O PROBLEMA DA GRADE HORÁRIA NA ESCOLA DE ENSINO MÉDIO

Samuel Silva da Mata[1]

[1] Pesquisador, M.Sc Eng. de Sistemas, Otimização e Estatística da Embrapa Tabuleiros Costeiros, Av. Beira-Mar, 3250, Caixa Postal 44, CEP 49001-970, Aracaju, SE. Fone: (79) 4009-1335; E-mail: damata@cpatc.embrapa.br

Resumo: Este trabalho analisa o problema da geração de grade horária dentro das características estabelecidas pelo padrão das escolas brasileiras de ensino médio. Apresenta também uma metodologia simples para representação do problema que se ajusta adequadamente à linguagem do administrador escolar e a implementação computacional das abordagens heurística e matemática. Uma abordagem heurística especifica foi implementada por um algoritmo de busca que analisa o conjunto de restrições imperativas para a geração de uma configuração básica inicial que, se considerada viável, vai sendo agregada pelas restrições desejáveis até que se alcance, quando possível, uma solução ótima, Por outro lado, uma abordagem matemática exata é definida com base na programação linear inteira, zero e um. Alguns problemas reais foram analisados e aqueles para os quais a implementação heurística não encontrou solução ótima, foram submetidos também a uma implementação baseada na programação linear inteira, para fins de comparação. Os principais resultados alcançados foram o estabelecimento de uma metodologia simples para o delineamento e representação do problema, permitindo o tratamento computacional direto dos formulários de entrada de dados, tanto para um programa de busca heurística como para um outro de geração de matriz para o equacionamento da questão pela programação linear inteira.

Palavras Chaves: Horário escolar, programação inteira, modelo heurístico, grade horária.

1. Introdução

O problema da grade horária nas escolas de ensino médio, bem como em muitos estabelecimentos de ensino superior, apresenta um conjunto de características que o diferencia substancialmente do contexto universitário convencional, onde a carga horária pode ser distribuída por mais de um turno e não há prefixação dos alunos em agrupamentos ou turmas. Por outro lado, no ensino fundamental o problema da grade horária é praticamente inexistente, uma vez que, geralmente, um único professor leciona todas as disciplinas para uma única turma.

Da imposição de uma tabela de horário escolar inadequada decorre a insatisfação do corpo docente, a má distribuição da carga horária de determinadas disciplinas e custos desnecessários pela contratação excessiva de professores. Além disso, determinadas situações, como a substituição de um professor, exigem que uma imediata reconfiguração da tabela de horário seja feita para se ajustar ao novo conjunto de restrições resultante.

Particularmente, para a problemática do horário nas escolas de ensino médio de outros países, alguns trabalhos foram apresentados a partir da década de 60, os quais são relacionados na vasta bibliografia do trabalho de Schmidt (1980). Um estudo sobre o problema do horário nas escolas da Holanda, com uma abordagem heurística detalhada, foi publicado por Gans (1981). O problema do horário para os cursos universitários e a elaboração do calendário de exames é amplamente discutido por Burke (2002), além da apresentação de diferentes abordagens atuais do problema e de uma vasta bibliografia sobre o assunto, dos últimos quinze anos.

2. Caracterização do problema

As características básicas do problema da grade horária nas escolas de ensino médio são:

ENCONTRO REGIONAL DE PESQUISA OPERACIONAL NO NORDESTE, 1., 2007, Recife. Anais... Recife: UFPE, 2007.

- Ciclo semanal de aplicação da grade horária;
- Período diário de aulas de um expediente com quatro a cinco horas de duração;
- Preestabelecimento da relação professor versus turma;
- Estabelecimento prévio de uma carga horária semanal, associada a cada conjunto disciplina-turma;
- Cada professor está associado a uma ou mais disciplinas;
- A cada sala está associado um conjunto fixo de alunos ou turma;
- Algumas sessões de aulas demandam recursos externos à sala (laboratórios, projetor de slides etc.) para os quais pode haver situações de conflito;
- Algumas atividades, como palestras e educação física, exigem a alocação simultânea de várias turmas;
- Normalmente, não se permite a alocação de duas aulas no mesmo dia, com um intervalo de tempo entre elas;
- Algumas disciplinas exigem, outras não aceitam, a alocação de duas ou mais sessões de aulas consecutivas no mesmo dia (aulas duplas, triplas etc.);
- Geralmente, a carga horária semanal é completa, isto é, não há ocorrência de períodos sem alocação de aula. Todavia, algumas situações administrativas fazem com que algumas turmas fiquem com a carga horária incompleta; nestes casos, geralmente se deseja que os períodos vagos ocorram nos horários extremos do expediente;
- Algumas disciplinas, por razões técnicas, exigem que suas aulas ocorram em faixas de tempo predefinidas. Por exemplo, exige-se que as aulas de educação física ocorram nos dois últimos tempos da segunda, quarta ou sexta-feira;
- Geralmente, exige-se que professores de disciplinas afins tenham um dia comum de não-alocação de aulas, para reuniões de planejamento conjunto;
- Normalmente, os professores de disciplinas com baixa carga horária semanal são alocados a mais de um programa de curso, para a complementação da carga horária contratual. Em se tratando de tabelas de horário independentes, as informações de não-disponibilidade do professor devem ser trocadas entre eles;
- Respeita-se, ao máximo possível, as preferências individuais dos professores quanto à forma de distribuição de suas cargas horárias. Alguns professores lecionam em dois ou mais colégios em dias alternados.

