

# ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS E A SIMULAÇÃO DA FORMA DE TRONCO

Sergio Ahrens\*

## RESUMO

O trabalho descreve o uso da Análise de Componentes Principais, uma técnica de Análise Multivariada, na condensação das dimensões da variabilidade de forma de tronco. Devido a natureza recente de desenvolvimento e uso prático desta técnica, é enfatizado o caráter acadêmico da descrição objetivando um melhor conhecimento das potencialidades desta técnica para a ciência florestal no Brasil.

## 1. INTRODUÇÃO

A definição de modelos matemáticos para a expressão analítica da forma de tronco é desejável à medida que acentua-se o interesse de empresas do setor florestal no processamento integrado de toras, objetivando a multiplicidade de usos da madeira. Adicionalmente, estimativas precisas de volume são necessárias considerando-se a crescente valorização da madeira como matéria prima e como produto.

O tronco de árvores tem sido tratado como uma composição de sólidos geométricos (HUSCH et al. 1972). Investigadores têm tentado o ajustamento de funções matemáticas para a descrição analítica dos troncos de diferentes espécies e em diferentes locais geográficos (HEGER 1965, KOZAK & SMITH 1966). Segundo GROSENBAUCH, no entanto, troncos de árvores podem assumir uma variedade infinita de formas e a sua definição analítica requer um esforço considerável no processamento e na interpretação dos dados. Por outro lado, funções de forma são muitas vezes deficientes no seu ajustamento aos múltiplos pontos de inflexão que existem no segmento do tronco onde estão inseridos os ramos (LIU & KAISTER 1978). Falta de ajuste de alguns modelos também tem sido observada nas estimativas de diâmetros na base e na extremidade superior de troncos (KOZAK et al. 1969).

Um estudo compreensivo do conceito biológico da forma de troncos e a sua interação com fatores do meio é apresentado por LARSON (1963). Após analisar o trabalho de Larson e referindo-se ao ajustamento de funções, AHRENS (1980) recomenda que melhores e mais eficientes

---

\* Eng<sup>o</sup> Florestal, Pesquisador da Unidade Regional de Pesquisa Florestal Centro Sul (PNPF/EMBRAPA/IBDF).

resultados serão obtidos pela estratificação de dados o quanto for possível e conveniente. Critérios para estratificação devem considerar todas as possíveis causas para a variabilidade de forma. Entre outras, citam-se; espécies, idade, sítio, densidade do povoamento e práticas silviculturais anteriores como desbaste e poda.

Uma revisão crítica de um grande número de funções de forma sugeridas em literatura é apresentada por STERBA (1980). De uma maneira geral, a grande maioria dos estudos envolve o ajustamento de funções matemáticas diretamente a um conjunto de diâmetros e alturas posicionais obtidos em árvores-amostra. A fim de absorver a variabilidade de forma dos dados e poder expressá-la com um único modelo, o grau de complexidade das funções tem aumentado substancialmente.

Procurando superar as dificuldades encontradas por outros pesquisadores no ajustamento de modelos para forma, FRIES (1965) e FRIES & MATERN (1966) introduziram o uso da Análise de Componentes Principais – PCA na investigação da forma de troncos. Neste caso, as variáveis que expressam a forma dos troncos das árvores-amostra sofrem uma transformação ortogonal. Posteriormente, no ajustamento de uma função de forma, aquelas variáveis transformadas participam da análise, condensando a variabilidade de forma dos dados.

Após uma análise dos estudos pioneiros de Fries e Matérn com o uso de PCA na investigação da forma de tronco, KOZAK & SMITH (1966) reportam que o uso de funções simples, estratificação e métodos gráficos é suficiente para muitas aplicações em operações florestais e pesquisa. EVERT (1971) também sugeriu algumas limitações às tentativas de melhorar o ajustamento dos modelos. Embora as críticas ao método, entretanto, o uso de PCA em estudos de forma de tronco teve continuidade. Os trabalhos de LIU (1973), LIU & KEISTER (1978) e AHRENS (1980) apresentaram consistência em suas recomendações: a solução matricial obtida por meio de PCA é uma eficiente maneira de condensar toda a variabilidade de forma e permite obter uma expressão analítica flexível da forma de tronco.

O propósito deste trabalho é rever alguns conceitos básicos de estatística multivariada e descrever características da aplicação da Análise de Componentes Principais na simulação e desenvolvimento de uma expressão analítica para forma de tronco.

