CAPÍTULO 8

Monitoramento estatístico uni e multivariado de fenologia florestal

Osmir José Lavoranti

1. Introdução

As bases uni e multivariada para os estudos fenológicos são formadas a partir das avaliações dos aspectos temporais, dos eventos biológicos repetitivos, suas possíveis causas ambientais e suas inter-relações.

O aspecto temporal, em que são realizadas avaliações na mesma variável ou na mesma unidade experimental em mais de uma ocasião, caracteriza-se como medidas repetidas e seu planejamento de análise estatística deve levar em consideração esse fato (CROWDER; HAND, 1990).

Vários planejamentos com medidas repetidas são comuns, principalmente em situações em que os pesquisadores tomam medidas repetidas em diversos tempos, com o objetivo de verificar o seu comportamento ao longo do tempo. A análise deste tipo de estudo é feita através do planejamento longitudinal.

Este tipo de planejamento envolve observações, de uma ou mais variáveis respostas, em diversas condições de avaliação, caracterizando medidas correlacionadas e com variâncias não-homogêneas nos diversos tempos, em função do modo sistemático de como as medidas são tomadas.

As variáveis resposta podem ser contínuas ou discretas, avaliadas nas diversas unidades experimentais (indivíduo, vasos, canteiros, etc) e podem ser agrupadas segundo tratamentos ou fatores. Para cada unidade experimental, obtém-se diversas unidades de observação, que em conjunto definem um perfil individual de respostas. Para cada tratamento (ou grupo) está associado um perfil médio de respostas, que deve evidenciar o efeito do tratamento e o seu comportamento ao longo do tempo.

Os dados longitudinais são denominados regulares se o intervalo entre duas medidas consecutivas quaisquer for constante ao longo do estudo. Além disso, se as observações forem feitas nos mesmos instantes de tempo em todas as unidades experimentais, tem-se uma estrutura de dados balanceada. A ausência de observações caracteriza uma estrutura de dados desbalanceados.

Os fatos, *a priori* relacionados, são de extrema importância no planejamento das análises estatísticas, sejam elas uni ou multivariadas. Dessa forma, este texto visa abordar de forma teórica as principais características, vantagens e desvantagens dos modelos uni e multivariado, que levam em consideração estes fatos, assim como, apresentar uma alternativa de análise através de curvas de crescimento de observações avaliadas ao longo do tempo, como é o caso de estudos de fenologia florestal.

2. Análise de perfis

A análise de medidas repetidas no tempo pode ser feita através da análise de perfis por meio de um modelo univariado, de acordo com o planejamento do tipo "*split plot on time*", que impõe forte restrição quanto à matriz de variâncias-covariâncias, como por meio de um modelo multivariado, que utiliza uma matriz de variâncias-covariâncias sem restrições, chamada não-estruturada.

Tanto as análises de perfis univariadas como as multivariadas visam verificar se as hipóteses nulas são aceitas ou rejeitadas:

- Hipótese de perfis paralelos ($H0_I$) - a interação entre tratamentos e tempo é nula;

- Hipótese de perfis coincidentes ($H0_G$) – dado que os perfis são paralelos, o efeito de tratamento é nulo;

- Hipótese de perfis horizontais ($H0_T$) – dado que os perfis são paralelos, o efeito do tempo é nulo;

- Se os perfis não são paralelos (interação significativa), o efeito do tempo é nulo dentro de cada um dos tratamentos.

