

IDENTIFICAÇÃO DE MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL COM INTERVENÇÃO E CÁLCULO DE INDICADORES DE VIABILIDADE DA POPULAÇÃO

SELENE LOIBEL*, JOÃO BOSCO RIBEIRO DO VAL*, MARINHO G. ANDRADE†, ALFREDO RIBEIRO DE FREITAS‡

*DT / FEEC / UNICAMP

C.P. 6101 - 13.081-970 - Campinas, São Paulo, Brasil

†ICMC / SCE / USP

C.P. 668 - 13.560-970-São Carlos, São Paulo, Brasil

‡ Embrapa - Centro de Pesquisa de Pecuária

C.P. 339 - 13.560-970 - São Carlos, São Paulo, Brasil

Emails: sloibel@terra.com.br, jbosco@dt.fee.unicamp.br, marinho@icmc.usp.br, ribeiro@cppe.embrapa.br

Abstract— In this work we study the problem of modelling identification of a population discrete dynamic model with Richards rate of growth. The population is subject to interventions due to consumption such as in animals reared for produce. The identification of these models allows us to make estimates of the risk of population extinction such as the probability of extinction, or the average time to the extinction, or more generally, the probability or the average time for the population to reach a certain level. The parameter inference for this class of models can be obtained by means of the likelihood profile technique as developed in this paper. The proposed approach is applied to the data of the Brazilian cattle herd population, and the probability and average time to the population to reach a certain goal level is calculated.

Keywords— Growth Richards model, risk calculation, parametric estimate, likelihood profile function.

Resumo— Neste trabalho abordamos a identificação de modelos para sistemas dinâmicos discretos que representam o crescimento de populações com taxa de crescimento de Richards. A população é sujeita à intervenções de consumo, como na criação de animais para produção de carne. Esses modelos permitem que façamos estimativas do risco de extinção ou do tempo médio até a extinção de populações, ou mais genericamente, da probabilidade e do tempo médio da população atingir um certo nível. A inferência dos parâmetros deste modelo é obtida usando a técnica da verossimilhança profile, apresentada neste artigo. A abordagem proposta é aplicada aos dados da população do rebanho bovino brasileiro, e calcula-se a probabilidade e o tempo esperado para que o rebanho brasileiro atinja certa meta almejada.

Keywords— Modelo de crescimento de Richards, cálculo de risco, estimação paramétrica, função de verossimilhança profile.

1 Introdução

Existem diversas razões para se modelar o crescimento de uma população de certa espécie. O modelo de crescimento de uma população é um instrumento importante para se compreender como as incertezas ambientais afetam o crescimento, assim como permite estabelecer políticas de controle para o crescimento, controle de abate, etc. Além disso, estes modelos podem ser usados para prever o comportamento da população e permitir o cálculo do risco de extinção ou de explosão ou do tempo esperado para ocorrência destes eventos. Estas características populacionais são conhecidas como indicadores de viabilidade da população (Boyce, 1992), (Ludwig, 1996), (Hertzler, 1997), (Omlin and Reichechert, 1999), (Homes, 2001). Neste trabalho apresentamos a identificação e análise do modelo de crescimento da população bovina brasileira através dos indicadores citados acima.

O Brasil ocupa atualmente o segundo lugar em tamanho do rebanho bovino e na produção de

carne bovina, sendo superado somente pelos EUA (ANUALPEC, 2003). O rebanho brasileiro tem apresentado crescimento nos últimos anos, possuindo atualmente cerca de 164 milhões de cabeças de gado e aumento de 10 milhões, apenas nos últimos sete anos (ANUALPEC, 2003). O desenvolvimento da bovinocultura torna-se ainda mais atraente quando se considera o potencial sócio-econômico da cadeia produtiva da carne. O sistema agro-industrial da carne de origem animal é o de maior impacto no Produto Interno Bruto e somente o segmento denominado "boi", movimenta mais de US\$ 30 bilhões por ano (CNPC, 1995). Segundo Pineda (2000), uma meta para o Brasil aproveitar todas as suas potencialidades e se consolidar definitivamente no cenário internacional como grande produtor e exportador de carne bovina, seria a manutenção de uma população bovina estabilizada em 200 milhões de animais.

