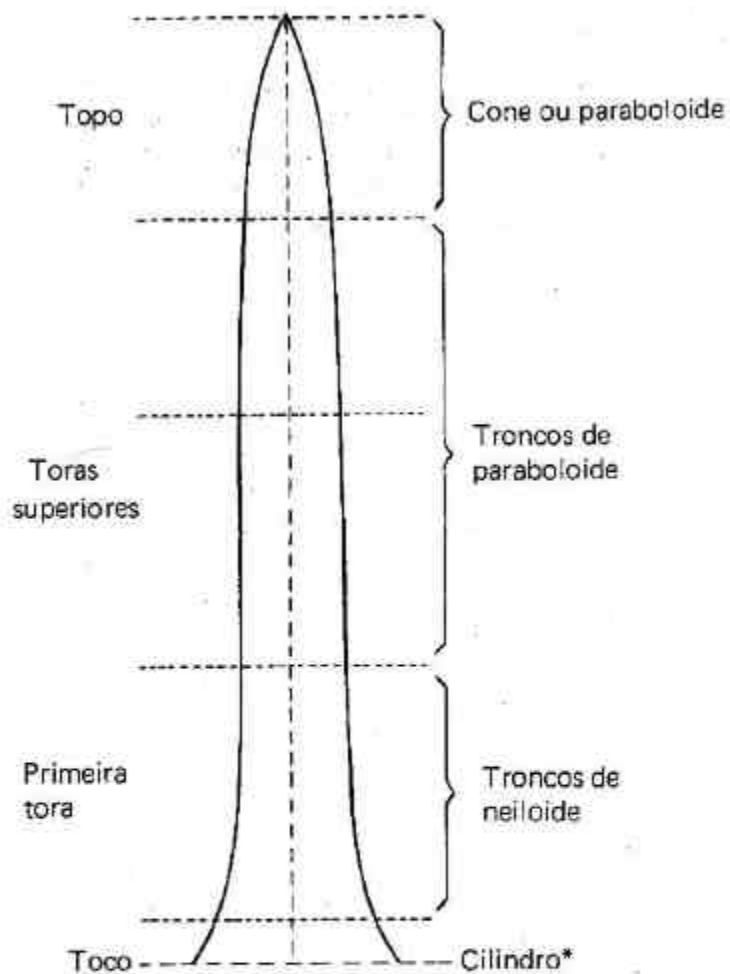
O desenvolvimento histórico das mais importantes contribuições ao estudo da forma de tronco foi classificado por AHRENS (1980), como segue:

2.1 MODELOS SUPERSIMPLIFICADOS

Trabalhando com **Picea excelsa** Link. na Suécia, HÖJER (1903) foi o primeiro investigador a sugerir um modelo para a determinação do diâmetro a qualquer altura do longo do tronco:

$$\frac{d_t}{d_{4,5}} = b_1 \log \frac{b_2 + t/h}{b_2}$$

onde d_t é o diâmetro estimado à distância t do topo de um tronco com altura h , $d_{4,5}$ é o diâmetro à altura do peito (medindo a 4,5 pés)



*O toco é normalmente tratado com um cilindro, mas tem a forma geométrica de um tronco de neiloide.

FONTE: Husch et al. 1972, p.121.

FIG. 1 Formas geométricas freqüentemente observadas em seções do tronco de árvores.
(Geometric forms frequently observed in portions of tree stems).

e, b_1 e b_2 são coeficientes de regressão¹ (citado por BEHRE 1923).

Johson (1910, 1911) verificou que o modelo de Höjer era adequado somente para povoamentos estabelecidos com semente local e sugeriu uma alteração no modelo original introduzindo uma "constante biológica" (citado por DEMAERSCHALK 1971 a).

¹ Neste estudo, atenção especial foi dada ao uso dos símbolos recomendados pela International Union of Forestry Research Organizations, IUFRO.

Seguindo a liderança e o pioneirismo dos investigadores europeus, BEHRE (1923, 1927, 1935) desenvolveu um modelo que tem a forma de uma hipérbola:

$$\frac{d_1}{d_{4,5}} = \frac{l/h}{b_1 + b_2 (l/h)}$$

De acordo com BRUCE & SCHUMACHER (1950) a função proposta por Behre produz resultados satisfatórios para muitas espécies florestais, mas freqüentemente não apresenta um bom ajuste quando diâmetros são estimados na base dos troncos (onde ocorre o "butt swell", abrupto e pronunciado aumento do diâmetro na base do tronco de árvores).

As principais dificuldades no uso prático das funções sugeridas por Höjer, Jonson e Behre foram sumarizadas por BRUCE et al. (1968). Os cálculos envolvidos são excessivos e os modelos não descrevem satisfatoriamente a forma da base e do topo do tronco de árvores.

Dentre os objetivos daqueles estudos pioneiros considerou-se, adicionalmente, o desenvolvimento de uma função de forma universal. Deve-se alertar, entretanto, sobre a complexa interação das fontes de variabilidade às quais está sujeita a forma do tronco de uma árvore. Entre as várias e possíveis causas para a variação de forma citam-se: diferentes espécies, práticas de manejo anteriores, idade, densidade do povoamento, índice de crescimento e posição da árvore na estrutura do povoamento.

No que se refere ao uso de funções supersimplificadas, é preciso ressaltar que apenas a inclusão de mais coeficientes, segundo um método empírico ou processo iterativo, não irá necessariamente melhorar sua habilidade descritiva. Isto pode inclusive introduzir uma tendência (bias) mais séria. Naquele estágio, a extensão natural dos estudos sobre forma de tronco foi obviamente direcionada para a inclusão de mais variáveis aos modelos.

2.2 O USO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Um expressivo número de estudos de forma utilizando análise de regressão polinomial foi observado na literatura. Isto reflete o que tem sido considerado por vários investigadores como sendo um razoável e adequado enfoque ao problema.

