

FRONTEIRAS DEA NEBULOSAS PARA DADOS INTERVALARES

João Carlos C. B. Soares de Mello

Depto. de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, 24240-240, Niterói, RJ, Brasil
jcsmello@producao.uff.br

Eliane Gonçalves Gomes

Embrapa Monitoramento por Satélite
Av. Dr. Júlio Soares de Arruda, 803, Parque São Quirino, 13088-300, Campinas, SP, Brasil
eliane@cnpm.embrapa.br

Lidia Angulo Meza

Instituto de Ciência e Tecnologia – Universidade Veiga de Almeida
Rua Ibituruna, 108, 4º andar, Maracanã, 20271-020, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lidia_a_meza@yahoo.com

Luiz Biondi Neto

Depto. de Eng. Eletrônica e Telecomunicações – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rua São Francisco Xavier, 524, Bl. A-5036, Maracanã, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lbiondi@uerj.br

Annibal Parracho Sant'Anna

Depto. de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, 24240-240, Niterói, RJ, Brasil
tppaps@producao.uff.br

Resumo

A fronteira DEA nebulosa surge em situações nas quais algumas variáveis (*inputs* ou *outputs*) apresentam um certo grau de incerteza na medição, sem que se assuma que os valores obedecem a alguma distribuição de probabilidade. A fronteira eficiente é construída considerando-se os limites de incerteza, isto é, os menores e maiores valores possíveis de serem assumidos pela variável afetada pela incerteza de medição. Dessa forma, constrói-se uma região em relação à qual as DMUs possuem um certo grau de pertinência. Para calcular o grau de pertinência são construídas fronteiras otimistas e pessimistas. Como o grau de pertinência não é uma medida de eficiência, é introduzido o conceito de fronteira invertida que permite calcular um índice de eficiência difuso. É mostrado o caso em que apenas uma variável apresenta incerteza e é generalizado para o caso em que algumas ou todas as variáveis apresentam incertezas.

Palavras-chave: DEA – Dados intervalares – Conjuntos nebulosos

1. Introdução

Os modelos de Análise Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) clássicos (Cooper et al., 2000) estimam uma fronteira não paramétrica, linear por partes, constituída pelas unidades eficientes. Supõem ainda que existe certeza na determinação das medidas usadas. No entanto, isso pode não ocorrer, seja por efetiva incerteza nas medidas, seja porque os dados são considerados intervalares (Cooper et al., 2000).

A proposta deste artigo, que estende os resultados de Soares de Mello et al. (2002), é construir um índice único de eficiência, para a situação em que as variáveis (*inputs* ou *outputs*) apresentam

incerteza. É feita, inicialmente, a formulação para o caso em que apenas uma variável apresenta incerteza. Para tal, a fronteira eficiente é considerada como um conjunto nebuloso (Zadeh, 1965) em relação ao qual as unidades em avaliação (*Decision Making Units – DMUs*) apresentam um certo grau de pertinência. Os limites inferior e superior desse conjunto nebuloso são denominados fronteira pessimista e fronteira otimista quando a variável com incerteza é um *output*, e inversamente quando a variável de incerteza é o *input*.

A troca dos *outputs* com *inputs* conduz a uma fronteira invertida (Yamada et al., 1994; Novaes, 2002; Entani et al., 2002). É então possível, com os dois graus de pertinência, definir um índice composto de avaliação.

Estes mesmos conceitos são estendidos para o caso em que várias variáveis apresentam incerteza. É feita uma formulação geométrica para o caso de um *input* e um *output*, que posteriormente é generalizada para o caso multidimensional.

2. Formulação para uma Variável com Incerteza

2.1. Criação da Fronteira DEA Nebulosa

A abordagem aqui proposta leva, apenas, em consideração os valores máximos e mínimos possíveis de serem assumidos, com o uso posterior de programação linear clássica e modelos DEA tradicionais para a determinação das fronteiras. Caso os valores do *output* para algumas DMUs sejam maiores que o suposto, a fronteira será obtida levando em conta o máximo valor do *output*, que denomina-se *Fronteira Otimista*. Caso os valores sejam inferiores ao suposto, obtém-se uma levando em conta o mínimo valor do *output*, que denomina-se *Fronteira Pessimista*.