## 2. ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

### 2.1. PCA – Uma técnica de Estatística Multivariada

Os métodos de Estatística Multivariada aplicam-se a dados coletados em várias dimensões e, em um mesmo indivíduo, ou seja, diversas variáveis (MORRISON 1976). O seu principal objetivo é obter uma melhor compreensão da estrutura latente, ou não aparente, de um conjunto de dados amostrados em uma distribuição de frequência simultânea de diversas variáveis (MARRIOTT 1974).

Análise de Componentes Principais, PCA, é uma das técnicas matemáticas sob a denominação geral de métodos multivariados. PAC é extremamente útil na redução das dimensões de um conjunto de dados, análise da estrutura de sistemas numéricos multidimensionais e para

propósitos descritivos. A técnica foi primeiro desenvolvida com os estudos de maximização de variâncias de Hotteling em 1933 (citado por MORRISON 1976). No entanto, o ênfase especial e recente para com os métodos de estatística multivariada está associado com a atual disponibilidade de computadores para o processamento dos extensivos cálculos que a análise requer.

Deve-se salientar que a Análise de Componentes principais não é diretamente utilizada para testes de hipóteses. PCA é somente uma técnica exploratória para uma eficiente avaliação das dimensões da variabilidade de um conjunto de dados.

## 2.2. A Determinação dos Componentes Principais

Suponha-se que um vetor com  $p$  variáveis seja medido (observado) em  $n$  indivíduos independentes de tal modo que uma matriz de dados  $X$  seja obtida:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1p} \\ & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_{ij} & \\ \cdot & & & & \\ x_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{np} \end{bmatrix}$$

$$i = 1 \dots n$$

$$j = 1 \dots p$$

O método de análise de componentes principais consiste na transformação de um conjunto de variáveis correlacionadas  $X_1 \dots X_p$  em um novo conjunto de variáveis não correlacionadas ou componentes ortogonais  $C_1 \dots C_p$ , observando-se as seguintes propriedades básicas (MARRIOT 1974, ISEBRANDS & CROW 1975):

- a. cada nova variável  $C_k$  é uma combinação linear das variáveis originais  $X_j$ ,  $j = 1 \dots p$ .

$$C_k = a_{k1}X_1 + a_{k2}X_2 + \dots + a_{kp}X_p$$

- b. a soma dos quadrados dos coeficientes é igual à unidade.

$$\sum_{j=1}^p a_{kj}^2 = 1, \text{ para cada } k = 1, \dots, p.$$

c) a variação total das novas variáveis é igual à variação total das variáveis originais.

d) a variância de cada nova variável decresce em ordem, ou seja, de todas as possíveis combinações lineares,  $C_1$  tem a maior variância. De todas as possíveis combinações lineares não correlacionadas com  $C_1$ , aquela com a maior variância é  $C_2$ , e assim por diante.

Com esta transformação linear e ortogonal, um novo conjunto com  $p$  variáveis é obtido, não correlacionadas entre si e organizadas em ordem de variância decrescente (MARRIOT 1974). O valor deste novo conjunto de variáveis, entretanto, está no fato de que um pequeno número de novas variáveis ou componentes principais poderá explicar a maior parte da variância total dos dados originais. Assim, o vetor de coeficientes, ou vetor característico, associado com estas novas variáveis poderá ser considerado separadamente para explicar a estrutura multidimensional dos dados originais.

A solução para este procedimento algébrico é equivalente, em álgebra matricial, à determinação dos "eigenvalores" (raízes características ou raízes latentes) e "eigenvetores" associados (vetores característicos) da matriz  $p \times p$  de dispersão (matriz de variância e covariância) desenvolvida com os dados originais. Cada eigenvalor é a variância do componente principal correspondente, enquanto que os elementos de cada eigenvetor são os coeficientes para a obtenção dos componentes principais.

### 3. PCA E A SIMULAÇÃO DA FORMA DE TRONCO

O trabalho desenvolvido por AHRENS (1980) com dados de **Pinus taeda L.**, coletados na Floresta Nacional de Irati, PR, é aqui utilizado para exemplificar um estudo de simulação da forma de tronco por meio da Análise de Componentes Principais.

#### 3.1. Obtenção dos dados e a análise propriamente dita

As informações básicas para o estudo consistiram de medições de diâmetro sem casca coletados em 188 troncos de **Pinus taeda L.** segundo o método de Hohenadl (HOHENADL 1936) e modificado por HOOGH et al (1978). Transformaram-se todos os diâmetros em raios e estes foram organizados em uma matriz de dados  $188 \times 7$ , a partir da qual uma matriz simétrica  $7 \times 7$  de somatórios corrigidos dos quadrados e produtos cruzados foi obtida utilizando-se subrotinas de SAS edição 1979 (SAS, 1979).

Este procedimento é equivalente à obtenção de uma matriz de dispersão ou matriz de variâncias e covariâncias.