3. Terminologia

O conceito de período equivale, para esta discussão, ao termo horário e representa um dos espaços de tempos reservados para se ministrar uma aula, normalmente de cinqüenta minutos ou uma hora.

As diversas abordagens e publicações têm dado ao problema do horário uma terminologia diversificada e, às vezes, com sentido ambíguo entre elas. As siglas, abaixo definidas, são utilizadas no decorrer do trabalho e estabelecem um padrão de representação dos dados a serem informados pelos usuários:

- A cada turma se associa um código de dois caracteres que a identifica, como: 1A, 3B etc. Aos professores são associados os códigos: P01, P02 etc. Aos horários ou períodos diários de aula vinculam-se os códigos: 1H, 2H etc;
- O dia de coordenação de um professor é um dia de não alocação de aulas, para fins de organização e planejamento conjunto das suas atividades acadêmicas. Este dia é chamado também de folga básica;

- Folga suplementar é um dia da semana, a ser escolhido pelo sistema, em que não se permitirá a alocação de aulas, independente da existência ou não da folga básica;
- Restrições complementares são cadeias específicas de caracteres na entrada de dados que preestabelecem uma folga ou aula de um professor, em um dia e horário determinado. Sua forma padrão é, por exemplo, P01SEG1H2A, P01TER5HFF e P01QUA1HCF para fixar, para o professor P01, uma aula na turma 2A, impor uma folga na terça-feira no quinto horário e cancelar a folga na quarta-feira no primeiro horário, respectivamente;
- Uma matriz **CH** vincula, a cada turma, uma carga horária semanal obrigatória, por disciplina. O escalar $\mathbf{CH}_{pt}$ define a carga horária do professor p para a turma t;
- Uma matriz **DU** vincula, a cada professor, um número mínimo de aulas duplas para cada turma. Entende-se por aula dupla a realização de duas sessões de aulas consecutivas e no mesmo dia. O escalar $\mathbf{DU}_{pt}$ define o número mínimo de aulas duplas semanais ministradas pelo professor p para a turma t ;
- A matriz **LI** vincula, a cada professor-turma, um limite máximo diário de aulas. O escalar $\mathbf{LI}_{pt}$ define o limite diário de aulas do professor p para a turma t ;
- A matriz **DI** associa, a cada conjunto professor-turma, a permissão ou não da formação de aulas disjuntas. Entende-se por aulas disjuntas a ocorrência, em um mesmo dia, para uma mesma turma, de duas ou mais aulas de um mesmo professor, separadas por pelo menos um intervalo de tempo. O escalar $\mathbf{DI}_{pt}$ tem o valor 1 (um) se o professor p pode dar aulas disjuntas à turma t, e 0 (zero) no caso contrário;
- Uma tabela de custos **C** vincula, a cada professor, o peso de suas preferências quanto à alocação de aula nos diferentes dias e horários. O escalar $\mathbf{C}_{ptdh}$ define o peso da preferência do professor p em ministrar aulas no dia d, para a turma t, no horário h.

A combinação das diferentes formas de restrições permite ao usuário adequar sua grade horária às mais diversas situações. Por exemplo, se as turmas 3A e 3B devem ter aula conjunta de laboratório nas sextas-feiras, no quinto horário, tal restrição não pode ser feita diretamente por restrição complementar do tipo P04SEX2H3A e P04SEX2H3B. Isto porque o professor P04 não pode estar fisicamente alocado a duas turmas diferentes no mesmo instante e não há como indicar ao sistema que, neste caso, o espaço físico é único. Tal situação pode ser resolvida acrescentando-se um pseudoprofessor à grade, P09, por exemplo, que, na verdade, é o mesmo professor P04. Assim, tem-se: P04SEX3H3A e P09SEX3H3B.

Para uma turma com carga horária incompleta, pode-se desejar que as "janelas" (não ocorrência de aula) ocorram nos últimos horários do período, sem se fixar o dia. Neste caso, completa-se a carga horária da turma com um pseudoprofessor, para o qual se alocará as aulas no último horário de quantos dias forem necessários, através de restrições complementares.

Para diminuir o risco de inviabilidade do problema, as preferências dos professores devem ser caracterizadas pela diferenciação de peso na tabela de custos. As restrições dos tipos: dia de coordenação, folga suplementar ou restrição complementar, esta última principalmente, só devem ser utilizadas para expressar condições realmente imprescindíveis.

As implementações efetuadas, tanto no modelo heurístico como no de programação linear inteira, trabalharam com uma matriz de custo unitária, ou seja, $\mathbf{C}_{ptdh} = 1$ para todo p, t, d e h.