Para descrever a forma de tronco de **Pinus taeda** L., MATTE (1949) sugeriu o modelo:

$$\frac{d^2}{d_{4,5}^2} = b_0 \frac{h_d^2}{h^2} + b_1 \frac{h_d^3}{h^3} + b_2 \frac{h_d^4}{h^4}$$

onde d é o diâmetro estimado à altura h_d do solo, para uma árvore com altura total h e diâmetro à altura do peito $d_{4,5}$ medido a 4,5 pés do solo.

Segundo PRODAN (1965) uma função de forma adequada seria:

$$\frac{d}{d_{1,30}} = \frac{(h_d/h)^2}{b_0 + b_1 \frac{h_d}{h} + b_2 \frac{h_d^2}{h^2}}$$

Neste modelo, $d_{1,30}$ é o diâmetro à altura do peito medido a 1,30 m do solo e as demais variáveis têm o mesmo significado que na função anterior.

Outros importantes modelos polinomiais descritos por AHRENS (1980) são os de NEWNHAM (1958), OSUMI (1959), MUNRO (1966), MUNRO (1968), KOZAK et al. (1969), DEMAERSCHALK (1971a e 1971b), BENNET & SWINDEL (1972) e CAO (1978).

Dentre os modelos que usam técnicas de polinomiais segmentadas, cita-se os estudos de MAX & BURKHART (1976), DEMAERSCHALK & KOZAK (1977) e WAITE (1977).

Em todos os estudos, investigadores tentaram descrever a forma de tronco com diferentes modelos e variável grau de complexidade. Constatou-se que cada modelo apresentou tendências (bias) ou resultados indesejáveis quando a função foi utilizada para outra espécie ou fora de amplitude dos dados na qual o seu desenvolvimento foi baseado. Os resultados observados estão em conflito e não há evidências sobre qual deveria ser um modelo matemático para a expressão universal da forma de tronco.

2.3 ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

Análise de regressão polinomial é somente um caso especial da análise de regressão múltipla. Assim, a natureza multidimensional das fontes de variação para a forma de tronco foi também considerada nos estudos anteriores. Face às conclusões contraditórias entretanto, a investigação do problema com uma técnica mais flexível tornou-se necessária.

Análise estatística multivariada envolve a análise de dados coletados em várias dimensões para um mesmo indivíduo, ou seja, várias variáveis (MORRISON 1976).

Análise de componentes principais (PCA) é uma das técnicas sob a denominação geral de métodos de estatística multivariada. PCA é extremamente útil na redução das dimensões de um conjunto de dados, análise da estrutura de sistemas multidimensionais e para processos descritivos.

FRIES (1965) e FRIES & MATERN (1966) introduziram o uso da análise de componentes principais na investigação e desenvolvimento de funções e curvas de forma de tronco. Após uma análise daqueles estudos, KOZAK & SMITH (1966) sugeriram que o uso de funções simples e métodos gráficos é suficiente para o estudo de problemas em operações florestais e pesquisa.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1 ÁREA DE ESTUDOS E COLETA DE DADOS

Os dados necessários para este estudo foram obtidos em 188 troncos de **Pinus taeda** L., abatidos na Floresta Nacional de Irati, PR. Uma distribuição de freqüência dos dados com respeito a $d_{1,30}$ e altura é apresentado na Tabela 1. O volume de árvores tem uma associação próxima à linear com a altura; entretanto, é altamente relacionado com o quadrado de $d_{1,30}$. Assim, as amostras foram coletadas ao acaso dentro de cada classe de diâmetro, ao invés de terem sido distribuídas ao acaso por toda a população. A variação das árvores amostradas foi de 5 a 19 anos.

A metodologia de Hohenadl para medição de fustes e determinação de volumes (HOHENADL 1936) foi utilizada para a coleta das informações necessárias ao estudo. Essencialmente, os dados obtidos de cada fuste amostrado foram: $d_{1,30}$ (diâmetro à altura do peito, com casca), altura total e, iniciando-se pelo topo,

diâmetros sem casca a 1/10, 3/10, 5/10, 7/10, 8,333/10, 9/10 e 9,667/10 ao longo do comprimento do fuste abatido, considerando-se uma altura de toco de 15 cm.

Desta maneira, toda a variabilidade de forma foi condensada em uma matriz de dados 6 x 188: 7 diâmetros posicionais de 188 fustes. Os dados registrados em formulários de campo foram transferidos para cartões IBM e SAS/edição 1979 foi utilizado no processamento dos dados e análise estatística².

² Statistical Analysis System, SAS/edição 1979 é uma coleção de sub-rotinas para análise de dados preparada por SAS Institute Inc, Raleigh NC, USA.

TABELA 1 Distribuição de frequência dos dados
(Tree data frequency distribution)

Classe de diâmetro (cm) (Diameter class, cm)	Classe de altura (m) (Height class)											Total	
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24		26
6	7	1											8
8	5	4		2									11
10			1										10
12	2	3	5		1								11
14		4	4		2	1							11
16					4	3	2						10
18					2	4	5	1					11
20					2	1	5	1	1				10
22					1	2	6	5	3	1			10
24						1	2	5	7	1			10
26							2	2	9	2			10
28							1	1	5	2			10
30								3	3	1			11
32									5		1		11
34									3	8			11
36									1	6	2		11
38										7	4		11
40										5	4		11
										7	4		11
TOTAL	12	16	8	11	12	3	11	29	30	12	33	11	188
Classe de diâmetro 6 cm = 5,0 – 6,9 cm (Diameter class)	Classe de altura 4 m = 3,0 – 4,9 m (Height class)												

3.2 ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

O principal objetivo dos métodos de estatística multivariada é obter uma melhor compreensão da estrutura latente, ou não aparente, de um conjunto de dados representados pela distribuição associada e simultânea de várias variáveis (MARRIOT 1974).

Dentre as várias técnicas estatísticas sob a denominação geral de estatística multivariada (multidimensional), a Análise de Componentes Principais, PCA, é útil na ordenação de variáveis como um auxílio para a interpretação de dados que estejam distribuídos de uma forma multidimensional.