Estas hipóteses colocadas na forma do modelo linear geral (H_0: CbM = 0), em que C é a matriz responsável por comparações entre tratamentos (linhas da matriz b), b é a matriz de parâmetros desconhecidos e, M a matriz responsável por comparações entre as ocasiões de observação (colunas da matriz b), podem ser expressas por:

$$H_{0I}: \begin{bmatrix} \mu_{11}-\mu_{12} \\ \mu_{12}-\mu_{13} \\ \vdots \\ \mu_{1(t-1)}-\mu_{1t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{g1}-\mu_{g2} \\ \mu_{g2}-\mu_{g3} \\ \vdots \\ \mu_{g(t-1)}-\mu_{gt} \end{bmatrix} \quad \underset{g-1\ \ g}{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix} \quad \underset{t\ \ t-1}{M_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{0G}: \sum_{k=1}^{t}\mu_{1k} = \sum_{k=1}^{t}\mu_{2k} = \ldots = \sum_{k=1}^{t}\mu_{gk} \qquad C_1 \qquad M_2 = 1_t$$

$$H_{0T}: \sum_{i=1}^{g}\mu_{i1} = \sum_{i=1}^{g}\mu_{i2} = \ldots = \sum_{i=1}^{g}\mu_{it} \qquad C_2 = 1_g' \qquad M_1$$

2.1 Análise univariada de perfis

O modelo para análise univariada de medidas repetidas corresponde ao adotado na análise de experimentos em parcelas subdivididas (*split-plot*), onde as causas de variação entre indivíduos são agrupadas separadamente daquelas de variação intra-indivíduos:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

em que:

μ : é uma constante comum a todas as observações;

α_i : é o efeito do i-ésimo tratamento;

γ_{ij} : é o erro associado às parcelas;

β_k : é o efeito do k-ésimo tempo;

$(\alpha\beta)_{ik}$: é o efeito da interação do i-ésimo tratamento e k-ésimo tempo e,

ε_{ijk} : é o erro associado à observação.

para i = 1, ..., g; j = 1, ...,ni e k = 1,...,t

Este modelo é extremamente restritivo e exige certas pressuposições sobre as variâncias e covariâncias dos níveis do fator intra-indivíduos e a ocorrência de erros entre-indivíduos (parcelas) e intra-indivíduos (subparcelas) com distribuição normal, independente, identicamente distribuído e com variância constante.

Especificamente, este modelo assume o que é chamado "circularidade" entre os níveis do fator intra-indivíduos. Uma matriz de variância-covariância circular tem a propriedade que a variância da diferença entre todos os pares de níveis do fator intra-indivíduos iguala a uma mesma constante. A pressuposição de circularidade é menos restritiva que a pressuposição de simetria composta, em que se assume igualdade entre todas as variâncias dos níveis e também covariâncias iguais.

Uma condição suficiente e necessária, para a validade da estatística F da análise de variância, é a circularidade de medidas repetidas, ou seja, as matrizes devem possuir simetria composta (ENDE, 1993). A circularidade de uma matriz de variância-covariância é avaliada pela esfericidade (e), para isto, uma matriz com coeficientes de contrastes ortonormais deve ser usada para transformar a matriz de variância-covariância original para uma forma ortonormalizada. Se a forma ortonormalizada é esférica, ou seja, as variâncias da variáveis transformadas são iguais e suas covariâncias são 0, a matriz original é dita esférica:

$$\Sigma_* = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \Sigma_* = C\Sigma C = \lambda I$$

Matriz esférica

$$\Sigma = \begin{bmatrix} (\sigma^2+\sigma_1^2) & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & (\sigma^2+\sigma_1^2) & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & (\sigma^2+\sigma_1^2) & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & (\sigma^2+\sigma_1^2) \end{bmatrix}$$

O principal problema da violação da condição de esfericidade é a ocorrência de testes F não exatos e liberais para os fatores da subparcela, ou seja, inflação do erro Tipo I. Portanto, a verificação da esfericidade é prerrogativa para uma boa análise através do modelo univariado.

2.2 Análise multivariada de perfis

O modelo usado para análise multivariada de perfis pode ser representado matricialmente na forma usual da Análise Multivariada de Variância (MANOVA), isto é:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

em que:

$\mathbf{Y}_{(Nxt)}$: é a matriz de dados;

$\mathbf{X}_{(Nxg)}$: é a matriz de especificação do modelo;

$\boldsymbol{\beta}_{(gxt)}$: é a matriz de parâmetros e,

$\boldsymbol{\varepsilon}_{(Nxt)}$: é a matriz de erros.