4. Entrada de dados

A entrada dos dados do problema, tanto para a implementação heurística quanto para o programa gerador de matriz para programação linear inteira, foi projetada para simplificar a codificação e interpretação do usuário. Cada linha do formulário de entrada é identificada com um código, nas duas primeiras posições, segundo a natureza das informações que contém, a saber: NT para o número de turma, NP para o número de professores, ND para o número de dias do ciclo semanal e NH para o número de períodos de aulas no dia. A cada um destes códigos seguem-se os valores da matriz correspondente. O código PR e o código TU indicam que a lista seqüencial dos códigos de professores ou turmas, respectivamente, está sendo apresentada.

Para minimizar a digitação, são preestabelecidos os valores padrões: $DU_{pt} = 0$, $LI_{pt} = 1$ e $DI_{pt} = 0$, para todo p e t. Da mesma forma, $CU_{ptdh} = 1$ para todo p, t, d e h. Seqüencialmente, novas linhas são codificadas para representar mudanças nos valores predefinidos para as matrizes de carga horária, custo, limite diário de aulas, número de aulas duplas e permissão de aulas disjuntas, através dos códigos CH, CU, LI, DU e DI, respectivamente. A estes códigos, seguem-se o código do professor e, posicionalmente, os valores da matriz para cada uma das turmas definidas. Quando o professor não ministra aula a uma turma, a posição correspondente à turma, na linha da entrada de dados, é mantida em branco.

A especificação de folga básica é introduzida pelo código FB, nas duas primeiras posições da linha, seguido de um ou mais conjuntos de código do professor e da representação do dia da semana, ou seja: SEG, TER, QUA, QUI, SEX e SAB. A especificação de folga suplementar, semelhantemente à da folga básica, é iniciada pelo código FS, nas duas primeiras posições da linha, e seguido do código do professor e o do dia da semana. Quando não se que prefixar o dia da semana, a codificação do dia é preenchida com "XXX". As restrições complementares são identificadas pelo código RC no início da linha, que pode conter, seqüencialmente e separadas por um espaço, múltiplas restrições no formato já visto.

A ilustração completa desta formatação de dados para representação do problema do horário é apresentada por Mata (1987).

5. O Modelo heurístico

A presente abordagem simula a realização do trabalho executado manualmente pelo administrador escolar. Com os custos de preferências prefixados no valor unitário, o algoritmo trabalha na busca do atendimento do conjunto de restrições; pois, nesse caso, qualquer solução ótima encontrada resultará em um mesmo valor para a função objetivo.

Uma matriz de disponibilidades relaciona a cada tripla (turma, dia e horário), o número de professores habilitados à sua ocupação. Tabelas com a representação das diferentes restrições do problema são dinamicamente consultadas e atualizadas, quanto ao seu grau de atendimento, a cada alocação ou remoção de aula. Uma matriz de conflitos contabiliza, para cada professor, dia e horário, o número de alocações desfeitas. Assim, quando uma nova remoção precisa ser efetuada, busca-se desfazer as alocações onde a matriz de conflitos apresenta um menor valor. Desta forma, o sistema é orientando a contornar caminhos aparentemente inviáveis na busca de outros supostamente mais promissores.

As restrições, do ponto de vista deste modelo heurístico, são classificadas em inflexíveis e flexíveis. Considera-se como restrição flexível àquela que, quando não atendida, não gera maiores transtornos ao professor que a fez, mas, por sua vez, traz o benefício da instituição poder fazer uso imediato de uma solução não ótima, todavia, aceitável. São consideradas restrições flexíveis: número de aulas disjuntas e o limite de aulas de um mesmo professor por turma no dia, e, até mesmo, a alocação de aula simples em um dia de coordenação. As folgas suplementares não são consideradas restrições flexíveis, mas sim, uma forma dinâmica de se permitir a variação de uma restrição inflexível, que é a exigência de um dia de folga.

O algoritmo da implementação heurística trabalha, numa primeira etapa, buscando uma configuração que contemple apenas as restrições inflexíveis, chamada de solução básica e, a partir desta, incorporar as demais restrições, sem flexibilizá-las, para encontrar uma solução ótima. A matriz de contabilização de conflitos permite a identificação dinâmica de situações intransponíveis e de ciclos na busca da solução básica. Nesses casos, uma nova configuração básica é pesquisada, pela variação dos dias de folgas suplementares, e o processo se repete até que uma solução básica seja atingida ou se esgote o número máximo de iterações, preestabelecido pelo usuário. Quando nenhuma solução básica é alcançada, o problema é considerado inviável e o sistema apresenta ao usuário os pontos de estrangulamento do problema proposto.

Se uma solução ótima não for obtida a partir das soluções básicas configuradas, o sistema recomeça o processo permitindo, agora, o relaxamento das restrições flexíveis para que se possa gerar soluções alternativas, ou seja, soluções que atendem a todas as restrições inflexíveis, mas que ferem alguma das restrições flexíveis.