É conveniente enfatizar que PCA não é utilizada para teste de hipóteses. Trata-se somente de uma técnica exploratória para uma eficiente avaliação das dimensões de variabilidade. Isto é obtido por meio do desenvolvimento e análise de componentes ortogonais.

Suponha-se que um vetor com p variáveis seja medido em n observações, de modo que uma matriz de dados X seja obtida com dimensões $p \times n$.

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & x_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}$$

$i = 1 \dots n$
 $j = 1 \dots p$

O método de análise de componentes principais consiste na transformação de um conjunto de variáveis correlacionadas $X_1 \dots X_p$ em um novo conjunto de variáveis não correlacionadas ou componentes ortogonais $C_1 \dots C_p$, observando-se as seguintes propriedades básicas (MARRIOT 1974, ISEBRANDS & CROW 1975):

- a) cada nova variável C_k é uma combinação linear das variáveis originais X_j , $j = 1 \dots p$:

$$C_k = a_{k1}X_1 + a_{k2}X_2 + \dots + a_{kp}X_p$$

- b) a soma dos quadrados dos coeficientes é igual à unidade:

$$\sum_{j=1}^p a_{kj}^2 = 1, \text{ para cada } k = 1, \dots, p.$$

- c) as novas variáveis não são correlacionadas entre si.
 d) a variação total das novas variáveis é igual à variação total das variáveis originais.
 e) a variância de cada nova variável decresce em ordem, ou seja, de todas as possíveis combinações lineares, C_1 tem a maior variância. De todas as possíveis combinações lineares são correlacionadas com C_1 , aquela com a maior variância é C_2 , e assim por diante.

Com esta transformação linear e ortogonal, um novo conjunto com p variáveis é obtido, não correlacionadas entre si e organizadas em ordem de variância decrescente (MARRIOT 1974). O valor deste novo conjunto de variáveis, entretanto, está no fato de que um pequeno número de novas variáveis ou componentes principais poderá explicar a maior parte da variância total dos dados originais. Assim, o vetor de coeficientes, ou vetor característico, associado com estas novas variáveis, poderá ser considerado separadamente para explicar a estrutura multidimensional dos dados originais.

A solução para este procedimento algébrico é equivalente, em álgebra matricial, à determinação dos "eigenvalores" (raízes características ou raízes latentes) e "eigenvetores" associados (vetores característicos) da matriz $p \times p$ de dispersão (matriz de variância e covariância) desenvolvida com os dados originais. Cada eigenvalor é a variância do componente principal correspondente, enquanto que os elementos de cada eigenvetor são os coeficientes para a obtenção dos componentes principais.

3.3 CONSTRUÇÃO DO MODELO

A análise de componentes principais foi utilizada neste estudo, a fim de investigar e definir uma expressão matemática para a estrutura multidimensional de forma de fuste contida nos dados.

Considerando-se que no desenvolvimento de um sistema para volumetria uma função de forma é transformada, por integração, em uma função de volume, todos os cálculos envolvidos foram efetuados utilizando-se "raios sem casca" em lugar de diâmetros sem casca.

Tendo preparado os dados em uma tabela com sete raios posicionais (diâmetros), medidos ao longo de cada um dos 188 fustes, uma matriz simétrica 7 x 7 de somatório corrigido dos quadrados e produtos cruzados foi obtida utilizando-se PROC CORR (Statistical Analysis System, SAS/edição 1979):

$$\begin{array}{c}
 \text{D} = \\
 \text{(Matriz de Dados)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Raio n.}^{\circ} \\
 \begin{array}{cccc}
 R_1 & R_2 & \dots & R_7
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 188
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc}
 X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,7} \\
 X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,7} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 X_{188,1} & X_{188,2} & \dots & X_{188,7}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{P} = \\
 \text{(Matriz de SQ e PC)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 R_1 & R_2 & \dots & R_7
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 R_1 \\
 R_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 R_7
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc}
 SQ_1 & PC_{1,2} & & PC_{1,7} \\
 & SQ_2 & & \\
 & & \dots & \\
 & & & \dots \\
 & & & SQ_7
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

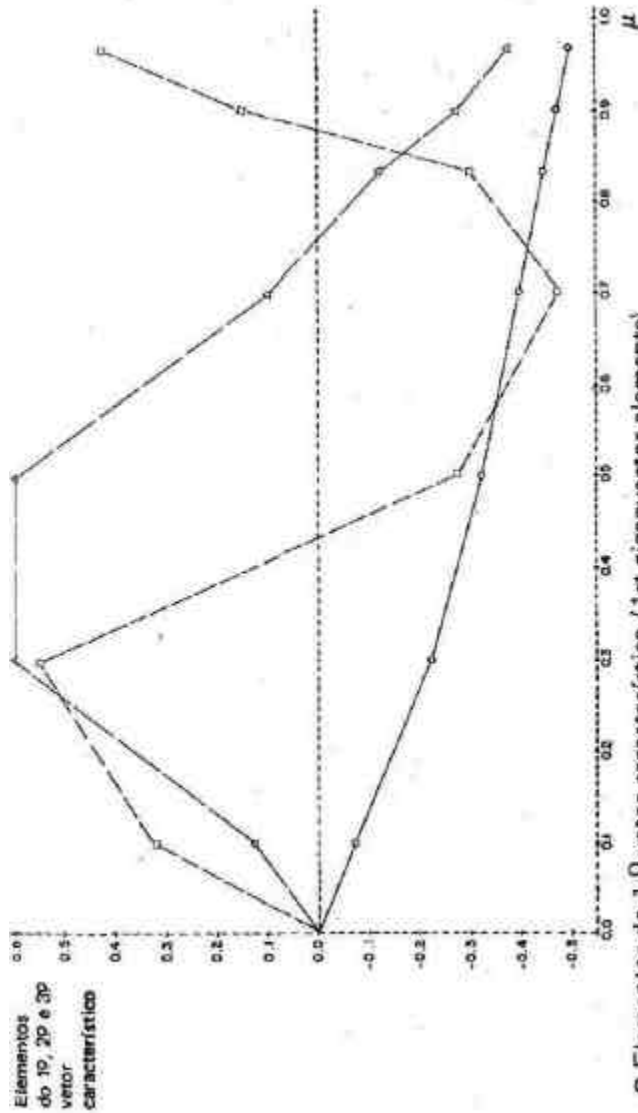
onde SQ_1 é o somatório corrigido dos quadrados para o raio R_1 , $PC_{1,2}$ é o somatório corrigido dos produtos cruzados dos raios R_1 e R_2 , e assim por diante.