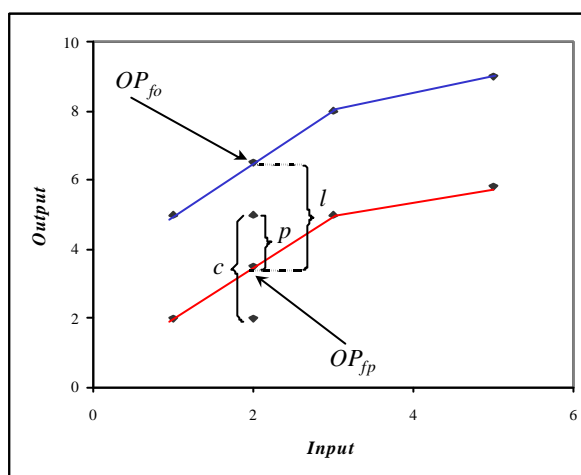


Figura 1: Fronteiras otimista e pessimista.

A Figura 1 ilustra esses conceitos, para o modelo DEA BCC (Banker et al., 1984). Assim, OP_{fo} e OP_{fp} referem-se ao *output* projetado na fronteira otimista e pessimista, respectivamente. c é o comprimento da DMU, ou seja, é a diferença entre os valores otimista e pessimista do *output*; l é a largura da faixa, isto é, a diferença entre o valor do *output* incerto para as fronteiras otimista e pessimista; p é parte que está na faixa, é a diferença entre o *output* otimista de cada DMU e a intersecção dessa DMU com a fronteira pessimista.

Agora, define-se o grau de pertinência de cada DMU a essa fronteira. A pertinência deveria obedecer à relação p/c , unitária quando $p = c$. Porém pode acontecer que uma região da fronteira que não contenha uma DMU. Então, caso sejam considerados *outputs* otimistas em DEA clássico, a DMU não é eficiente. Para situações análogas a essa, a pertinência deveria ser p/l ,

unitária quando $p = l$. Considerando os dois casos, a pertinência à fronteira nebulosa é definida pela equação (I).

$$\wp = \frac{p^2}{lc} \quad (I)$$

2.2. Cálculo Algébrico da Pertinência

Obtém-se uma expressão algébrica que possa ser usada em modelos gerais, multidimensionais, em que apenas um *input* ou *output* apresenta incerteza. Assim, para o caso de um *output* com incerteza, orientado a *outputs*, e que, nesta situação, as eficiências são dadas por números maiores que a unidade, têm-se as equações (II) e (III), nas quais O_{fo} e O_{fp} são os valores nas fronteiras otimista e pessimista deste *output*.

$$Ef_{fp} = \frac{OP_{fp}}{O_{fp}} \quad (II) \quad \quad \quad Ef_{fo} = \frac{OP_{fo}}{O_{fo}} \quad (III)$$

A largura da faixa l é a diferença entre o alvo da fronteira otimista e o alvo da fronteira pessimista, ou seja, $l = OP_{fo} - OP_{fp} = O_{fo} Ef_{fo} - O_{fp} Ef_{fp}$. O comprimento da DMU c é a diferença entre o *output* otimista e o pessimista, isto é, $c = O_{fo} - O_{fp}$. A parte da DMU que está na fronteira p é a diferença entre o *output* otimista e o alvo do *output* pessimista na fronteira pessimista, desde que a diferença seja positiva. Isto implica que o *output* otimista deve estar dentro da faixa da fronteira nebulosa; caso contrário, p deve ser igual a 0. Em (IV) formaliza-se a equação para p .

$$p = O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp} \geq 0 \quad (IV)$$

$p = 0$, caso contrário

Das relações anteriores, é possível deduzir a expressão da pertinência e é apresentada em (V).

$$\wp = \frac{(O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp})^2}{(O_{fo} Ef_{fo} - O_{fp} Ef_{fp})(O_{fo} - O_{fp})}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp} Ef_{fp} \geq 0 \quad (V)$$

$\wp = 0$, caso contrário

A tabela 1 apresenta os valores para o exemplo apresentado anteriormente.

Tabela 1: Valores calculados com base nas relações (II) a (V).

DMU	I	O_{fp}	O_{fo}	Ef_{fp}	Ef_{fo}	c	l	p	\wp
A	1	1	2	1,00	1,00	1	1	1	1,00
B	2	1	2	2,00	2,00	1	2	0	0,00
C	4	2	4	2,00	2,00	2	4	0	0,00
D	4	2	6	2,00	1,33	4	4	2	0,25
E	4	4	6	1,00	1,33	2	4	2	0,50
F	5	5	10	1,00	1,00	5	5	5	1,00
G	6	4	10	1,25	1,00	6	5	5	0,83

$$\wp = \frac{(I_{fp} Ef_{fp} - I_{fo})^2}{(I_{fo} Ef_{fo} - I_{fp} Ef_{fp})(I_{fp} - I_{fo})}, \text{ se } I_{fp} Ef_{fp} - I_{fo} \geq 0 \quad (VI)$$

$\wp = 0$, caso contrário

De forma análoga ao que acontece com um *output* com incerteza, pode-se apresentar o caso em que haja um *input* com incerteza. Nesse caso, define-se como *input* otimista, I_{fo} , aquele com o menor valor que o *input* pode assumir, e *input* pessimista, I_{fp} , o de maior valor que o *input* pode

assumir. Fazendo os cálculos análogos aos dos *outputs* define-se o índice de pertinência apresentado em (VI).