As estratégias fundamentais desta concepção heurística são: priorizar o atendimento das demandas dos locais onde existe uma menor disponibilidades de professores e efetuar prioritariamente as atribuições dos professores que tenham maior carga horária pendente, acima de tudo, dos que pleiteiam maior número de aulas duplas. Evidentemente, na construção de uma solução ótima, qualquer alocação de aula só é concretizada se não ferir o conjunto de restrições impostas ao sistema. Além disso, sempre que necessário, procura-se desfazer a alocação de uma aula simples em detrimento da alocação ou manutenção de uma aula dupla solicitada, e, em contraposição, desfazer preferencialmente as alocações de aulas duplas quando estas são indesejáveis.

6. Simulações com o modelo heurístico

Na prática, verifica-se que existe uma série de restrições equipolentes do ponto de vista do usuário. Por exemplo, pode ser que um professor deseje um dia de folga suplementar, mas seja indiferente quanto ao dia em que ela ocorra. Dai, a fixação preliminar do dia da folga desejada pode implicar a inviabilidade de um problema que, se equacionado de outra forma, teria solução.

A necessidade do cumprimento de prazos para a instalação da tabela de horário e o risco de que a multiplicidade de restrições implique a inviabilidade do problema sugerem uma evolução gradual na introdução das mesmas. Entretanto, depois de encontrada uma solução que atenda às condições administrativas e técnicas indubitáveis, a adição de novas restrições pode ser testada gradualmente.

A estratégia de se começar com um problema excessivamente restrito, e ir relaxando de forma gradativa as restrições até atingir uma solução viável, não é a mais adequada. Se uma inconsistência ocorre no nível primário das restrições, ela poderá, muitas vezes, só ser identificada após um número exaustivo de aplicações do algoritmo.

7. Abordagem matemática

O problema do horário da escola de ensino médio é representado, a seguir, por uma formulação com base na programação linear inteira. A programação linear inteira é também apresentada por Daskalaki (2003), como uma alternativa de resolução do problema do horário nas universidades.

Considere-se a variável de decisão tetradimensional seguinte:

$$X_{ptdh} = \begin{cases} 1, \text{ Se o professor } \mathbf{p} \text{ leciona para a turma } \mathbf{t} \text{ no dia } \mathbf{d} \text{ e horário } \mathbf{h} \text{ ;} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Seja C_{ptdh} o escalar que atribui a cada professor **p**, um grau de preferência pela realização de uma aula no dia **d** e horário **h**, para uma turma **t** qualquer, sendo:

$$C_{ptdh} = \begin{cases} 1 \text{ - Horário de maior preferência para alocação de a} \\ 2 \text{ - Indiferença quanto à alocação de aula no horário;} \\ M \text{ - Horário indesejável para alocação de aulas; M suficientemente grande.} \end{cases}$$

Sejam, também, **NH** o número máximo de seções de aulas de uma turma no dia, **ND** o número de dias do ciclo, **NP** o número de professores, **NT** o número de turmas e **J** o conjunto de pares ordenados (professor, turma) para os quais não são permitidas as aulas disjuntas.

A realização de aulas duplas contínuas, expressa na forma: $X_{ptdh} * X_{ptdh+1} = 1$, com $X_{ptdh} \in \{0,1\}$, imprescindível ao equacionamento do problema, tem formulação quadrática. Assim, aplica-se uma transformação da restrição quadrática para sua forma linear, como proposta por Phillips (1987).

Sejam as variáveis binárias X_1, X_2 e X_3. Tem-se que o produto $X_1 * X_2$ será sempre 0 ou 1. Introduzindo-se uma variável binária $Y_{12} = X_1 * X_2$ tem-se que $Y_{12}=1$, se $X_1=X_2=1$, e $Y_{12}=0$ para qual quer outra combinação de valores de X_1 e X_2. Assim, a restrição $X_1*X_2 + X_3 >= W$, com X_1, X_2 e $X_3 \in \{0,1\}$, pode ser substituída pelas seguintes equações:

$X_1 + X_2 - Y_{12} <= 1$
$Y_{12} < X_1$
$Y_{12} < X_2$
$Y_{12} + X_3 >= W$
$X_1, X_2, X_3 \in \{0,1\}$
$Y_{12} >= 0$

Dessa forma, o problema da grade horária na escola brasileira de ensino médio pode ser representado pelo modelo linear seguinte:

(MLI)

$$Min(z) = \sum_{\substack{p=1,NP \\ t=1,NT \\ d=1,ND \\ h=1,NH}} C_{ptdh} * X_{ptdh} \qquad (1.0)$$

s.a

$$x_{ptdh}+x_{p'tdh}<=1 \text{ , (p=t,.,NP; } p \neq p' \text{ ; t=1,..,NT ; d=1,..,ND; h=1,..,NH);} \qquad (1.1)$$

$$x_{ptdh}+x_{pt'dh}<=1 \text{ , (p=1,.,NP; t=1,..,NT ; } t \neq t' \text{; d=t,..,ND; h=1,..,NH);} \qquad (1.2)$$

$$\sum_{d=1}^{ND}\sum_{h=1}^{NH} X_{ptdh} >= CH_{pt} \text{ , (p=1,..,NP; t=1,..,NT);} \qquad (1.3)$$

$$\sum_{h=1}^{NH} X_{ptdh} >= LI_{ptd} \text{, (p=1,..,NP; t=1,..,NT; d=1,..,ND)} \qquad (1.4)$$

$$X_{ptdh} + X_{ptdh} - Y_{ptdh} <= 1 \text{, (p=1,.,NP; t=1,..,NT ; d=1,..,ND; h=1,..,NH-1);} \qquad (1.5)$$

$$Y_{ptdh} - X_{ptdh} <= 0 \text{, (p=1,.,NP; t=1,..,NT ; d=1,..,ND; h=1,..,NH-1);} \qquad (1.6)$$

$$Y_{ptdh} - X_{ptdh+1} <= 0 \text{, (p=1,.,NP; t=1,..,NT ; d=1,..,ND; h=1,..,NH-1);} \qquad (1.7)$$

$$\sum_{h=1}^{NH-2} X_{ptdh}+X_{ptdh'}<=1 \text{, (p=1,.,NP; t=1,.,NT; d=1,..,ND; h'>h+1; h=1,..,NH-1) e } (p,t) \in B1); \qquad (1.8)$$

$$X_{ptdh} \in \{0,1\} \text{, (p=1,.,NP; t=1,..,NT; d=1,..,ND; h=1,..,NH) ;} \qquad (1.9)$$

$$Y_{ptdh} >= 0 \text{, (p=1,.,NP; t=1,..,NT; d=1,..,ND; h=1,..,NH-1) ;} \qquad (1.10)$$

onde B1 é o conjunto do pares ordenados (professor, turma) para os quais não se deseja aulas disjuntas.

A equação (1.1) garante que dois professores não darão aula a uma mesma turma em um mesmo dia e horário. A equação (1.2) garante que duas turmas não terão aulas com um mesmo professor em um mesmo dia e horário.

A equação (1.3) garante que o número de aulas semanais irá satisfazer a carga horária de cada professor, estabelecida para cada turma. A equação (1.4) impõe que seja respeitado o limite de aulas estabelecido para cada disciplina em cada turma. As equações (1.5), (1.6), (1.7) e (1.10) garantem o atendimento do número mínimo de aulas duplas desejado. A equação (1.8) impede a geração de aulas disjuntas, quando indesejáveis. A geração de aulas duplas está sujeita a condição imposta pelo limite diário de aulas estabelecido pela equação (1.4).

O modelo matemático apresentado não foi preparado para tratar, dinamicamente, o problema da existência de folgas suplementares livres, ou seja, sem dia prefixado. Na abordagem do modelo matemático proposto, a folga suplementar livre é tratada pela introdução de mais uma folga básica, a qual vai tendo o dia da semana alterado em cada uma das submissões do problema ao programa gerador de matriz e ao software de programação linear. Assim, são analisadas várias configurações do problema, com diferentes dias de alocação da folga suplementar, mas todas equipolentes do ponto de vista do usuário.

8. Análise dos resultados obtidos

Nove conjuntos de dados experimentais, todos com custos de preferência fixados no valor um, foram submetidos à implementação heurística. Os problemas nos quais a implementação heurística não obteve uma solução ótima foram submetidos a uma implementação do modelo de programação linear inteira, para análise da eficiência do algoritmo de busca heurística utilizado. Os problemas com folgas suplementares livres não foram tratados pelo modelo matemático implementado. Os resultados obtidos são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1. Dados de resolução da grade horária nas implementações pelos métodos heurístico e matemático.

Item nº	NP	NT	NRC	NFB	NFSP	NFSL	NDU	NDJ	NVB	NLM	RESULTADOS			
											Heurística		Prog. Linear	
											Soluções	CPU Minutos	Soluções	CPU Minutos
1	8	3	15	8	4	0	21	1	339	858	1 alternativa	1	Ótima	10
2	8	3	15	8	4	0	21	1	309	806	Inviável	1	Ótima	11
3	8	3	15	8	6	0	21	1	309	798	Inviável	1	Inviável	1
4	8	3	15	8	0	7	21	1	-	-	Ótima	1	Não submetida	-
5	8	3	15	8	8	0	0	8	276	275	Inviável	1	Inviável	1
6	8	3	15	8	0	8	0	8	-	-	Ótima	1	Não submetida	-
7	16	8	3	16	3	2	4	0	-	-	Ótima	1	Não submetida	-
8	16	8	3	16	5	0	0	0	1253	1011	2 alternativas	4	Ótima	231
9	45	17	124	45	3	0	0	0	2605	1896	Inviável	1	Inviável	20

Legenda:
NP – Número de professores;
NT – Número de turmas;
NCR – Número de restrições complementares;
NFB – Número de dias de folgas básicas;
NFSP – Número de folgas suplementares prefixadas;
NFSL – Número de folgas suplementares livres;
NDU – Número de aulas duplas solicitadas;
NDJ – Número de professores que permitiram aulas disjuntas;
NVB – Número de variáveis binárias geradas pelo modelo linear 0-1;
NLM – Número de linhas na matriz do modelo linear.