A solução para a equação $|P - \lambda I| = 0$ foi obtida usando-se a subrotina PROC MATRIX e os comandos EIGEN, VALS e VECS. Desta forma, obteve-se uma matriz diagonal de raízes características em ordem decrescente e um conjunto associado de vetores característicos, cada vetor-coluna sendo relacionado com uma raiz correspondente.

Observou-se que a primeira raiz característica, isoladamente, explicou 99,72% da variância total. Esta foi considerada uma forte evidência de que a primeira raiz e o seu vetor associado foram extremamente úteis para expressar a estrutura latente do conjunto original de dados.

Seguindo a sugestão de estudos anteriores (FRIES & MATERN 1966 e LIU 1973) e para o propósito de interpretação, um gráfico foi produzido lançando-se os elementos dos vetores característicos associados com as três primeiras raízes (classificadas em ordem decrescente) contra a posição relativa " μ " ao longo do fuste de comprimento unitário (Fig. 2). Após observar a tendência destes três vetores,

concluiu-se que apenas a primeira raiz foi suficiente para explicar e descrever a forma média de fuste de todos os fustes considerados na análise.



- Elementos do 1.º vetor característico (1st eigenvector elements)
- △ Elementos do 2.º vetor característico (2nd eigenvector elements)
- Elementos do 3.º vetor característico (3rd eigenvector elements)

FIG. 2 Distribuição dos elementos dos vetores característicos associados às três primeiras raízes latentes em função da posição relativa ao longo do tronco.
(Plot of eigenvector elements of the three first eigenvalues against the relative position along the stem).

Técnicas de análise de regressão polinomial foram então utilizadas para ajustar um modelo aos dados representados pelos sete elementos (e) do primeiro vetor, com uma função da sua posição relativa (μ) ao longo do fuste de comprimento unitário (100%). PROC RSQUARE foi aplicado para obter todos os possíveis modelos com as seguintes variáveis independentes:

$$\mu^{1/4}, \mu^{1/3}, \mu^{1/2}, \mu, \mu^{3/2}, \mu^2, \mu^{5/2} \text{ e } \mu^3$$

Dentre todas as possíveis combinações destas variáveis, cinco modelos foram selecionados por causa do elevado coeficiente de múltipla determinação e PROC GLM foi aplicado em cada modelo: primeiro com a intersecção b_0 incluída na solução dos mínimos quadrados e posteriormente forçando o modelo a passar pela origem. Todos os dez modelos assim obtidos foram similares na sua habilidade em estimar os elementos do primeiro vetor característico, mas o seguinte modelo foi selecionado:

$$\hat{e} = F(\mu) = b_0 + b_1 \mu^{1/4} + b_2 \mu^{1/3} + b_3 \mu^{1/2} + b_4 \mu \quad (\text{Eq. 3.1})$$

Entretanto, considerando a natureza dos cálculos envolvidos no procedimento, aquele modelo (equação 3.1) poderia estimar somente "raios relativos" de um tronco de comprimento unitário. A fim de que fosse possível estimar raios (diâmetros) como uma função do comprimento real de um tronco, uma transformação nas variáveis independentes foi introduzida, e a equação passou a ter a seguinte forma:

$$\hat{r}(l) = F\left(\frac{l}{L}\right) = b_0 + b_1 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/4} + b_2 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/3} + b_3 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} + b_4 \left(\frac{l}{L}\right) \quad (\text{Eq. 3.2})$$

Esta é a função de forma para estimar o valor de um raio $\hat{r}(l)$ (diâmetro) na posição absoluta l a partir do topo de um tronco com forma média e comprimento total L acima de uma altura de toco de 15 cm.

Este estudo, entretanto, objetivou a desenvolvimento de uma função de forma para a estimativa dos raios sem casca (diâmetros) ao longo do fuste de qualquer árvore considerada na análise e não somente daquelas com fuste de forma média. Assim, suponha-se uma árvore com raio $r_{1,30}$ medido a 1,30 m do solo e com um tronco de comprimento L acima da altura de toco. O modelo anterior (equação 3.2) necessitou um ajustamento para forma que obrigasse a função a passar através do ponto do diâmetro à altura do peito. Este fator foi a razão entre o raio $r_{1,30}$ observado (medido) e a estimativa do mesmo raio $\hat{r}(l_{1,30})$. A função de forma finalmente assim desenvolvida foi:

$$\hat{r}(l) = F(l) = \frac{r_{1,30}}{\hat{r}(l_{1,30})} \cdot F\left(\frac{l}{L}\right) \quad (\text{Eq. 3.3})$$

onde:

$\hat{r}(l)$ = raio sem casca, estimado para uma posição absoluta l , a partir do topo, em metros.

$$r_{1,30} = \frac{d_{1,30}}{2} \quad (\text{sem casca, em metros})$$

$$l_{1,30} = L - 1,15 \text{ m}$$

$$\hat{r}(l_{1,30}) = b_0 + b_1 l_{1,30}^{1/4} + b_2 l_{1,30}^{1/3} + b_3 l_{1,30}^{1/2} + b_4 l_{1,30}$$

$$F\left(\frac{l}{L}\right) = \text{equação 3.2}$$

3.4 DETERMINAÇÃO DO VOLUME

O volume total, sem casca, para cada fuste, foi estimado procedendo-se à integração da equação 3.3 como segue:

$$\hat{V} = \int_0^L \pi (r(t))^2 dt$$

$$\hat{V} = \int_0^L \pi \cdot \left[\frac{r_{1,30}}{\hat{r}(t_{1,30})} \cdot F(t/L) \right]^2 dt$$

$$\hat{V} = \pi \cdot \left[\frac{r_{1,30}}{\hat{r}(t_{1,30})} \right]^2 \cdot \int_0^L \left[F(t/L) \right]^2 dt$$