Uma das grandes vantagens do uso da MANOVA recai no fato de não haver qualquer pressuposição sobre a estrutura da matriz de variância-covariância, desconsiderando o aspecto de esfericidade e, por conseguinte, todas as considerações a respeito do teste F e correções dos graus de liberdade. Isto ocorre porque a MANOVA adota um termo de erro específico para contrastes com 1 grau de liberdade e, conseqüentemente, cada contraste está sempre associado com seu termo de erro específico, ao invés dos termos de erro agrupados usados em ANOVA.

No entanto, o uso desta técnica requer perfis de dados completos. Além disso, há necessidade de uma relação n (número de observações) por t (números de tempos) elevada para garantir um teste poderoso.

2.3 Análise de curvas de crescimento

Uma técnica alternativa aos modelos uni e multivariado é a análise de curvas de crescimento. Esta técnica dever ser utilizada quando a suposição de esfericidade da matriz de variância-covariância não é satisfeita, há observações perdidas ou no caso de delineamento desbalanceado. O principal objetivo desta técnica é estimar e predizer os efeitos de tratamentos em algum tempo pela modelagem da relação funcional entre tratamento e tempo.

Esta análise é efetuada por meio de modelos mistos lineares ou não lineares, permitindo o uso de várias estruturas de covariâncias, de forma que se possa optar por aquela que melhor represente os dados:

$$y_{ij} = \mathbf{X}_{ij}\beta_i + \mathbf{Z}_{ij}b_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

em que:

y_{ij} (px1) : é o perfil de respostas do indivíduo (ij);

$\mathbf{X}_{ij}$ (pxr) : é uma matriz de posto $r<p$, conhecida e de especificação, associada ao vetor β_i (rx1) de parâmetros sub-populacionais desconhecidos;

$\mathbf{Z}_{ij}$ (pxq) : é uma matriz conhecida e de especificação, de posto coluna completo, associada ao vetor de efeitos aleatórios b_{ij} (qx1) de diferenças individuais em torno dos valores populacionais e,

ε_{ij} (px1) : um vetor de erros aleatórios.

para $i = 1, \ldots, g$; $j = 1, \ldots, n_i$.

As estimativas $\hat{\beta}$ e $\hat{b}$ são obtidas por máxima verossimilhança ou máxima verossimilhança restrita, sendo a escolha do modelo baseada na razão de verossimilhança (para modelos encaixados, comparados 2 a 2) ou os Critérios de Informação de Akaike (AIC) e Bayesiano de Schwarz (BIC).

3. Dados Circulares

Uma observação **y** de uma variável circular pode ser representada graficamente em um circulo de raio unitário na posição **(1,y)**, quando se utiliza coordenadas polares, ou **(cos(y), sen(y))**, quando se utiliza coordenadas cartesianas. A Figura 1 é uma representação gráfica de uma observação **y**, de uma variável circular.

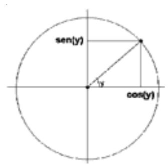

Figura 1. Representação gráfica de uma observação circular.

A média circular de um conjunto de dados circulares, y_i, 1 = 1,2,...,n, é dada por (ZAR, 1999a):

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \arctan(S/C), \text{se } S \geq 0 \text{ e } C > 0, \\ \arctan(S/C) + \pi, \text{se } C < 0, \\ \arctan(S/C) + 2\pi, \text{se } S < 0 \text{ e } C > 0, \end{cases}$$

em que,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(y_i)$$

e

$$C = \sum_{i=1}^{n} \cos(y_i)$$

Essa medida corresponde ao centro de gravidade dos dados. Outra interpretação possível pode ser obtida quando se considera cada observação como um vetor de comprimento **um** e direção y_i. Nesse caso, a média circular corresponde à direção do vetor resultante.

Uma medida de concentração bastante utilizada na análise de dados circulares é o comprimento do vetor resultante, $R = \sqrt{S^2 + C^2}$.