Os resultados dos tratamentos dos problemas apresentados nos itens 1, 2 e 8 do Quadro 1 mostram o algoritmo de busca heurística teve um baixo grau de eficiência na busca da solução ótima, quando esta existia. Todavia, conseguiu apresentar, para dois problemas, soluções alternativas aceitáveis pelo usuário.

Os resultados apresentados nos itens 3, 5 e 9 do Quadro 1, mostram que a implementação heurística teve um alto grau detecção de inviabilidade, quando esta de fato existia.

Os problemas apresentados nas linhas 4, 6 e 7 do Quadro 1, com soluções ótimas encontradas pelo modelo heurístico, não foram submetidos a verificação no modelo matemático exato por motivos óbvios.

De um modo geral, o algoritmo da implementação heurística apresentou um grau aceitável de tratamento na busca de soluções para os problemas apresentados.

Uma estratégia eficiente para o tratamento do problema, com o uso das duas implementações apresentadas, é dada pelos seguintes passos:

1. Limite as restrições do problema àquelas imprescindíveis as reais necessidades da instituição, montando uma proposição básica, deixando os custos de preferências equipolentes.
2. Transforme, o máximo possível, as restrições fixas em restrições livres.
3. Submeta a proposição básica ao método de heurístico. Se uma solução básica for encontrada, vá para o passo 7.
4. Submeta a proposição básica ao método de programação linear inteira. Se uma solução viável for encontrada, vá para o passo 7.
5. Tente elaborar uma nova configuração básica do problema, pela alteração das restrições básicas que causam o estrangulamento. Se uma nova configuração for conseguida, vá para o passo 3.
6. Problema inviável. Fim.
7. Problema viável. Acrescente restrições complementares e diferencie os custos de preferências, conforme a demanda.
8. Submeta o problema ao método de programação linear inteira.
9. Se uma solução foi encontrada, o problema está resolvido. Fim.
10. Tente modificar a configuração do problema, alterando ou relaxando as restrições complementares que causaram o estrangulamento. Se conseguir, vá para o passo 8.
11. Problema inviável. Fim

9. Extensões do Modelo Matemático Implementado

Outras exigências razoáveis, que não foram implementadas no modelo linear (MLI), mas que podem ser imprescindíveis às necessidades de alguma instituição, são discutidas a seguir:

a) Intervalo entre aulas

Algumas disciplinas podem exigir um intervalo mínimo entre as suas sessões de aula, geralmente para se considerar o tempo de realização de exercícios fora da sala de aula ou para o restabelecimento da disponibilidade de algum recurso utilizado, como limpeza da piscina, preparo de laboratório etc.

Seja $\mathbf{S^{ij}_{pt}}$ o somatório das ocorrências de aula do dia **i** até o dia **j**, pelo professor **p**, para a turma **t**. Por exemplo, para o professor P05, na turma 06, na segunda e terça-feira tem-se:
$S^{12}_{0506} = x_{050611} + x_{050612} + x_{050613} + x_{050614} + x_{050615} + x_{050621} + x_{050622} + x_{050623} + x_{050624} + x_{050625}$; Desta forma, o limite de aulas ministradas no período de **i** até **j** pode ser garantido pela restrição :

$$S^{ij}_{pt} <= LI_{pt} \tag{2.1}$$

Para cada par ordenado (professor, turma), deve-se gerar tantas restrições do tipo S quantas se fizerem necessárias, com as devidas sobreposições nos dias, de acordo com o intervalo desejado. Por exemplo, se o professor p deseja dar aulas duplas ou simples para a turma t com no mínimo dois dias de intervalo entre as aulas, considerando-se também o fim de semana. Então, as restrições do problema serão:

$$S^{13}_{pt} <= LI_{pt}\,;\; S^{24}_{pt} <= LI_{pt}\,;\; S^{35}_{pt} <= LI_{pt}$$

No entanto, se o intervalo desejado for de no mínimo um dia, então, tem-se:

$$S^{12}_{pt} <= LI_{pt}\,;\; S^{23}_{pt} <= LI_{pt}\,;\; S^{34}_{pt} <= LI_{pt}\,;\; S^{35}_{pt} <= LI_{pt}\,;$$

b) Aulas múltiplas consecutivas

Algumas atividades escolares como estágio, por exemplo, exigem a alocação contínua de mais de duas aulas consecutivas em um mesmo dia. O modelo linear (MLI). implementado restringiu-se a duas aulas consecutivas, daí, tal necessidade só pôde ser tratada pela inserção de um pseudoprofessor. Todavia, tal necessidade pode ser atendida pela extensão da transformação da restrição quadrática em linear, já apresentada, da forma seguinte:

Seja M^k_{pt} o número mínimo de **k** aulas contínuas, que se deseja alocar para o professor **p**, na turma **t**, num ciclo de **ND** dias. Então, tem-se a seguinte restrição não-linear:

$$Z = x^1_1 * x^1_2 * \ldots * x^1_k + x^1_2 * x^1_3 * \ldots * x^1_{k+1} + \ldots + x^1_m * x^1_{m+1} * \ldots * x^1_N +$$

$$x^2_1 * x^2_2 * \ldots * x^2_k + x^2_2 * x^2_3 * \ldots * x^2_{k+1} + \ldots + x^2_m * x^2_{m+1} * \ldots * x^2_N +$$

$$+ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots +$$

$$x^{ND}_1 * x^{ND}_2 * \ldots * x^{ND}_k + x^{ND}_2 * x^{ND}_3 * \ldots * x^{ND}_{k+1} + \ldots + x^{ND}_m * x^{ND}_{m+1} * \ldots * x^{ND}_N >= M^k_{pt}$$

onde, $x^d_i = \begin{cases} 1, & \text{se o evento i ocorre no dia d;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

sendo:

N = número máximo de sessões de aula por dia ;

m = número de tuplas de X com tamanho k com índices consecutivos, igual a N– k+1;

Z = soma total das tuplas de tamanho k, cujo produto é não nulo e, para cada tupla considerada, os k elementos pertençam e se refiram ao mesmo professor, a mesma turma e ao mesmo dia.

Seja, por exemplo, k=3; N=8; $M^k_{pt}=2$ e o ciclo de 5 dias. Logo, m = 8 – 3 +1 = 6, então:

$$Z = X^1_1*X^1_2*X^1_3 + X^1_2*X^1_3*X^1_4 + X^1_3*X^1_4*X^1_5 + X^1_4*X^1_5*X^1_6 + X^1_5*X^1_6*X^1_7 + X^1_6*X^1_7*X^1_8 +$$

$$X^2_1*X^2_2*X^2_3 + X^2_2*X^2_3*X^2_4 + X^2_3*X^2_4*X^2_5 + X^2_4*X^2_5*X^2_6 + X^2_5*X^2_6*X^2_7 + X^2_6*X^2_7*X^2_8 +$$

$$X^3_1*X^3_2*X^3_3 + X^3_2*X^3_3*X^2_4 + X^3_3*X^3_4*X^3_5 + X^3_4*X^3_5*X^3_6 + X^3_5*X^3_6*X^3_7 + X^3_6*X^3_7*X^3_8 +$$

$$X^4_1*X^4_2*X^4_3 + X^4_2*X^4_3*X^4_4 + X^4_3*X^4_4*X^4_5 + X^4_4*X^4_5*X^4_6 + X^4_5*X^4_6*X^4_7 + X^4_6*X^4_7*X^4_8 +$$

$$X^5_1*X^5_2*X^5_3 + X^5_2*X^5_3*X^5_4 + X^5_3*X^5_4*X^5_5 + X^5_4*X^5_5*X^5_6 + X^5_5*X^5_6*X^5_7 + X^5_6*X^5_7*X^5_8 >= 2$$

Cada termo não-linear de Z, representando o produto das k variáveis de atribuição de aulas dos horários ***i*** até ***j***, no dia ***d***, para um mesmo professor e uma mesma turma, pode ser transformado em k+1 restrições lineares, da seguinte forma:

As parcelas $X^d_1*X^d_{i+1}*\ldots*X^d_j$, com X^d_s E {0,1}, s = i,i+1,......,j se equivalem a:

$$X^d_1 + X^d_{i+1} + \ldots + X^d_j + Y^d_{ij} <= k-1$$

$$Y^d_{ij} - X^d_i <= 0$$

$$Y^d_{ij} - X^d_{i+1} <= 0$$

.

.

.

$$Y^d_{ij} - X^d_j <= 0$$

X^d_s E {0,1} s=i,i+1,.....,j

$Y_{ij} >=0$ para todo i,j

onde Yij representa o produto de k variáveis, a saber :

$Y_{ij}=X^d_1*X^d_{i+1}*\ldots*X^d_j$, onde j - i+1 = k, ou seja, $Y_{ij}= \prod_{S=1}^{j} X^d_s$ e, portanto, $Y^d_{ij} \in \{0,1\}$.

Assim, tem-se:,

$$Z = \sum_{\substack{i=1,N-k \\ j=k,N \\ d=1,ND}} Y_{ij}^{\ d} >= M_k^{pt} \qquad (2.2)$$

c) Folgas suplementares em dias não-determinados

As folgas suplementares, imprescindíveis para a maioria das instituições de ensino médio, quando prefixadas, podem levar a inviabilidade de um problema. Todavia, a flexibilização da folga suplementar, estabelecendo-se a que a mesma possa ocorrer em qualquer dia do ciclo, aumenta substancialmente as chances de que uma solução ótima seja alcançada.