Vários fatores contribuem para o crescimento da população bovina, desde a dimensão territorial brasileira, como as condições climáticas variadas.

Esta combinação associada às tecnologias modernas de melhoramento genético animal, do manejo, entre outras, atribui um comportamento estocástico ao processo de crescimento da população bovina. Assim, é importante o uso de metodologias que possibilitem estimar com confiabilidade o crescimento da população de bovinos no país. Isto contribui para a organização do setor em termos de política de consumo interno, de exportação, marketing, entre outros.

Neste trabalho consideramos o modelo de Richards (Richards, 1959) para modelar o crescimento de uma população. Este modelo que é uma generalização dos modelo logístico e Gompertz (Ludwig, 1996) inicialmente era usado para o crescimento do animal (peso×idade) só posteriormente foi proposto em (Fitzhugh Jr., 1974) para modelar o crescimento populacional. Na maioria dos trabalhos encontrados na literatura os dois casos particulares são mais utilizados devido às dificuldades de se fazer inferência dos parâmetros do modelo não linear de Richards (Ludwig, 1999). O problema de identificação do modelo de Richards sem intervenção foi tratado em (Loibel et al., 2002) e uma análise mais precisa da inferência dos parâmetros do modelo sem intervenção foi feita em (Loibel et al., 2003) usando técnicas de *bootstrap*. Neste trabalho, o modelo original de Richards foi modificado de forma a considerar intervenções em seguida extendemos a técnica de identificação proposta em (Loibel et al., 2003), para fazer inferência dos parâmetros do modelo de Richards juntamente com inferência dos parâmetros de um modelo estocástico para a intervenção. No problema do rebanho bovino essa intervenção representa a taxa média anual de abate.

A modelagem com intervenção torna-se muito importante quando queremos identificar os parâmetros do crescimento de uma população que sofre intervenções humanas com objetivos econômicos e/ou ecológicos. Com essa abordagem, é possível fazer estimativas do risco de extinção e também do tempo médio até a extinção de populações devido a tais intervenções. Assim como no modelo de Richards sem intervenção (Loibel et al., 2002), a inferência com este modelo só é possível usando a técnica da verossimilhança profile, com a qual se estima os parâmetros do modelo, fixando-se alguns deles (os parâmetros perturbadores) (Seber and Wild, 1989). Neste trabalho a intervenção é levada em conta como uma retirada de uma parte dos animais. Nestes casos estamos interessados em estimar os parâmetros do modelo conhecendo ambas trajetórias dos processos $\{N_t, t \geq 0\}$ e $\{h_t, t \geq 0\}$ que representam respectivamente o tamanho da população e a intervenção.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na seção 2 apresentamos o modelo de

crescimento de população de Richards com intervenção. Na seção 3 apresentamos o procedimento de identificação dos parâmetros desse modelo utilizando a técnica de máxima verossimilhança profile. Na seção 4 apresentamos uma abordagem de simulação de Monte Carlo para calcular os indicadores de viabilidade da população (cálculo da probabilidade da população atingir uma meta almejada e o tempo esperado até essa meta ser atingida). Na seção 5 apresentamos os resultados dessa análise para os dados de 20 anos (1983 a 2003) da população do rebanho bovino brasileiro. Calculamos a probabilidade de que o rebanho brasileiro atinja a meta de 180 milhões de cabeças (inferior à proposta em Pineda (2000)) e o tempo esperado até que o rebanho brasileiro atinja essa meta com uma política de abate. A conclusão desse trabalho mostra a necessidade de se calcular uma política ótima de abate e a necessidade de investimentos na tecnologia que aumente a taxa de reprodução do rebanho bovino brasileiro para que seja possível atingir a meta em um intervalo de tempo desejável.