A solução algébrica para a equação  $|P - \lambda I| = 0$  (equação característica) foi obtida por meio da subrotina PROC MATRIX e os comandos EIGEN, VALS e VECS. Desta forma, obteve-se uma matriz diagonal de raízes características em ordem decrescente (Tabela 1) e um conjunto associado de vetores característicos (Tabela 2), cada vetor-coluna estando relacionado com uma raiz correspondente.

$$D = \begin{matrix} & & & & \text{Raio } n^{\circ} \\ & & & & R_1 & R_2 & \dots & R_7 \\ \text{(Matriz de Dados)} & & & & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,7} \\ 2 & X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,7} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 188 & X_{188,1} & X_{188,2} & \dots & X_{188,7} \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} & & & & R_1 & R_2 & \dots & R_7 \\ \text{(Matriz de SQ e PC)} & & & & \left[ \begin{array}{cccc} R_1 & SQ_1 & PC_{1,2} & PC_{1,7} \\ R_2 & & SQ_2 & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ R_7 & & & SQ_7 \end{array} \right] \end{matrix}$$

onde:

$SQ_1$  = Somatório corrigido dos quadrados para o raio  $R_1$ ,

$PC_{1,2}$  = Somatório corrigido dos produtos cruzados dos raios  $R_1$  e  $R_2$ . Os demais símbolos têm significado análogo.

**TABELA 1** – Raízes características da matriz de somatório dos quadrados e produtos cruzados

Número ordinal do vetor característico	Raiz característica	Porcentagem da variância explicada	Porcentagem cumulativa da variância explicada
1	10,0236	99,72	99,72
2	0,0167	0,17	99,89
3	0,0041	0,04	99,93
4	0,0024	0,02	99,95
5	0,0019	0,02	99,97
6	0,0015	0,02	99,99
7	0,0012	0,01	100,00
TOTAL	10,0514	100,00	

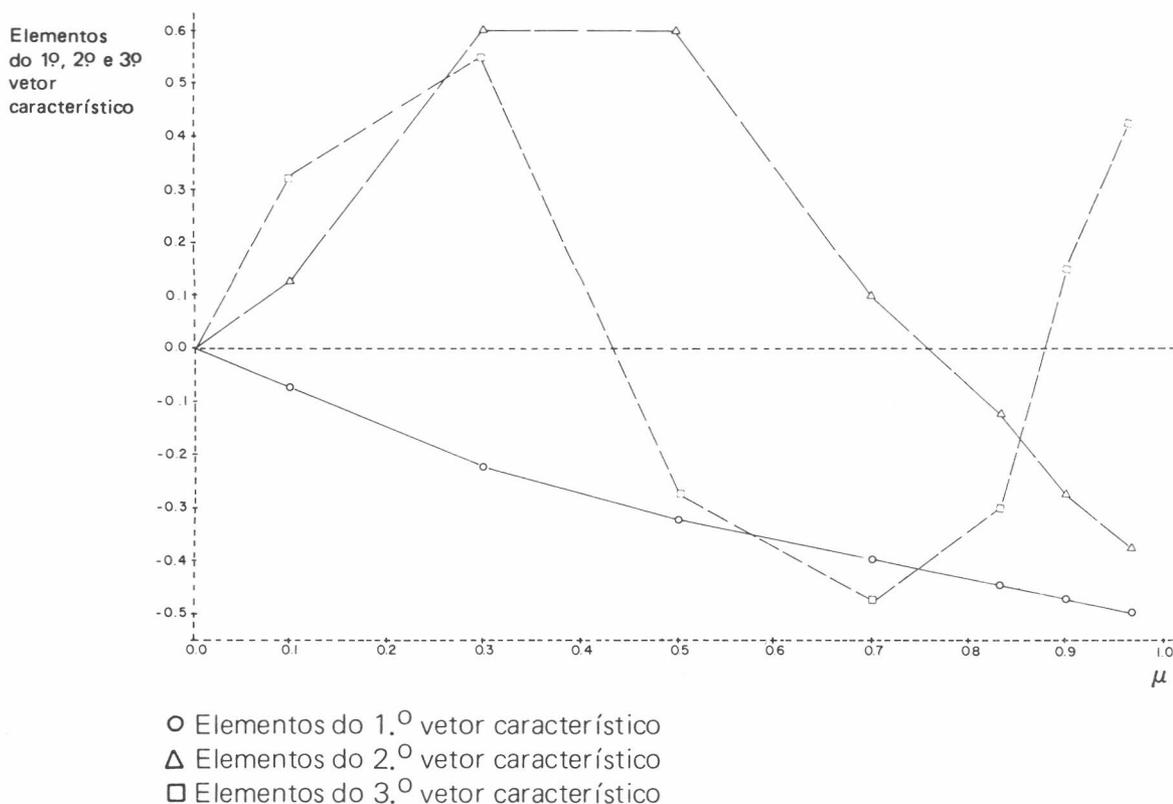
**TABELA 2** – Vetores característicos associados às raízes características da matriz de somatório dos quadrados e produtos cruzados.