No caso de todas as observações serem coincidentes, tem se que **R = n**; esse é o caso de concentração máxima dos dados (variabilidade mínima). Outro caso limite se dá quando os ângulos encontram-se uniformemente distribuídos no círculo, **R = 0**; trata-se do caso de concentração mínima (variabilidade máxima; a média circular não está definida). Usualmente utiliza-se o comprimento da resultante média definida por $\bar{R} = \frac{R}{n}$, que tem vantagem de variar no intervalo **[0,1]**.

3.1 Modelos Probabilísticos

A função de densidade de probabilidade (p) e a função distribuição (F) de uma variável circular y são representadas por:

$$p(y) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_{r=1}^{\infty}\{\alpha_{1r}\cos(ry) + \alpha_{2r}\mathrm{sen}(ry)\}\right] \text{ e}$$

$$F(y) = \frac{1}{2\pi}\left[y + 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_{1r}\mathrm{sen}(ry) + \alpha_{2r}\cos(ry)}{r}\right\}\right].$$

Se $y \in S_{2\pi}$, em que é um intervalo semi-aberto de amplitude 2p, então define-se a função característica circular de **y** no ponto **r = 1, 2, ...** como $\phi_r = \alpha_{1r} + i\alpha_{2r}$, com $\alpha_{1r} = E\{\cos(ry)\}$ e , sendo a_{1r} e a_{2r} denominados momentos circulares de **y**. Para **r = 1**, tem-se, em que **m** é a média circular e **r** é o comprimento da resultante média de **y**.

A análise de dados circulares requerem modelos probabilísticos adequados. Sendo que as distribuições uniforme circular, Von Mises e normal arqueada são as mais utilizadas.

A distribuição uniforme circular possui função densidade de probabilidade dada por: $p(y)=\dfrac{1}{2\pi}, y \in S_{2\pi}$.

Uma característica que merece destaque é o fato desta distribuição não possuir média circular e ter comprimento de resultante média igual a zero. Esse fato é bastante importante uma vez que a distribuição uniforme circular tem um papel central na teoria asintótica desenvolvida para dados circulares.

A distribuição Von Mises é uma das mais utilizadas na modelagem de dados reais, possui boas propriedades (regularidade, parâmetros interpretáveis e simetria) e parâmetros que são facilmente estimáveis. Se y Î S_{2p} segue uma distribuição de Von Mises, com média circular m Î S_{2p} e parâmetro de concentração **l > 0**, representa-se **y ~ M(m, l)**, sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$\mathbf{p(y;\mu,\lambda)=\frac{1}{2\pi I_0(\lambda)}\exp\{\lambda\cos(y-\mu)\}},$$

em que $\mathbf{I_0(\lambda)}$ é a função modificada de Besel de primeiro tipo e ordem zero, avaliada no ponto **l**. De um modo geral, tem-se:

$$\mathbf{I_r(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+r)!k!\}^{-1}\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^{2k+r}, r=0,1,2,\ldots}$$

Os momentos trigonométricos de uma distribuição de Von Mises com parâmetros **m** e **l** são $\mathbf{E\{\cos(ry)\}=A_r(\lambda)\cos(r\mu)}$ e $\mathbf{E\{sen(ry)\}=A_r(\lambda)sen(r\mu)}$, em que o comprimento da resultante média é dada por:

A variável definida por y = Z(mod 2p) apresenta distribuição normal arqueada com parâmetros m e w^2; representa-se por $N\varepsilon\left(\mu,\omega^2\right)$. Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$\mathbf{p}\left(\mathbf{y};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\omega}^2\right)=\sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\pi}\boldsymbol{\omega}}\mathbf{exp}\left\{-\frac{\left(\mathbf{y}+\mathbf{2k}\pi-\boldsymbol{\mu}\right)^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\omega}^2}\right\};\mathbf{y}\in\mathbf{S}_{2\pi}\,.$$

Os momentos circulares dessa distribuição são dados por:

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{cos}\left(\mathbf{ry}\right)\right\}=\mathbf{exp}\left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega}^2\right\}\mathbf{cos}\left(\mathbf{r}\boldsymbol{\mu}\right)$$ e

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{s}\mathit{en}\left(\mathbf{ry}\right)\right\}=\mathbf{exp}\left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega}^2\right\}\mathbf{s}\mathit{en}\left(\mathbf{r}\boldsymbol{\mu}\right)$$

A média circular de **y** é dada por m (mod 2p) e o comprimento da resultante média é dada por (ZAR, 1999a):

$$\mathbf{exp}\left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega}^2\right\}$$

Verifica-se que se **y** segue uma distribuição Von Mises, com média circular **0** e parâmetro de concentração **l**, sua distribuição pode ser aproximada por uma normal arqueada com média circular 0 e parâmetro de dispersão $\mathbf{w^2}$, tal que $A_1(\lambda)=\exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2\right)$.

A distribuição uniforme circular surge quando l se aproxima de zero, no caso de uma distribuição Von Mises e quando $\mathbf{w^2}$ tende a infinito no caso da normal arqueada.

3.2 Modelos Multivariados

Considere uma amostra aleatória $(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i), \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}$, onde e $\mathbf{x}_i$ é um vetor p-variado de covariáveis fixas. Seja $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}_i), \boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$, onde **b** é um vetor paramétrico, **h(.)** é uma função $\mathrm{h} : \Re \to [-\pi, \pi)$, duplamente diferenciável e inversível, com **h(0) = 0** e é o intercepto. Uma possível escolha para **h** é **h(a) = 2arctan(a)**.

A função escore associada aos parâmetros desse modelo conduz às seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{H u} &= \mathbf{0}, \\ \overline{\mathbf{R}} \mathbf{sen}(\hat{\alpha}) &= \mathbf{0}, \\ \overline{\mathbf{R}} \mathbf{cos}(\hat{\alpha}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_1(\lambda) &= \overline{\mathbf{R}}, \end{aligned}$$

$\mathbf{y}_i \simeq \mathbf{M}(\boldsymbol{\mu}_i, \lambda)$ $\mathbf{Z}_i = (\mathbf{Z}_{i1}, \ldots, \mathbf{Z}_{in_i})^T$

em que $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)^T$, $\mathbf{u}_i = \mathbf{sen}\{\mathbf{y}_i - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}})\}$, $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)^T$, $\mathbf{H} = \mathbf{diag}\left\{ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{\eta}_1), \ldots, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\eta}_n}(\boldsymbol{\eta}_n) \right\}$ e $\mathbf{R} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)(\mathbf{S}^2 + \mathbf{C}^2)^{1/2}$, sendo $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{sen}\{\mathbf{y}_i - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}})\}$ e $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}os\{\mathbf{y}_i - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}})\}$.

Para a modelagem conjunta de posição e dispersão, considere o modelo de regressão para $\mathbf{w}_{it}$ dado por $\mathbf{w}_{it} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{it}^T \boldsymbol{\gamma})$, onde $\mathbf{f}$ é duas vezes diferenciável, a função de ligação é inversa uma a uma, **g** é um vetor de parâmetros $\mathbf{q} \times \mathbf{1}$ e
são matrizes de covariáveis.

Definindo a função de estimação para $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\gamma}^T, \boldsymbol{\lambda}\right)^T$ por:

$$\phi_n^C(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} X_i^T H_i C_i^{-1}\left(\overline{Y}_i - \mu_i\right) \\ Z_i^T F_i \left(\lambda \dot{c}_i - \dfrac{\lambda}{2} d_i\right) \\ w_i^T \dot{c}_i - \dfrac{1}{2} w_i^T d_i \end{bmatrix},$$

em que $\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{i}}$ é um vetor $\mathbf{n} \times \mathbf{1}$ com componentes

é um vetor $\mathbf{n}_{\mathbf{i}} \times \mathbf{1}$ com componentes

e $\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \mathbf{diag}\left\{\mathbf{f}\left(\mathbf{z}_{\mathbf{i1}}^T \boldsymbol{\gamma}\right), \cdots, \mathbf{f}\left(\mathbf{z}_{\mathbf{it}}^T \boldsymbol{\gamma}\right)\right\}^T$.