2 Modelo de Richards com Intervenção

Consideramos o tamanho da população como um processo estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, P_N)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}$, é um subconjunto não negativo dos reais, \mathcal{B} é a σ -álgebra de Borel e P_N uma medida de probabilidade associada aos elementos de \mathcal{B} . Vamos modelar as intervenções sobre essa população como um processo estocástico $\{h_t(N_t), t \geq 0\}$ tal que $h_t : \Omega \rightarrow [0, 1]$, definida no espaço de probabilidade $(S(\Omega), \mathcal{B}, P_h)$ é uma função que representa a proporção de animais “retirados” no tempo $t \in \mathbb{N}$.

Supondo que o crescimento dessa população satisfaz um modelo de Richards, então na presença de intervenções podemos escrever o modelo completo como:

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{\rho}{q}\left[1 - \left(\frac{N_t}{K}\right)^q\right]\right\} \exp\{\epsilon_t\} - h_t N_t \quad (1)$$

Onde ϵ_t é um processo estocástico não correlacionado *i.i.d.* com distribuição $N(0, \tau^{-1})$ com $\tau > 0$. Considerando que a intervenção depende da população disponível, um modelo admissível para h_t é:

$$h_t = \phi_0 + \phi_1 N_t + \omega_t \quad (2)$$

onde ω_t é *i.i.d.* com distribuição $N(0, \eta^{-1})$ com $\eta > 0$, assumindo que ϵ_t e ω_t são processos independentes, assim temos $E(\epsilon_t \omega_t) = 0$.

O modelo (1) pode ser reescrito, para facilitar a formulação do problema de identificação, como:

$$\left(\frac{N_{t+1}}{N_t} + h_t\right)^q = \exp\left\{\rho\left[1 - \left(\frac{N_t}{K}\right)^q\right] + q\epsilon_t\right\} \quad (3)$$

Para o uso do método de verossimilhança profile, fixamos o parâmetro q e denotamos $y_{h,t}^{(q)} = \ln\left(\frac{N_{t+1}}{N_t} + h_t\right)^q$, $N_t^{(q)} = N_t^q$ e $z_t = q\epsilon_t$. Então, podemos reescrever a equação (3) como uma relação linear:

$$y_{h,t}^{(q)} = \alpha_0 + \alpha_1 N_t^{(q)} + z_t \quad (4)$$

com $\alpha_0 = \rho$ e $\alpha_1 = -\rho/K^q$.

Assumindo que ϵ_t seja um processo gaussiano com média zero e variância τ^{-1} , temos que z_t tem densidade gaussiana com média zero e variância $\tau_0^{-1} = q^2\tau^{-1}$.

Com isso temos da equação (4), que a densidade de $y_{h,t}^{(q)}|N_t^{(q)}$ é gaussiana com média $\alpha_0 + \alpha_1 N_t^{(q)}$ e variância $\tau_0^{-1} = q^2\tau^{-1}$. Usamos esse resultado para formular o problema de identificação do modelo de Richards

3 Identificação do modelo de Richards com intervenção

Para formular o problema de identificação do modelo de Richards com intervenção é preciso conhecer a distribuição conjunta dos processos $\{N_{t+1}, h_t, t \geq 0\}$. Podemos iniciar o cálculo com a distribuição conjunta dos processos $\{y_{h,t}^{(q)}, h_t\}$; assim temos:

$$P(y_{h,t}^{(q)}, h_t|N_t) = P(y_{h,t}^{(q)}|N_t, h_t)P(h_t|N_t) \quad (5)$$

Para escrever a densidade conjunta para os processos originais, $P(N_{t+1}, h_t|N_t)$, devemos considerar o jacobiano da transformação $y_{h,t}^{(q)} = \ln\left(\frac{N_{t+1}}{N_t} + h_t\right)^q$, dado por:

$$J_{YN} = \left| \frac{dy_{h,t}^{(q)}}{dN_{t+1}} \right| = \frac{q}{N_{t+1} + h_t N_t} \quad (6)$$