Elemento	Raiz característica						
	1	2	3	4	5	6	7
1	-0,073747	0,127024	0,313448	0,296600	0,405945	-0,790901	0,043459
2	-0,213371	0,611514	0,555317	-0,426355	0,155088	0,257049	-0,015540
3	-0,330984	0,599204	-0,282757	0,531880	-0,376848	0,029875	0,160156
4	-0,409884	0,102944	-0,465203	-0,378004	0,054499	-0,277370	-0,618217
5	-0,447714	-0,131427	-0,312069	-0,276361	0,329024	0,001063	0,707290
6	-0,464723	-0,273530	0,150432	0,468774	0,430824	0,439653	-0,296533
7	-0,505038	-0,384944	0,420703	-0,091333	-0,610169	-0,193077	0,042851

Ao se proceder à uma avaliação da contribuição porcentual de cada raiz característica (Tabela 1) para absorver a variabilidade existente entre os raios (diâmetros) das árvores-amostra, constatou-se que somente a primeira raiz explicou, isoladamente, 99,72% da variância total. A porcentagem adicional explicada com as demais raízes foi insignificante.

Esta foi considerada uma forte e definitiva evidência de que a primeira raiz e o seu vetor associado foram extremamente úteis para expressar a estrutura latente (forma dos troncos) do conjunto original de dados.

Aquela avaliação envolveu, entretanto, alguma subjetividade e evidências mais sólidas foram obtidas com a análise do gráfico produzido com os elementos dos vetores associados com as três primeiras raízes características (Fig. 1). Observou-se que a tendência dos elementos associados à primeira raiz característica está muito próxima ao perfil geométrico de um tronco, enquanto que a tendência dos elementos associados à segunda e terceira raízes não tem nenhum significado aparente.



**FIG. 1** — Distribuição dos elementos dos vetores característicos associados às três primeiras raízes latentes em função da posição relativa ao longo do tronco.

### 3.2. Definição matemática do modelo ou função de forma

Considerando que a primeira raiz característica explicou uma alta proporção da variabi-

lidade de forma, os elementos do vetor característico associado foram analisados como se estivessem na mesma proporção que os raios (diâmetros) de um tronco com forma média. Análise de regressão múltipla foi utilizada para ajustar uma função polinomial aos elementos do primeiro vetor característico (AHRENS 1980). Dentre os modelos testados a função seguinte foi considerada adequada para a estimativa de raios relativos:

$$\hat{e} = b_0 + b_1 u^{1/4} + b_2 u^{1/4} + b_3 u^{1/2} + b_4 u \quad (\text{Eq. 3.1})$$

onde,  $\hat{e}$  = valor estimado para os elementos (coeficientes) do vetor característico associado à primeira raiz latente ou, raio relativo de um tronco hipotético de comprimento unitário e forma média.

$u$  = posição relativa ao longo de um tronco de comprimento unitário (0,10, 0,30, . . . , 0,967).

$$b_0 = 4,3106887 \text{ E}-06$$

$$b_1 = 3,10149948$$

$$b_2 = 6,65976505$$

$$b_3 = 4,68992834$$

$$b_4 = -0,628295584$$

O coeficiente de múltipla determinação ( $R^2$ ) para o modelo selecionado foi igual a 0,9987. Avaliou-se a habilidade do modelo para estimar raios relativos e obteve-se um bom ajuste ao longo de todo o fuste hipotético de comprimento unitário, incluindo a base, região em que a maioria dos estudos anteriores sobre forma de tronco apresentaram estimativas tendenciosas.