2.3. Fronteira Invertida e Índice composto de avaliação

O grau de pertinência à fronteira não é uma medida de eficiência. Para distinguir entre DMUs é necessário introduzir o conceito de fronteira invertida (Yamada et al., 1994; Novaes, 2002; Entani et al., 2002), que consiste em considerar os *outputs* como *inputs* e os *inputs* como *outputs*.

Para obter um índice único de eficiência, deve-se englobar os dois graus de pertinência e obrigar a que a variação do índice se dê entre 0 e 1. Esse índice será chamado de índice composto de avaliação (*ICA*) e é dado pela equação (VII), na qual \wp_o é o grau de pertinência à fronteira original e \wp_i é o grau de pertinência à fronteira invertida.

$$ICA = \frac{(\wp_o - \wp_i + 1)}{2} \quad (VII)$$

Na Tabela 2 (dados originais de *input* e *output* na Tabela 1) são mostrados os graus de pertinência e o índice composto de avaliação.

Tabela 2: Graus de pertinência e eficiência nebulosa para as DMUs da Figura 4.

DMU	\wp_o	\wp_i	<i>ICA</i>
A	1,00	1,00	0,50
B	0,00	1,00	0,00
C	0,00	1,00	0,00
D	0,25	0,50	0,37
E	0,50	0,00	0,75
F	1,00	0,20	0,90
G	0,83	1,00	0,42

3. Formulação para várias Variáveis com Incerteza

3.1. Conceitos gerais

As formulações anteriores são restritas ao caso em que apenas uma variável apresenta incerteza. Pode ocorrer que mais de uma, ou mesmo todas as variáveis apresentem incerteza. Torna-se então necessário generalizar os conceitos anteriores.

O ponto mais pessimista é agora o ponto da DMU que está a ser avaliada, com os maiores valores para todos os *inputs* e os menores para todos os *outputs*. Analogamente, o ponto mais optimista é o ponto da DMU com os menores valores para todos os *inputs* e os maiores para todos os *outputs*. Mais uma vez, a fronteira pessimista é determinada com um modelo DEA para todos os pontos mais pessimistas e, analogamente, a fronteira optimista é calculada com os pontos mais optimistas. Os alvos de cada DMU nas duas fronteiras são os alvos pessimistas e optimistas. No entanto, devido à variação em mais de uma variável, estes alvos são não radiais, e a direcção de projecção é determinada pelo vector que une os pontos extremos de cada DMU.

A Figura 2 ilustra os conceitos anteriores, no caso de um modelo com apenas 1 *input* e 1 *output*, ambos com incerteza. Nela, A é o ponto mais pessimista, C o mais optimista; B é o alvo pessimista e D o optimista. Por analogia com o caso em que só uma das variáveis apresenta incerteza, o índice de pertinência à fronteira difusa é definido pela equação (VIII).

$$\wp = \frac{\overline{BC} \overline{BC}}{\overline{BD} \overline{AC}} \quad (VIII)$$

O cálculo dos alvos pode ser feito pela intersecção da reta suporte do segmento que define a DMU com as fronteiras pessimista e optimista. Este cálculo, no caso bidimensional apresentado, é relativamente fácil.

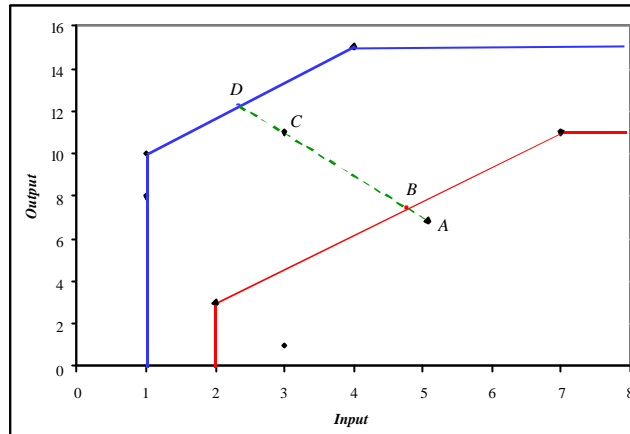


Figura 2: Fronteira DEA nebulosa com *input* e *output* com incerteza.