(Eq. 3.4)

A fim de se obter uma medida da habilidade com que os volumes são determinados pela equação 3.4, o volume total sem casca para todos os 188 fustes amostrados foi estimado utilizando-se a função de volume derivada por integração da função de forma e, paralelamente, pelo método de Hohenadl. Análise de correlação linear simples, PROC CORR, foi aplicada para observar o grau de associação entre as duas estimativas. Os resíduos dos volumes obtidos pelos dois métodos foram também obtidos e analisados.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 ANÁLISE DOS VALORES E VETORES CARACTERÍSTICOS

A solução obtida para a Análise de Componentes Principais, PCA, sugeriu a interpretação das raízes latentes e dos vetores característicos a elas associados.

Considerando-se que os dados originais para o estudo consistiram de valores diamétricos observados ao longo de troncos de **Pinus taeda** L., a estrutura latente daquela matriz de dados é a da forma de tronco da população amostrada. PCA assume que as variáveis observadas podem ser expressas com um menor número de variáveis transformadas em fatores latentes, ou seja, os Componentes Principais (MORRISON 1976). Neste estudo houve sete variáveis observadas, as medições originais para os sete raios (diâmetros) em cada tronco. Desta forma, sete componentes ortogonais foram obtidos, dos quais apenas um ou muito poucos são de real interesse, os Componentes Principais. A importância e utilidade de um componente principal pode ser avaliada pela proporção da variabilidade total a ele atribuível.

As raízes características ou variâncias dos sete componentes ortogonais relacionados com a forma de tronco média são apresentadas na Tabela 2. Os vetores característicos associados estão contidos na Tabela 3. Como consequência da propriedade de ortogonalidade, cada raiz latente pode ser considerada em

separado. Observando-se a porcentagem cumulativa da variância explicada com a primeira raiz latente, 99,72%, a variância adicional explicada por todas as demais raízes foi negligível. Isto equivale dizer que a primeira raiz característica foi suficiente para explicar a forma de tronco contida nos dados. Aquela avaliação envolveu, entretanto, alguma subjetividade e evidência mais sólidas foram obtidas com a análise do gráfico produzido com os elementos dos vetores associados com as três primeiras raízes características (Fig. 2). Observou-se que a tendência dos elementos associados à primeira raiz característica está muito próxima ao perfil geométrico de um tronco, enquanto que a tendência dos elementos associados à segunda e terceira raízes não tem nenhum significado aparente.

TABELA 2 Raízes características da matriz de somatório dos quadrados e produtos cruzados.
(Eigenvalues of the sum of squares and cross-products matrix).

Número ordinal do vetor característico (Eigenvector number)	Raiz característica (Eigenvalue)	Porcentagem da variância explicada (Eigenvalue percent)	Porcentagem cumulativa da variância explicada (Cumulative eigenvalue percent)
1	10,0236	99,72	99,72
2	0,0167	0,17	99,89
3	0,0041	0,04	99,93
4	0,0024	0,02	99,95
5	0,0019	0,02	99,97
6	0,0015	0,02	99,99
7	0,0012	0,01	100,00
TOTAL	10,0514	100,00	

4.2 CONSTRUÇÃO DO MODELO

Considerando que a primeira raiz característica explicou uma alta proporção da variabilidade de forma, os elementos do vetor característico associado foram analisados como se estivessem na mesma proporção que os raios (diâmetros) de um tronco com forma média. Análise de regressão múltipla foi utilizada para ajustar uma função polinomial aos elementos do primeiro vetor característico (Fig. 4). Dentre os modelos testados a seguinte função foi considerada adequada para a estimativa de raios relativos:

TABELA 3 Vetores característicos associados às raízes características da matriz de somatório dos quadrados e produtos cruzados.
(Eigenvectors associated with the eigenvalues of the sum of squares and cross-products matrix).

Elemento (Element)	Vetor característico (Eigenvector number)						
	1	2	3	4	5	6	7
1	-0,073747	0,127024	0,313448	0,296600	0,405945	-0,790901	0,043459
2	-0,213371	0,611514	0,555317	-0,426365	0,155088	0,257049	-0,015540
3	-0,330984	0,599204	-0,282757	0,531880	-0,376848	0,029875	0,160156
4	-0,409884	0,102944	-0,465203	-0,378004	0,05499	-0,277370	-0,618217
5	-0,447714	-0,131427	-0,312069	-0,276361	0,329024	0,001063	0,797290
6	-0,464723	-0,273530	0,150432	0,468774	0,430824	0,439653	-0,296533
7	-0,505038	-0,384944	0,420703	-0,091333	-0,610169	-0,193077	0,042851

$$\hat{e} = b_0 + b_1\mu^{1/4} + b_2\mu^{1/3} + b_3\mu^{1/2} + b_4\mu \quad (\text{Eq. 4.1})$$

onde:

\hat{e} = valor estimado para os elementos (coeficientes) do vetor característico associado à primeira raiz latente, ou raio relativo de um tronco hipotético de comprimento unitário e forma média.

μ = posição relativa ao longo de um tronco de comprimento unitário (0,10, 0,30, . . . , 0,967).

$$b_0 = 4,3106887 \text{ E-06}$$

$$b_1 = 3,10149948$$

$$b_2 = -6,65976505$$

$$b_3 = 4,68992834$$

$$b_4 = -0,62829584$$

O coeficiente de múltipla determinação (R^2) para o modelo selecionado foi igual a 0,9987. Avaliou-se a habilidade do modelo para estimar raios relativos e obteve-se um bom ajuste ao longo de todo o fuste hipotético de comprimento unitário, incluindo a base, região em que a maioria dos estudos anteriores sobre forma de tronco apresentaram estimativas tendenciosas.