A densidade conjunta para $\{N_{t+1}, h_t\}$ pode ser calculada, uma vez que h_t é função somente de N_t , por:

$$P(N_{t+1}, h_t|N_t) = P(y_{h,t}^{(q)}|N_t, h_t)P(h_t|N_t)J_{YN} \quad (7)$$

temos:

$$P(N_{t+1}, h_t|N_t) \propto \tau_0^{\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}(y_{h,t}^{(q)} - \alpha_0 - \alpha_1 N_t^{(q)})^2\right\} \times \frac{qP(h_t|N_t)}{N_{t+1} + h_t N_t} \quad (8)$$

Considerando o modelo (2) que estabelece a taxa de intervenção h_t como função da população disponível, temos:

$$P(h_t|N_t) \sim N(\phi_0 + \phi_1 N_t, \eta^{-1}) \quad (9)$$

$$P(h_t|N_t) \propto \eta^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\eta}{2}(h_t - \phi_0 - \phi_1 N_t)^2\right\} \quad (10)$$

Substituindo (10) em (8), temos:

$$P(N_{t+1}, h_t|N_t) \propto \frac{q \tau_0^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}}}{N_{t+1} + h_t N_t} \times \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}(y_{h,t}^{(q)} - \alpha_0 - \alpha_1 N_t^{(q)})^2 - \frac{\eta}{2}(h_t - \phi_0 - \phi_1 N_t)^2\right\} \quad (11)$$

Com a equação (11) construímos a função de verossimilhança a ser maximizada para estimar os parâmetros do modelo.

3.1 Função de verossimilhança

Usando-se a notação matricial $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_n)$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $\mathbf{D} = (\mathbf{N}, \mathbf{h})$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$, $\theta = (\alpha, \tau_0)$, $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ e $\gamma = (\phi, \eta)$, a função de verossimilhança para o modelo de Richards com intervenção estocástica é dada por:

$$L(\theta, \gamma, q|\mathbf{D}) = \prod_{t=0}^{n-1} P(N_{t+1}, h_t|N_t) \quad (12)$$

$$L(\theta, \gamma, q|\mathbf{D}) \propto q^{n-1} \tau_0^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n-1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{\tau_0}{2}(\mathbf{Y}^{(q)} - \mathbf{X}^{(q)}\alpha)'(\mathbf{Y}^{(q)} - \mathbf{X}^{(q)}\alpha)\right\} \times \exp\left\{-\frac{\eta}{2}(\mathbf{h} - \mathbf{N}\phi)'(\mathbf{h} - \mathbf{N}\phi)\right\} \quad (13)$$

Na equação (13) estamos usando a notação $\mathbf{Y}^{(q)} = [y_{h,1}^{(q)}, \dots, y_{h,n}^{(q)}]'$, $\mathbf{N}^{(q)} = [N_1^{(q)}, \dots, N_n^{(q)}]'$ e $\mathbf{X}^{(q)} = [\mathbf{1}, \mathbf{N}^{(q)}]$, aqui $\mathbf{1}$ é um vetor de uns com dimensão $n \times 1$. Devido a separabilidade de $L(\theta, \gamma, q|\mathbf{D})$ entre os parâmetros θ e ϕ , podemos escrever a função log-verossimilhança como:

$$l(\theta, \gamma, q|\mathbf{D}) = l(\theta, q|\mathbf{D}) + l(\gamma|\mathbf{D}) \quad (14)$$

onde:

$$l(\theta, q|D) = \frac{n-1}{2} \ln(\tau_0) - \frac{\tau_0}{2}(\mathbf{Y}^{(q)} - \mathbf{X}^{(q)}\alpha)'(\mathbf{Y}^{(q)} - \mathbf{X}^{(q)}\alpha) + (n-1) \ln(q) + \sum_{t=1}^{n-1} \ln\left[\frac{N_{t+1}}{N_t} + h_t\right] \quad (15)$$

e

$$l(\gamma|\mathbf{D}) = \frac{n-1}{2} \ln(\eta) - \frac{\eta}{2}(\mathbf{h} - \mathbf{N}\phi)'(\mathbf{h} - \mathbf{N}\phi) \quad (16)$$

A matriz de informação de Fisher para θ e γ , para um dado q , tem a forma:

$$\mathbf{I}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\theta\theta}^{(q)} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\gamma\gamma}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde se $\mathbf{x} \in R^p$, $\mathbf{I}_{ij}^{(q)} = -E(\partial^2 l(\mathbf{x}|\mathbf{D})/\partial x_i \partial x_j)$, $i, j = 1, \dots, p$. O fato de $\mathbf{I}^{(q)}$ ser uma matriz bloco diagonal assegura a independência entre os estimadores de θ e γ . Segue daí que podemos fazer o cálculo das estimativas separadamente.