Seja *ND* o número de dias do ciclo da grade horária, NFB_p o número de folgas básicas exigidas para o professor $\boldsymbol{p}$, NFS_p o número de folgas básicas exigidas para o professor $\boldsymbol{p}$, *NH* o número máximo de horas-aulas, para uma mesma turma, em um dia. Seja também a variável:

$$Y_{pd} = \begin{cases} 1, \text{ se o professor } \boldsymbol{p} \text{ ministra aula no dia } \boldsymbol{d}\text{, para qualquer turma e horário;} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Evidentemente, Y_{pd} tem que ser inserido no sistema em forma de equação e em função da variável 0-1, X_{ptdh}, que é a ocorrência ou não de uma aula do professor $\boldsymbol{p}$, no dia $\boldsymbol{d}$, para a turma $\boldsymbol{t}$, no horário $\boldsymbol{h}$, como definido no modelo (MLI), então:

$$Y_{pd} = \text{abs}(\ 1 - \text{int}\ (\ \cos\ (\ \sum_{\substack{t=1,NT \\ h=1,NH}} X_{ptdh}\ )\ )\ )\ ; \qquad (2.3)$$

Assim, a garantia da existência de uma folga suplementar para um professor $\boldsymbol{p}$ pode ser dada pela equação seguinte:

$$\sum_{d=1,ND} Y_{pd} <= ND - NFB_p - NFS_p \qquad (2.4)$$

Visto que, nas implementações computacionais apresentadas, a folga suplementar era a única restrição do problema tratada pelo modelo heurístico que não foi equacionada pelo modelo matemático (MPLI), pode-se dizer agora, que o problema da grade horária nas escolas de ensino médio pode ser totalmente resolvido apenas pela aplicação do modelo matemático estendido, sem a necessidade de várias execuções que simulavam a variação dos dias de folga, ou seja, o passo 3 da estratégia de abordagem do problema pode ser retirado pela inclusão das equações (2.3) e (2.4) no modelo matemático definido (MPLI).

d) Conflito na demanda de recursos

A idéia de conflito entre recursos físicos é pouco considerada, no contexto do problema da tabela de horário das escolas de ensino médio, devido à alocação prévia de sala a cada turma pelo administrador escolar. Todavia, duas aulas simultâneas, de professores diferentes, podem gerar conflito pela demanda conjunta de um mesmo recurso, como retroprojetor, auditório, laboratório etc.

Uma extensão do modelo linear apresentado é o acréscimo de restrições que impeçam a ocorrência simultânea de disciplinas que demandem algum recurso em comum. Por exemplo, se as aulas de biologia dadas pelo professor P01 e as aulas de química dadas pelo professor P05 demandam um único laboratório existente, então, tem-se que:

$X_{1tdh}+X_{5tdh} <= 1$; t=1,2,...,NT ; d=1,2,...,ND; h=1,1,....,NH

Dessa forma, desde que existam as condições para que as duas disciplinas coexistam sem sobreposição de horário, o problema estará resolvido pelo acréscimo, ao modelo (MPLI), da equação:

$X_{ptdh}+X_{p'tdh} <= 1$; t=1,2,...,NT ; d=1,2,...,ND; h=1,1,....,NH; (2.5)

onde, **p** e **p'** são professores que demandam, indispensavelmente, algum recurso em comum.

Geralmente, a forma mais simples de se tratar este problema é garantir dias de folga desencontrados a ambos os professores ou prefixar suas aulas por pré-alocação. Todavia, isto pode implicar na inviabilidade de um problema que, se tratado matematicamente, poderia encontrar solução.

10. Conclusões

A simplicidade da metodologia estabelecida, para o delineamento do problema da grade horária na escola de ensino médio, permite a sua fácil utilização por sistemas computacionais a partir da linguagem natural dos usuários;

Os resultados alcançados pelas implementações, heurística e matemática, de algoritmos de tratamento da questão da geração da grade horária indicam que, no contexto das escolas de ensino médio do Brasil, o problema é quase sempre solúvel, desde que se adote uma adequada estratégia de enfrentamento do mesmo.

O equacionamento matemático das extensões apresentadas para o modelo linear permite, por meio de um programa gerador de matriz, uma fácil implementação das mesmas, além da completa solução do problema analisado, sem a necessidade do uso do modelo heurístico no tratamento das folgas suplementares.

Referências Bibliográficas

Burk, E.K.; Petrovic, S. **Recent Research directions in automated Timetabling**, European Journal of Operactional Research, 140, 266-280, 2002.

Daskalaki, S.; Birbas, T.; Housos, E. (2004). **An Integer Programming Formulation for a Case Study in University Timetabling**, European Journal of Operactional Research, 153, 117-135,2004

Gans, O.B. **A Computer Timetabling System for Secundary Schools in the Netherlands**, European Journal of Operational Research, 7, 175-182, 1981.

Mata, S.S. da. **O Problema do Horário na Escola do Segundo Grau – Modelagem e Implementação.** Tese de Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1987.

Phillips, D.T.; Ravidran, A.; Solberg, J. **Operations** Research: **Principles and Practice,** ed. Jhon Wiley e Sons, New York, 181, 1987

Schmidt, G.E.; Strohlein, T. **Timetable Construction – Na annotated bibliography**, The Computer Journal, 23, 307-315, 1980.