O objetivo deste estudo foi, entretanto, a definição de um modelo para a estimativa de diâmetros sem casca (raios) para troncos de comprimento real variável e com forma divergente daquela forma média de tronco (dentro da amplitude de dados considerados na análise). Assim, duas transformações foram acrescentadas à equação 4.1:

- as variáveis independentes foram expressas como uma razão entre a posição absoluta (l) do diâmetro sendo estimado e o comprimento total do tronco (L); e
- um ajustamento para forma foi incluído multiplicando-se o raio estimado para uma árvore com forma média, pela razão entre o raio observado (medido) e o raio estimado para uma determinada árvore (Eq. 3.3).

A equação finalmente obtida (Eq. 3.4) é basicamente uma função de forma para a estimativa do raio sem casca (r_l) em uma posição l a partir do topo de troncos com comprimento $L = h - 0,15$ m. Obviamente isto é verdadeiro somente para a espécie, sítio e amplitude de DAP e altura considerados neste estudo.

4.3 ESTIMATIVA DE VOLUME

Estimativas de volume total foram obtidas para todas as 188 árvores-amostra utilizando-se a função de volume desenvolvida com a integração da função de forma, bem como através do método de Hohenadl³. Análise de correlação foi executada, a fim de verificar a magnitude da consistência com que ambos procedimentos estimaram volume. O coeficiente de correlação linear de Pearson observado foi igual a 0,9927, o que reflete um elevado grau de associação linear entre as duas variáveis consideradas. Entretanto, isto indica apenas que a distribuição de ambas as estimativas é consistente dentro da amplitude de dados. Poderia ocorrer que as estimativas de volume obtidas com os dois procedimentos divergissem com "bastante consistência" e o coeficiente de correlação linear seria ainda o mesmo.

A fim de auxiliar na interpretação da referida tendência de associação linear, um gráfico foi produzido com a distribuição das duas estimativas de volume em função do DAP das árvores-amostra (Fig. 3). A distribuição dos volumes estimados não apresentou evidências de que duas diferentes populações pudessem ser identificadas. Entretanto, aquela foi somente uma representação gráfica dos volumes estimados, e uma análise adicional dos resíduos foi considerada para a avaliação da utilidade do modelo de volumetria obtido a partir da função de forma.

Os resíduos foram expressos pela diferença entre as duas estimativas de volume para cada árvore, como uma porcentagem do volume estimado pelo método de Hohenadl. A distribuição dos resíduos percentuais assim obtidos, em função do DAP, é apresentada na Fig.4. Observa-se que para árvores pequenas, aquelas com DAP entre 6,0 e 12,0 cm, os volumes foram superestimados com o modelo de volumetria derivado da função de forma. Em uma análise global, entretanto, a dispersão observada dos resíduos percentuais foi entre - 30,60 e 28,50, limites considerados adequados aos objetivos deste estudo.

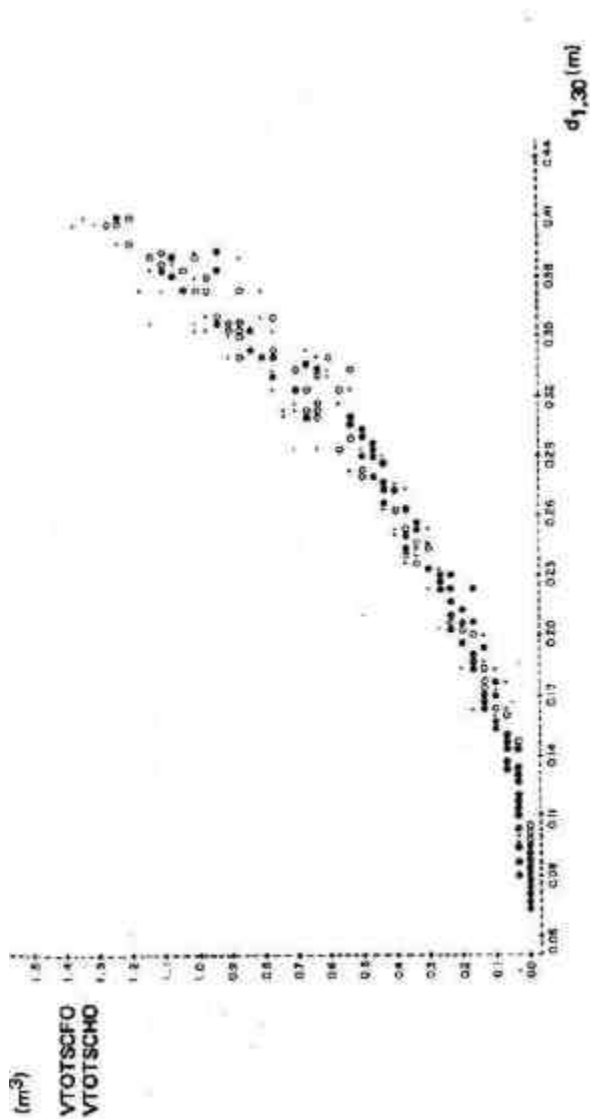
5. CONCLUSÕES

Em sua grande maioria, os estudos anteriores sobre forma de tronco basearam-se no uso de modelos matemáticos supesimplificados ou funções polinomiais. Vários pesquisadores tentaram definir uma expressão universal para forma de tronco, entretanto, resultados conflitantes foram apresentados.

Por outro lado, aqueles poucos estudos em que a Análise de Componentes Principais, PCA, foi utilizada, evidenciaram consistência em suas conclusões.