Se os $\mathbf{C}_{\mathbf{i}}$´s são conhecidos, então sob as condições de regularidade, a seqüência de raízes é consistente e assintoticamente normal, com:

$$S_i(\theta) = \begin{pmatrix} S_{11i} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22i} & S_{23i} \\ 0 & S_{32i} & S_{33i} \end{pmatrix} \text{ e } A_i(\theta) = \begin{pmatrix} A_{11i} & A_{12i} & A_{13i} \\ A_{21i} & A_{22i} & A_{23i} \\ A_{31i} & A_{32i} & A_{33i} \end{pmatrix},$$

cujos componentes são encontrados em Artes e Jorgensen (2000).

Pode-se modelar $\mathbf{C}_{\mathbf{i}}$ como uma função de um vetor de parâmetro desconhecido **a**. Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}$ a raiz de . Sob as condições de regularidade e assumindo que $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\theta})$ é um estimador consistente de **a**, para dado **q**, tem-se:

$$n^{1/2}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\wp} \aleph\left[0, \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} S_i(\theta)\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i(\theta)\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n} S_i(\theta)\right\}^{-T}\right],$$ quando

$\mathbf{n} \to \infty$, com $\mathbf{S}_\mathbf{i}$ e $\mathbf{A}_\mathbf{i}$ definido acima.

Em vez de pode-se considerar a função de estimação linear ótima, definida por:

$$\phi_n^*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^T\mathbf{H}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_i^T\mathbf{F}_i\mathbf{K}_i & \lambda\mathbf{W}_i\mathbf{E}\left(\ddot{\mathbf{c}}_i^T\right) \\ \mathbf{0} & \lambda\mathbf{E}\left(\dot{\mathbf{c}}_i^T\right)\mathbf{W}_i & \mathbf{E}\left\{\mathbf{1}^T\left(\dot{\mathbf{c}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)\right\} \end{bmatrix} \mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{s}_i)\mathbf{s}_i,$$

onde $\mathbf{s}_i^T = \left\{\left(\overline{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i\right)^T, \left(\dot{\mathbf{c}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)^T, \left(\dot{\mathbf{c}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)^T \mathbf{1}\right\}$ e $\ddot{\mathbf{c}}_i$ é um vetor $\mathbf{n}_i \times \mathbf{1}$ com componentes $\left[\partial^2\mathbf{c}/\partial\mathbf{x}^2\right]\left(\mathbf{y}_0;\mathbf{x}\right)\Big|_{x=\lambda w_{it}}$. Se $\mathbf{cov}(\mathbf{s}_i)$ é desconhecida, esta função requer a estimação de $(2\mathbf{n}_i+\mathbf{1})(2\mathbf{n}_i+\mathbf{3})/\mathbf{2}$ parâmetros de pertubação que correspondem a componentes desta matriz.

$\boldsymbol{\phi}_n^C$, Um caso intermediário, é dado por:

$$\phi_n^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} X_i^TH_i & 0 & 0 \\ 0 & Z_i^TF_iK_i & \lambda W_iE\left(\ddot{c}_i^T\right) \\ 0 & \lambda E\left(\dot{c}_i^T\right)W_i & E\left\{1^T\left(\dot{c}_i - \frac{1}{2}d_i\right)\right\} \end{bmatrix} G_is_i.$$

em que $\mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{s}_i)$ é substituído pela matriz bloco diagonal

$$\phi_n^*(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{cov}^{-1}\left(\overline{\mathbf{Y}}_i\right) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{cov}^{-1}\left(\dot{\mathbf{c}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_i & \mathbf{var}^{-1}\left(\dot{\mathbf{c}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)^T \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Definindo a função de estimação para $\boldsymbol{\theta} = \left(\boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\gamma}^T, \boldsymbol{\lambda}\right)^T$ por:

$$\phi_n^C(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} X_i^T H_i C_i^{-1}\left(\overline{Y}_i - \mu_i\right) \\ Z_i^T F_i \left(\lambda \dot{c}_i - \dfrac{\lambda}{2} d_i\right) \\ w_i^T \dot{c}_i - \dfrac{1}{2} w_i^T d_i \end{bmatrix},$$

em que $\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{i}}$ é um vetor $\mathbf{n} \times \mathbf{1}$ com componentes

é um vetor $\mathbf{n_i} \times \mathbf{1}$ com componentes

e $\mathbf{F_i} = \mathbf{diag}\left\{\mathbf{f}\left(\mathbf{z}_{\mathbf{i1}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma}\right), \cdots, \mathbf{f}\left(\mathbf{z}_{\mathbf{it}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma}\right)\right\}^{\mathbf{T}}$.

Se os $\mathbf{C_i}$´s são conhecidos, então sob as condições de regularidade, a seqüência de raízes é consistente e assintoticamente normal, com:

$$S_i(\theta) = \begin{pmatrix} S_{11i} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22i} & S_{23i} \\ 0 & S_{32i} & S_{33i} \end{pmatrix} \text{ e } A_i(\theta) = \begin{pmatrix} A_{11i} & A_{12i} & A_{13i} \\ A_{21i} & A_{22i} & A_{23i} \\ A_{31i} & A_{32i} & A_{33i} \end{pmatrix},$$

cujos componentes são encontrados em Artes e Jorgensen (2000).

Pode-se modelar $\mathbf{C_i}$ como uma função de um vetor de parâmetro desconhecido **a**. Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{n}}$ a raiz de . Sob as condições de regularidade e assumindo que $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\theta})$ é um estimador consistente de **a**, para dado **q**, tem-se:

$$n^{1/2}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\wp} \aleph\left[0, \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} S_i(\theta)\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i(\theta)\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n} S_i(\theta)\right\}^{-T}\right], \quad \text{quando}$$

$\mathbf{n} \to \infty$, com $\mathbf{S_i}$ e $\mathbf{A_i}$ definido acima.

Em vez de pode-se considerar a função de estimação linear ótima, definida por:

$$\phi_n^*(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^T\mathbf{H}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_i^T\mathbf{F}_i\mathbf{K}_i & \lambda\mathbf{W}_i\mathbf{E}\left(\ddot{\mathbf{c}}_i^T\right) \\ \mathbf{0} & \lambda\mathbf{E}\left(\dot{\mathbf{c}}_i^T\right)\mathbf{W}_i & \mathbf{E}\left\{\mathbf{1}^T\left(\dot{\mathbf{c}}_i-\frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)\right\} \end{bmatrix}\mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{s}_i)\mathbf{s}_i,$$

onde $\mathbf{s}_i^T=\left\{\left(\overline{\mathbf{Y}}_i-\boldsymbol{\mu}_i\right)^T,\left(\dot{\mathbf{c}}_i-\frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)^T,\left(\dot{\mathbf{c}}_i-\frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)^T\mathbf{1}\right\}$ e $\ddot{\mathbf{c}}_i$ é um vetor $\mathbf{n}_i\times\mathbf{1}$ com componentes $\left[\partial^2\mathbf{c}/\partial\mathbf{x}^2\right](\mathbf{y}_0;\mathbf{x})\big|_{x=\lambda w_{it}}$. Se $\mathbf{cov}(\mathbf{s}_i)$ é desconhecida, esta função requer a estimação de $(\mathbf{2n}_i+\mathbf{1})(\mathbf{2n}_i+\mathbf{3})/\mathbf{2}$ parâmetros de pertubação que correspondem a componentes desta matriz. Um caso intermediário, é dado por:

ϕ_n^C,

$$\phi_n^*(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} X_i^TH_i & 0 & 0 \\ 0 & Z_i^TF_iK_i & \lambda W_iE\left(\ddot{c}_i^T\right) \\ 0 & \lambda E\left(\dot{c}_i^T\right)W_i & E\left\{1^T\left(\dot{c}_i-\frac{1}{2}d_i\right)\right\} \end{bmatrix}G_is_i.$$

em que $\mathbf{cov}^{-1}(\mathbf{s}_i)$ é substituído pela matriz bloco diagonal

$$\phi_n^*(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix} \mathbf{cov}^{-1}\left(\overline{\mathbf{Y}}_i\right) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{cov}^{-1}\left(\dot{\mathbf{c}}_i-\frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_i & \mathbf{var}^{-1}\left(\dot{\mathbf{c}}_i-\frac{1}{2}\mathbf{d}_i\right)^T\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

4. Teste de Igualdade entre Médias Direcionais

Para testar a igualdade entre médias direcionais, pode-se utilizar dois tipos de teste, conhecidos como método P e método M (FISHER, 1993).

O teste da hipótese de igualdade, em amostras grande (n >25), é feito admitindo-se que as populações possuem dispersões comparáveis (ZAR, 1999b). Se a maior das dispersões não for mais que quatro vezes a menor das dispersões, deve-se adotar o método P. Caso contrário, deve-se adotar o método M.

4.1 Método P

Sendo $\hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_r$ as estimativas das dispersões das *r* populações, se $\hat{\delta}_{\max} / \hat{\delta}_{\min} \leq 4$ calcule:

$\hat{C}_P = \sum_{i=1}^{r} n_i \cos \hat{\mu}_i$; $\hat{S}_P = \sum_{i=1}^{r} n_i \operatorname{sen} \hat{\mu}_i$; $\hat{R}_P = \sqrt{\hat{C}_2^2 + \hat{S}_2^2}$ e a estimativa média $\hat{\delta}_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i \hat{\delta}_i}{N}$.

A hipótese de igualdade entre as médias direcionais é rejeitada se Y_r for demasiadamente grande, em que:

$$Y_r = \frac{2(N - R_P)}{\hat{\delta}_I}$$

4.2 Método M

Se $\hat{\delta}_{\max} / \hat{\delta}_{\min} > 4$, calcule:

$\hat{C}_M = \sum_{i=1}^{r} (\cos \hat{\mu}_i) / \hat{\sigma}_i^2$; $\hat{S}_M = \sum_{i=1}^{r} (\operatorname{sen} o \hat{\mu}_i) / \hat{\sigma}_i^2$ e

$$R_M = \sqrt{\hat{C}_M + \hat{S}_M}$$

A estatística do teste é:

$$Y_r = 2(\sum_{i=1}^{r} 1/\hat{\sigma}_i^2 - R_M)$$

O valor calculado da estatística P ou M é comparado com o percentil da distribuição qui-quadrado com (r-1) graus de liberdade.

5. Referências

ARTES, R.; JORGENSEN, B. Longitudinal data estimating and equations for dispersion models. **Scandinavian Journal of Statistics**: Theory and Applications, Stockholm, v. 27, n. 2, p. 320-334, 2000.

CROWDER, M. J.; HAND, D. J. **Analysis of repeated measures**. London: Chapman & Hall, 1990. 256 p.

ENDE, C. N. von. Repeated-measures analysis: growth and other timedependent measures. In: SCHEINER, S. M.; GUREVITCH, J. (Ed.). **Design and analysis of ecological experiments**. New York: Chapman & Hall, 1993. p. 113-137.

FISHER, N. I. **Statistical analysis of circular data**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 300 p.

ZAR, J. H. Circular distributions: descriptive statistics. In: ______. **Biostatistical analysis**. 4th. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999a. p. 592-615.

ZAR, J. H. Circular distributions: hypothesis testing. In: ______. **Biostatistical analysis**. 4th. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999b. p. 616-660.