Entretanto, considerando a natureza dos cálculos envolvidos no procedimento, aquele modelo (equação 3.1) poderia estimar somente "raios relativos" de um tronco de comprimento unitário e forma média. Afim de que fosse possível estimar raios (diâmetros) como uma função do comprimento real de um tronco, e com forma divergente daquela forma média de tronco (dentro da amplitude de dados considerados na análise), duas transformações foram acrescentadas à equação 3.1:

a) as variáveis independentes foram expressas como uma razão entre a posição absoluta ( $l$ ) do diâmetro sendo estimado e o comprimento total do tronco ( $L$ ).

$$\hat{r}(l) = F\left(\frac{l}{L}\right) = b_0 + b_1 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/4} + b_2 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/3} + b_3 \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} + b_4 \left(\frac{l}{L}\right)$$

b) um ajustamento para forma foi incluído, multiplicando-se o raio estimado para uma árvore com forma média, pela razão entre o raio observado (medido) e o raio estimado para uma determinada árvore (Eq. 3.3). Isto obrigou a função a passar através do ponto onde se encontra o diâmetro à altura do peito. A função de forma finalmente desenvolvida foi:

$$\hat{r}(l) = F(l) = \frac{r_{1,30}}{\hat{r}(l_{1,30})} \cdot F\left(\frac{l}{L}\right) \quad (\text{Eq. 3.3})$$

onde:

$\hat{r}(l)$  = raio sem casca, estimado para uma posição absoluta  $l$ , a partir do topo, em metros.

$$r_{1,30} = \frac{d_{1,30}}{2} \quad (\text{sem casca, em metros})$$

$$l_{1,30} = L - 1,15 \text{ m}$$

$$\hat{r}(l_{1,30}) = b_0 + b_1 l_{1,30}^{1/4} + b_2 l_{1,30}^{1/3} + b_3 l_{1,30}^{1/2} + b_4 l_{1,30} \quad (\text{Eq. 3.4})$$

$$F\left(\frac{l}{L}\right) = \text{equação 3.2}$$

A equação desenvolvida (Eq. 3.3) é basicamente uma função de forma para a estimativa do raio sem casca ( $r_l$ ) em uma posição  $l$  a partir do topo de troncos com comprimento  $L = h - 0,15\text{m}$ . Obviamente isto é verdadeiro somente para a espécie, sítio e amplitude de DAP e altura considerados neste estudo.

#### 4. DETERMINAÇÃO DO VOLUME

O volume total, sem casca, para cada fuste, foi estimado procedendo-se à integração da equação 3.3 como segue:

$$V = \int_0^L \pi (\hat{r}(l))^2 dl$$

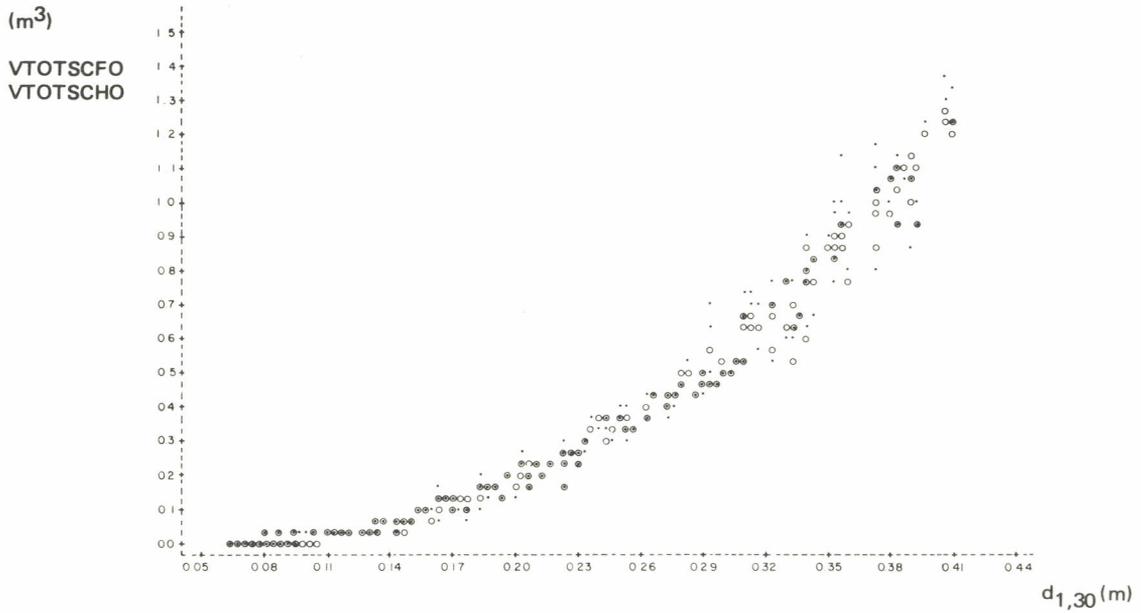
$$\hat{V} = \int_0^L \pi \cdot \left[ \frac{r_{1,30}}{\hat{r}(l_{1,30})} \cdot F(l/L) \right]^2 dl$$

$$\hat{V} = \pi \cdot \left[ \frac{r_{1,30}}{\hat{r}(l_{1,30})} \right]^2 \cdot \int_0^L \left[ F(l/L) \right]^2 dl \quad (\text{Eq. 3.5})$$

Estimativas do volume total, sem casca, foram também obtidas para todas as 188 árvores-amostra utilizando-se o método de Hohenadl. Análise de correlação foi executada a fim de verificar a magnitude da consistência com que ambos procedimentos estimaram volume. O coeficiente de correlação linear de Pearson observado foi igual a 0,9927, o que reflete um elevado grau de associação linear entre as duas variáveis consideradas. Entretanto, isto indica apenas que a distribuição de ambas as estimativas é consistente dentro da amplitude de dados. Poderia ocorrer que as estimativas de volume obtidas com os dois procedimentos divergissem com “bastante consistência” e o coeficiente de correlação linear seria ainda o mesmo.