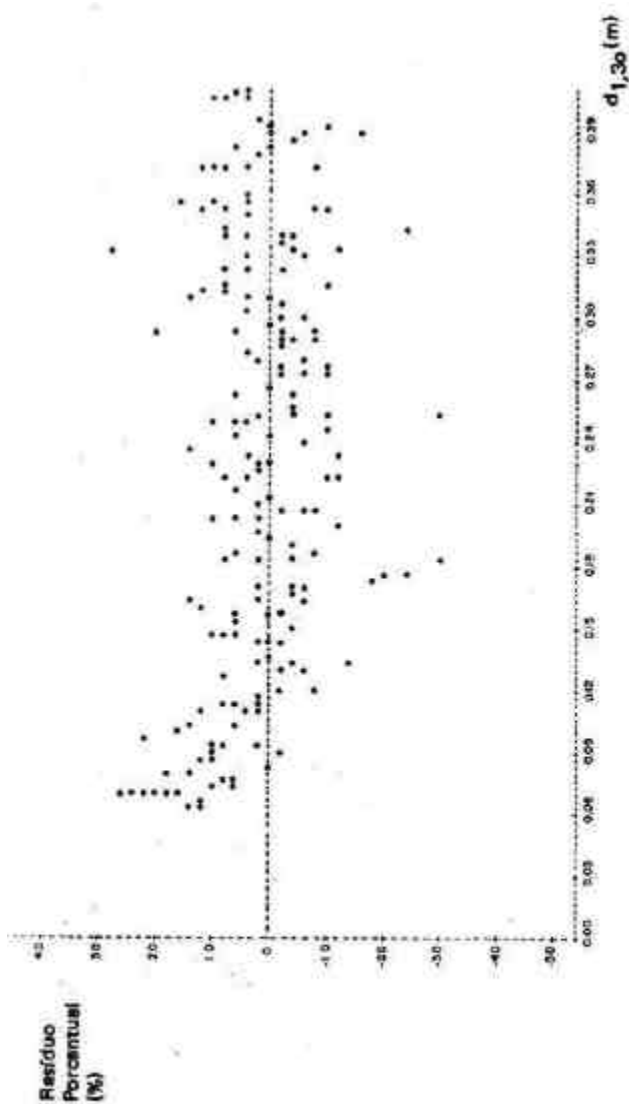
O objetivo deste estudo foi também alcançado com sucesso através do uso de PCA. Na solução matricial do problema, o vetor característico associado com a primeira raiz latente da matriz de dispersão dos dados, foi considerado uma conveniente expressão da forma média de troncos com comprimento unitário, tendo explicado 99,72% da variabilidade de forma dos dados. Após o ajuste de uma função polinomial, a função de forma desenvolvida foi:

³ Neste estudo, somente volumes totais sem casca foram calculados. Entretanto, a principal justificativa para o desenvolvimento de um sistema de forma e volume está na sua flexibilidade em estimar volumes para qualquer porção do tronco. Assim, estimativas de volume comercial de madeira entre quaisquer dos limites ao longo do tronco poderão ser obtidas pela integração da função de forma entre aqueles dois limites.



- VTOTSCFO: Volume total, sem casca, por integração da função de forma. (i.b. total volume estimate, with the taper-derived volume function).
- VTOTSCHO: Volume total, sem casca, obtido pelo método de Hohenadl. (i.b. total volume estimate, with Hohenadl's method).
- ◎ Estimativas de volume coincidentes graficamente (Coincident volume estimates).

FIG. 3 Distribuição das estimativas do volume total sem casca, obtidas pela função de volume derivada da função de forma e pelo método de Hohenadl, em função do diâmetro à altura do peito. (Plot of total volume inside bark estimates obtained with the taper-derived volume function and with Hohenadl's method, against DBH).



$$\text{Resíduo Percentual} = \frac{\text{VTOTSCFO} - \text{VTOTSCHO}}{\text{VTOTSCHO}} \cdot 100 (\%)$$

VTOTSCFO: Volume total, sem casca, por integração da função de forma.

VTOTSCHO: Volume total, sem casca, obtido pelo método de Hohenadi.

FIG. 4 Distribuição dos resíduos percentuais das estimativas de volume obtidas com a função de volume derivada da função de forma.
(Distribution of residuals of the volume estimates obtained with the taper-derived volume function).

$$F(l) = \frac{r_{1,30}}{F(l_{1,30})} \cdot F(l/L)$$

onde:

$F(l)$ = raio sem casca estimado a qualquer posição absoluta l a partir do topo (em metros).

$r_{1,30}$ = $d_{1,30}/2$ (sem casca, em metros).

$l_{1,30}$ = $L - 1,15$ m.

$\hat{r}(l_{1,30}) = b_0 + b_1 l_{1,30}^{1/4} + b_2 l_{1,30}^{1/3} + b_3 l_{1,30}^{1/2} + b_4 l_{1,30}$

$F(l/L) = b_0 + b_1 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/4} + b_2 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/3} + b_3 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} + b_4 \left(\frac{l}{L}\right)$

L = comprimento total do tronco acima de uma altura de topo de 15,0 cm (em metros).

Volumes totais sem casca foram estimados para todas as 188 árvores-amostra utilizando-se dois procedimentos: a função de volume obtida por integração da função de forma e o método de Hohenadl. A magnitude e consistência da dispersão dos resíduos entre as estimativas de volume obtidas pelos dois métodos foram consideradas adequadas aos propósitos do estudo.

A avaliação dos resultados permitiu concluir que a Análise de Componentes Principais demonstrou ser uma técnica eficiente para a investigação da forma de tronco. Adicionalmente, o seu potencial exploratório e descritivo deve ser utilizado sempre que a compreensão das dimensões da variabilidade de um conjunto de dados for desejável.

6. REFERÊNCIAS

- AHRENS, S. **A mathematical expression of stem form and volume for loblolly pine in southern Brazil.** Stillwater, Oklahoma State University, 1980. 59p. Tese Mestrado.
- ASSMAN, E. **The principles of forest yield study.** New York, Pergamon Press, 1970. 506p.
- ATTERBURY, T. **35-26-136: The Behre facts.** s.n.t. 17p. Trabalho apresentado no Meeting of Western Mensurationists, San Jose, CA, 1973.
- BEHRE, C.E. Preliminary notes on studies of tree form. **J.For.**, **21**:507-11, 1923.
- _____. Form-class taper curves and volume tables and their application. **J.Agric.Res.**, **25**(8) :673-743, 1927.
- _____. Factors involved in the application of form-class volume tables. **J.Agric.Res.**, **51** (8)-.669-713, 1935.