3.2. Modelo Multiobjetivo

Para contornar o problema de determinação de faces, utiliza-se o modelo multiobjetivo para determinação de alvos (Angulo-Meza, 2002; Angulo-Meza et al., 2002; Soares de Mello et al., 2003), cuja formulação é apresentada em (IX), no caso do modelo DEA-CCR.

$$\begin{aligned}
 & \max \phi_1 \\
 & \dots \\
 & \max \phi_s \\
 & \min \varphi_1 \\
 & \dots \\
 & \min \varphi_m \\
 & \text{sujeito a}
 \end{aligned} \tag{IX}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_r y_{rj0} &= \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s \\
 \varphi_i x_{ij0} &= \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m \\
 \phi_r &\geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s \\
 \varphi_i &\leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \\
 \lambda_j &\geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Em (IX) otimizam-se as projeções de cada uma das variáveis (s *outputs* e m *inputs*) de maneira independente. O modelo fornece como resultado um conjunto de alvos para a DMU que está a ser avaliada (em um total de n DMUs), e o utilizador, ou decisor, é o encarregado de fazer a escolha final do alvo. Neste caso, o alvo procurado é aquele que passa pela reta que une os pontos mais otimistas e mais pessimistas. Uma vez que em um espaço n -dimensional uma reta é definida por $n - 1$ equações lineares, o modelo multiobjetivo transforma-se em um modelo mono-objetivo.

5. Conclusões

A abordagem proposta neste artigo para incorporação de incertezas aos modelos DEA clássicos tem a vantagem de não arbitrar, nem uma determinada distribuição de probabilidade para as incertezas das variáveis, nem uma função nebulosa para as mesmas. É, ao mesmo tempo,

matematicamente simples, já que os resultados são obtidos através de simples cálculos algébricos, sem necessidade de usar programação linear nebulosa.

Adicionalmente, o índice proposto para avaliação global, permite resolver um dos principais problemas em DEA, qual seja, o de as DMUs poderem ser eficientes atribuindo peso nulo a vários multiplicadores (Estellita-Lins e Angulo-Meza, 2000). Assim, todas as variáveis são levadas em conta no índice final. Assim, não basta a DMU ter bom desempenho naquilo em que ela é melhor; não deve ter também mau desempenho no critério em que for pior. Isso é conseguido sem a atribuição de nenhum peso subjetivo a qualquer critério.

Essa característica permite eliminar outro dos inconvenientes dos modelos DEA BCC: o fato de a DMU de maior *output* ser eficiente independentemente dos valores dos *inputs* (Ali, 1993). No modelo aqui proposto, o valor da eficiência de tal DMU depende também de sua posição em relação à fronteira invertida.

O modelo para várias variáveis com incerteza é resolvido de forma eficiente com ajuda da formulação multiobjetivo de DEA. No entanto, devido à quantidade de cálculos envolvidos torna-se necessário o desenvolvimento de um *software* específico, de modo que este modelo torne-se prático.

Referências

- Ali, A.I. (1993). Streamlined computation for data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **64**, 61-67.
- Angulo-Meza, L.(2002). Um Enfoque Multiobjetivo para determinação de Alvos na Análise Envoltória de Dados (DEA). Tese de Doutorado. Programa de Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ.
- Angulo-Meza, L., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. & Biondi Neto, L. (2002). Fronteira DEA de dupla envoltória no estudo da evolução da ponte aérea Rio-São Paulo. *Panorama Nacional da Pesquisa em Transportes 2003 - Anais do XVII ANPET*, **2**, 1158-1166.
- Banker, R.D., Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, **30** (9), 1078-1092.
- Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-454.
- Cooper, W.W., Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Entani, T., Maeda, Y. & Tanaka, H. (2002). Dual Models of Interval DEA and its extensions to interval data. *European Journal of Operational Research*, **136**, 32-45.
- Estellita-Lins, M.P. & Angulo-Meza, L. (2000). *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Novaes, L.F.L. (2002). *Envoltória Sob Dupla ótica aplicada na avaliação imobiliária em ambiente do sistema de informação geográfica*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.
- Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo-Meza, L., Gomes, E.G., Serapiao, B.P., Estellita-Lins, M.P. (2003). Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para Companhias Aéreas brasileiras. *Pesquisa Operacional*, **23** (2), 325-345.
- Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi, L.N., Angulo-Meza, L. (2002). Construção de uma fronteira eficiente nebulosa na presença de dados com incertezas na medição. *Anais do XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, Outubro.
- Soares de Mello, J.C.C.B., Estellita-Lins, M.P. & Gomes, E.G. (2002). Construction of a smoothed DEA frontier. *Pesquisa Operacional*, **22** (2), 183-201.
- Yamada, Y, Matui, T. & Sugiyama, M. (1994). New analysis of efficiency based on DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37** (2), 158-167.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8** (3), 338-353.