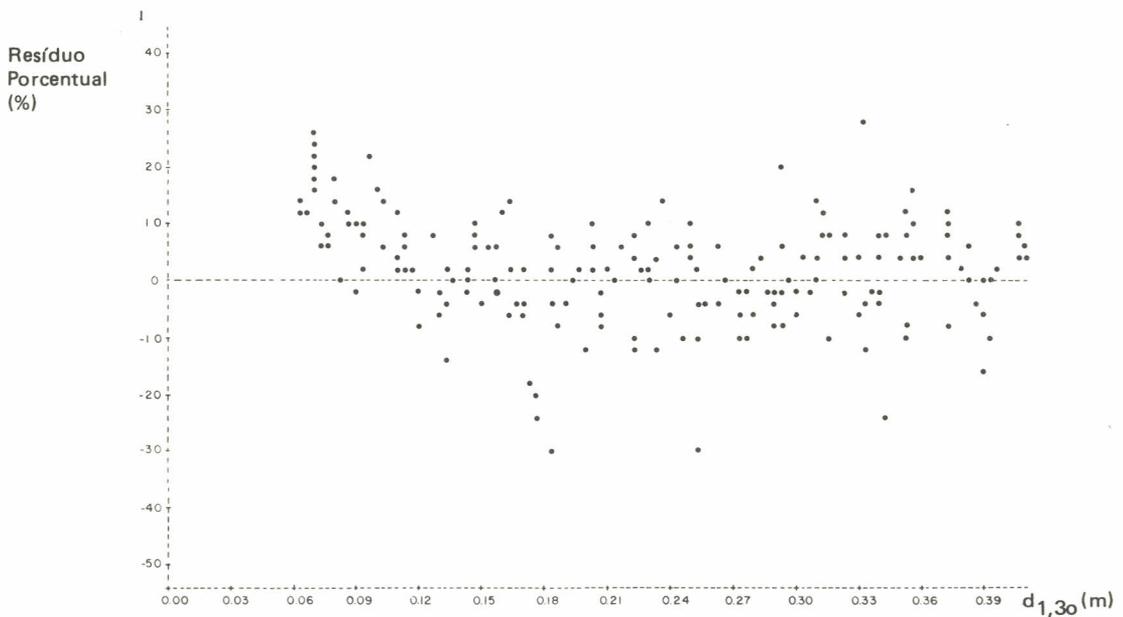
A fim de auxiliar na interpretação da referida tendência de associação linear, um gráfico foi produzido com a distribuição das duas estimativas de volume em função do DAP das árvores-amostra (Fig. 2). A distribuição dos volumes estimados não apresentou evidências de que duas diferentes populações pudessem ser identificadas. Entretanto, aquela foi somente uma representação gráfica dos volumes estimados, e uma análise adicional dos resíduos foi considerada para a avaliação da utilidade do modelo de volumetria obtido a partir da função de forma.

Os resíduos foram expressos pela diferença entre as duas estimativas de volume para cada árvore, como uma porcentagem do volume estimado pelo método de Hohenadl. A distribuição dos resíduos percentuais assim obtidos, em função do DAP, é apresentada na Fig. 3. Observa-se que para árvores pequenas, aquelas com DAP entre 6,0 e 12,0 cm, os volumes foram superestimados com o modelo de volumetria derivado da função de forma. Em uma análise global, entretanto, a dispersão observada dos resíduos percentuais foi entre - 30,60 e 28,50, limites considerados adequados aos objetivos deste estudo.



- $V_{TOTSCFO}$ : Volume total, sem casca, por integração da função de forma.
- $V_{TOTSCHO}$ : Volume total, sem casca, obtido pelo método de Hohenadl.
- ⊙ Estimativas de volume coincidentes graficamente.