- BENNETT, F. A. & SWINDEL, B.F. **Taper curves for planted slash pine**. Asheville, NC, USDA Forest Service, 1972. 4p. (RN SE-179).
- BRUCE, D. Some transformations of the Behre equation of tree form. **For.Sci.**, **18**(2):164-6, 1972.
- ____ & CURTIS, R.O. & VANCOEVERING, C. Development of a system of taper and volume tables for red alder. **For.Sci.**, **14**(3):339-50, 1968.
- ____ & SCHUMACHER, F.X. **Forest mensuration**. New York, McGrawHill, 1950. 483p.
- CAO, Q. V. **Prediction of cubic-foot volume of loblolly pine to any top diameter limit and to any point on tree bole**. Blacksburg, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1978. 68p. Tese Mestrado.
- CAO, Q. V.; BURKHART, H.E. & MAX, T.A. Evaluation of two methods of cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. **For.Sci.**, **26**(1):71-80, 1980.
- DEMAERSCHALK, J. P. **An integrated system for the estimation of tree taper and volume**. Vancouver, University of British Columbia, 1971a. 57p. Tese Mestrado.
- ____. Taper equation can be converted to volume, equations and point sampling factors. **For.Chron.**, **47**(6):352-4, 1971b.
- ____. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. **Can.For.Res.**, **3**(1):90-4, 1973a.
- ____. **Compatible tree taper and volume estimating systems**. Vancouver, University of British Columbia, 1973b. Tese Doutorado.
- ____ & KOZAK, A. The whole-bole system: a conditional dual-equation system for precise prediction of tree profiles. **Can.J. For.Res.**, **7**(3):488-97, 1977.
- FRIES, J. Eigenvector analysis show that birch and pine have similar form in Sweden and British Columbia. **For.Chron.**, **41**(1):135-9, 1965.
- ____ & MATERN, B. On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves. In: IUFRO ADVISORY GROUP OF FOREST STATISTICIANS. **Proceedings of Conference in Stockholm**. Stockholm, 1965. p.85-117.
- GROSENBAUGH, L.R. Tree form: definition, interpolation, extra-polation. **For.Chron.**, **42**(4):444-57, 1966.
- HEGER, L. A trial of Hohenadl's method of stem form and stem volume estimation. **For.Chron.**, **41**(4):446-75, 1965.
- HOHENDADL, W. Der aufbau der Baumschafte. **Forstwiss. Forsch. Beih.Forstwiss.Centralblat.**, **46**:460-70, 1936.
- HOOGH, R.J. de; DIETRICH, A.B. & AHRENS, S. Classificação de sítio, tabelas de volume e de produção para povoamentos artificiais de **Araucaria angustifolia**. **Brasil Florestal**, **36**:58-82, 1978.
- HUSCH, B.; MILLER, C.H. & BEERS, F.W. **Forest mensuration**. New York, J. Wiley, 1972. 410p.
- ISEBRANDS, J.G. & CROW, T. R. **Introduction to uses and interpretation of principal component analysis in forest biology**. St.Paul, Minnesota, USDA Forest Service, 1975. 19p. (GNR-NC 17).
- KOZAK, A. & SMITH, J.H. Critical analysis of multivariate techniques for estimating tree taper suggests that simpler methods are best. **For.Chron.**, **42**(4):458-63, 1966.
- ____; MUNRO, D.D. & SMITH, J.H.G. Taper functions and their application in forest inventory. **For.Chron.**, **45**(4):278-83, 1969.
- LIU, C.J. **Multivariate taper function of loblolly pine**. Baton Rouge, Louisiana University and Agr.Mech.College, 1973. 53p. Tese Mestrado.

- _____ & KEISTER, T.D. Southern pine stem form defined throughout principal component analysis. **Can.J.For.Res.**, **8**:188-97,1978.
- LOETSCH, F.; ZOHRER, F. & HALLER, K.E. **Forest inventory**. v.2. Munique, B LV-Verlagsgesellschaft, 1973. 469p.
- MARRIOT, F.H.C. **The interpretation of multiple observations**. London, Academic Press, 1974. 117p.
- MATTE, L. The taper of coniferous species with special reference to loblolly pine. **For.Chron.**, **25**(1):21-31. 1949.
- MAX, T.A. & BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **For.Sci.**, **22**(3):283-9, 1976.
- MORRISON, D.F. **Multivariate statistical methods**. New York, McGraw-Hill, 1976. 415p.
- MUNRO, D.D. **The distribution of log size and volume within trees: a preliminary investigation**. Vancouver, University of British Columbia, 1966. 27p.
- _____. **Methods for describing distribution of soundwood in mature western hemlock trees**. Vancouver, University of British Columbia, 1968. 180p. Tese Doutorado.
- _____ & DEMAERSHALK, J. Taper-based versus volume based compatible estimating systems. **For.Chron.**, **50**(5) :197-9, 1974.
- NEWNHAM, R. M. **A study of form and taper of stems of Douglas fir, western hemlock and western redcedar on the University of British Columbia Research Forest**. Vancouver, University of British Columbia, 1958. 71p. Tese Mestrado.
- OSUMI, S. Studies on the stem form of forest trees (1). On the relative stem form (in Japanese, with abstract in English). **J.Jpn.For.Soc.**, **41**(12):471-9, 1959.
- PEARCE, S.C. Multivariate techniques of use in biological research. **Exp.Agri.**, **5**:67-77, 1979.
- PRODAN, M. **Messung der Waldbestände**. Frankfurt, J. D. Sauerlander Verlag, 1951. 260p.
- _____. **Holzmesslehre**. Frankfurt, J.D. Sauerlander Verlag, 1965. 209p.
- SPURR, S.H. **Forest inventory**. New York, Ronald Press, 1952. 476p.
- WAITE, P.A. **The application of Demaerschalk and Kozak's taper system to Gmelina**. Stillwater, Oklahoma State University, 1977. 26p. Tese Mestrado.