**FIG. 2** – Distribuição das estimativas do volume total sem casca, obtidas pela função de volume derivada da função de forma e pelo método de Hohenadl, em função do diâmetro à altura do peito.



$$\text{Resíduo Porcentual} = \frac{V_{TOTSCFO} - V_{TOTSCHO}}{V_{TOTSCHO}} \cdot 100 (\%)$$

$V_{TOTSCFO}$ : Volume total, sem casca, por integração da função de forma.  
 $V_{TOTSCHO}$ : Volume total, sem casca, obtido pelo método de Hohenadl.

**FIG. 3** – Distribuição dos resíduos percentuais das estimativas de volume obtidas com a função de volume derivada da função de forma.

Neste estudo, somente volumes totais sem casca foram calculados. Entretanto, a principal justificativa para o desenvolvimento de um sistema de forma e volume está na sua flexibilidade em estimar volumes para qualquer porção do tronco. Assim, estimativas ao longo do tronco poderão ser obtidas pela integração da função de forma entre aqueles dois limites.

## 5. CONCLUSÕES

A Análise de Componentes Principais, PCA, foi utilizada na definição matemática da forma de tronco de **Pinus taeda L.** Na solução matricial do problema, o vetor característico associado com a primeira raiz latente da matriz de dispersão dos dados, foi considerado uma conveniente expressão da forma média de troncos com comprimento unitário, tendo explicado 99,72% da variabilidade de forma dos dados. Após o ajuste de uma função polinomial, a função de forma desenvolvida foi:

$$\hat{r}(l) = \frac{r_{1,30}}{\hat{r}(l_{1,30})} \cdot F(l/L)$$

onde,

$$\hat{r}(l) = \text{raio sem casca estimado a qualquer posição absoluta (l) a partir do topo (em metros)}$$

$$r_{1,30} = d_{1,30}^{1/2} \quad (\text{sem casca, em metros})$$

$$l_{1,30} = L - 1,15 \text{ m}$$

$$L = \text{comprimento total do tronco acima de uma altura de toco de 0,15 m.}$$

$$\hat{r}(l_{1,30}) = \text{Eq. 3.4}$$

$$F(l/L) = \text{Eq. 3.2}$$

Volumes totais sem casca foram estimados para todas as 188 árvores-amostra utilizando-se dois procedimentos: a função de volume obtida por integração da função de forma e, o método de Hohenadl. A magnitude e consistência da dispersão dos resíduos entre as estimativas de volume obtidas pelos dois métodos, foram consideradas adequadas aos propósitos do estudo.

A avaliação dos resultados permitiu concluir que a Análise de Componentes Principais demonstrou ser uma técnica eficiente para a investigação da forma de tronco. Adicionalmente, o seu potencial exploratório e descritivo deve ser utilizado sempre que a compreensão das dimensões da variabilidade de um conjunto de dados for desejável.

## REFERÊNCIAS

- AHRENS, S. **A mathematical expression of stem form and volume for loblolly pine in southern Brazil.** Stillwater, Oklahoma State University, 1980. 59p. Tese Mestrado.
- ASSMAN, E. **The principles of forest yield study.** New York, Pergamon Press, 1970. 506p.
- ATTERBURY, T. 35—26—136: The Behre facts. In: Meeting of Western Mensurationists. San Jose, CA, 1973. 17p.
- BEHRE, C. E. Preliminary notes on studies of tree form. **Journal of Forestry**, **21**:507—11, 1923.
- . Form-class taper curves and volume tables and their application. **J. Agr. Res.**, **35**(8): 673—743, 1927.
- . Factors involved in the application of form-class volume tables. **J. Agr. Res.**, **51**(8): 669—713, 1935.
- BENNETT, F. A. & SWINDEL, B. F. **Taper curves for planted slash pine.** Asheville, USDA Forest Service, 1972. 4p. (RN SE—179).
- BRUCE, D. Some transformations of the Behre equation of tree form. **For. Sci.**, **18**(2):164—6, 1972.
- . & CURTIS, R. O. & VANCOEVERING, C. Development of a system of taper and volume tables for red alder. **For. Sci.**, **14**(3):339—59, 1968.
- . & SCHUMACHER, F. X. **Forest mensuration.** New York, McGraw Hill, 1950. 483p.
- CAO, Q. V. **Prediction of cubic-foot volume of loblolly pine to any top diameter limit and to any point on tree bole.** Blacksburg, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1978. 68p. Tese Mestrado.
- ; BURKHART, H. E. & MAX, T. A. Evaluation of two methods of cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. **For. Sci.**, **26**(1):71—80, 1980.
- DEMAERSCHALK, J. P. **An integrated system for the estimation of tree taper and volume.** Vancouver, University of British Columbia, 1971a. 57p. Tese Mestrado.
- . Taper equation can be converted to volume equations and point sampling factors. **For. Chron.**, **47**(6):352—4, 1971b.

- . Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. **Can. For. Res.**, **3**(1):90–4, 1973a.
- . **Compatible tree taper and volume estimating systems.** Vancouver, Univ. of British Columbia, 1973b. Tese Doutorado.
- . & KOZAK, A. *The whole-bole system: a conditional dual-equation system for precise prediction of tree profiles.* **Can. J. For. Res.**, **7**(3):488–97, 1977.
- FRIES, J. Eigenvector analysis show that birch and pine have similar form in Sweeden and British Columbia. **For. Chron.**, **41**(1):135–9, 1965.
- . & MATERN, B. On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves. In: IUFRO ADVISORY GROUP OF FOREST STATISTICIANS. **Proceedings of Conference in Stockholm.** Stockholm, 1965. p. 85–117.
- GROSENBAUGH, L. R. Tree form: definition, interpolation, extrapolation. **For. Chron.**, **42**(4):444–57, 1966.
- HEGER, L. A trial of Hohenadl's method of stem form and stem volume estimation. **For. Chron.**, **41**(4):466–75, 1965.
- HOHENDADL, W. Der Aufbau der Baumschafte. **Forstwissenschaftliches Central blatt**, **46**: 460–70, 1936.
- HOOGH, R. J. de; DIETRICH, A. B. & AHRENS, S. Classificação de sítio, tabelas de volume e de produção para povoamentos artificiais de *Araucaria angustifolia*. **Brasil Florestal**, **36**:58–82, 1978.
- HUSCH, B.; MILLER, C. H. & BEERS, F. W. **Forest mensuration.** New York, J. Wiley, 1972. 410p.
- ISEBRANDS, J. G. & CROW, T. R. **Introdution to uses and interpretation of principal component analysis in forest biology.** St. Paul, USDA Forest Service, 1975. 19p. (GNR–NC 17).
- KOZAK, A. & SMITH, J. H. G. Critical analysis of multivariate techniques for estimating tree taper suggests that simpler methods are best. **For. Chron.**, **42**(4):458–63, 1966.
- ; MUNRO, D. D. & SMITH, J. H. G. Taper functions and their application in forest inventory. **For. Chron.**, **45**(4):278–83, 1969.

- LIU, C. J. **Multivariate taper function of loblolly pine.** Baton Rouge, Louisiana University and Agr. Mech. College, 1973. 53p. Tese Mestrado.
- & KEISTER, T. D. Southern pine stem form defined throughout principal component analysis. **Can. J. For. Res.**, **8**:188–97, 1978.
- LOETSH, F.; ZOHREER, F. & HALLER, K. E. **Forest inventory.** v.2. Munique, BLV—Verlags-gesellschaft, 1973. 469p.
- MARRIOT, F. H. C. **The interpretation of multiple observations.** London, Academic Press, 1974. 117p.
- MATTE, L. The taper of coniferous species with special reference to loblolly pine. **For. Chron.**, **25**(1):21–31, 1949.
- MAX, T. A. & BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **For. Sci.**, **22**(3):283–9, 1976.
- MORISSON, D. F. **Multivariate statistical methods.** New York, McGraw-Hill, 1976. 415p.
- MUNRO, D. D. **The distribution of log size and volume within trees: a preliminary investigation.** Vancouver, University of British Columbia, 1966. 27p.
- . **Methods for describing distribution of soundwood in mature western hemlock trees.** Vancouver, University of British Columbia, 1968. 180p. Tese Doutorado.
- MUNRO, D. D. & DEMAERSHALK, J. Taper-based versus volume-based compatible estimating systems. **For. Chron.**, **50**(5):197–9, 1974.
- NEWNHAM, R. M. **A study of form and taper of stems of Douglas fir, western hemlock and western redcedar on the University of British Columbia Research Forest.** Vancouver, University of British Columbia, 1958. 71p. Tese Mestrado.
- OSUMI, S. Studies on the stem form of forest trees (1.) On the relative stem form **J. Jap. For. Soc.**, **41**(12):471–9, 1959.
- PEARCE, S. C. Multivariate techniques of use in biological research. **Expl. Agric.**, **5**:67–77, 1969.
- PRODAN, M. **Messung der Waldbestände.** Frankfurt, J. C. Sauerlander Verlag, 1951. 260p.

———. **Holzmesslehre.** Frankfurt, J. D. Sauerlander Verlag, 1965. 209p.

SPURR, S. H. **Forest inventory.** New York, Ronald Press, 1952. 476p.

WAITE, P. A. **The application of Demaerschalk and Kozak's taper system to Gmelina.** Stillwater, Oklahoma State University, 1977. 26p. Tese Mestrado.