3.2 Inferência dos parâmetros θ

Para fazer a inferência dos parâmetros $\theta = (\alpha, \tau_0)$ usamos a função de verossimilhança profile para o modelo de Richards com intervenção. Assim, calculamos os estimadores de máxima verossimilhança profile (EMVP) dos parâmetros $\theta = (\alpha, \tau_0)$, para vários valores do parâmetro $q \in [q_{\min}, q_{\max}]$. Denotamos esses estimadores por $\hat{\theta}^{(q)} = (\hat{\alpha}^{(q)}, \hat{\tau}_0^{(q)})$, e devemos encontrar o valor q^* que maximiza a função:

$$l(q|\hat{\alpha}^{(q)}, \hat{\tau}_0^{(q)}, D) = \frac{n-1}{2} \ln(\hat{\tau}_0^{(q)}) + \quad (18)$$

$$+(n-1) \ln(q) + \sum_{t=1}^{n-1} \ln\left[\frac{N_{t+1}}{N_t} + h_t\right]$$

Calcula-se os estimadores EMVP $\hat{\theta}^{(q^*)} = (\hat{\alpha}^{(q^*)}, \hat{\tau}_0^{(q^*)})$ dos parâmetros α e τ_0 maximizando a função de verossimilhança profile:

$$l(\alpha, \tau_0|q^*, \mathbf{D}) = \frac{n-1}{2} \ln(\tau_0) + \quad (19)$$

$$-\frac{\tau_0}{2} (\mathbf{Y}^{(q^*)} - \mathbf{X}^{(q^*)} \alpha)' (\mathbf{Y}^{(q^*)} - \mathbf{X}^{(q^*)} \alpha)$$

Os EMVP para os parâmetros α e τ_0 dado q^* , são dados por:

$$\hat{\alpha}^{(q^*)} = (\mathbf{X}^{(q^*)} \mathbf{X}^{(q^*)})^{-1} \mathbf{X}^{(q^*)} \mathbf{Y}^{(q^*)} \quad (20)$$

$$\hat{\tau}_0^{(q^*)} = \frac{(n-1)}{(\mathbf{Y}^{(q^*)} - \hat{\alpha}^{(q^*)} \mathbf{X}^{(q^*)})' (\mathbf{Y}^{(q^*)} - \hat{\alpha}^{(q^*)} \mathbf{X}^{(q^*)})} \quad (21)$$

A partir desse ponto, o procedimento para a obtenção dos intervalos de confiança para os estimadores de máxima verossimilhança profile é análogo ao apresentado em (Loibel et al., 2002). Os intervalos de confiança para θ podem ser calculados usando o resultado da teoria assintótica (Seber and Wild, 1989):

$$(n-1)(\theta - \hat{\theta}) \rightsquigarrow N(0, \mathbf{I}_{\theta\theta}^{-1}) \quad (22)$$

O intervalo de confiança para o estimador q^* é calculado usando o fato que $-2[l(q^*|\mathbf{D}) - l(q|\mathbf{D})]$ tem distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade (Barndorff-Nielsen and Cox, 1994).

3.3 Inferência dos parâmetros γ

Os estimadores de máxima verossimilhança para ϕ e η são calculados maximizando a função $l(\gamma|D)$ dada em (16); assim temos:

$$\hat{\phi} = (N'N)^{-1} N'h \quad (23)$$

$$\hat{\eta} = \frac{(n-1)}{(h - \hat{\phi}N)'(h - \hat{\phi}N)} \quad (24)$$

Os intervalos de confiança para θ e γ podem ser calculados usando o resultado da teoria assintótica:

$$(n-1)(\gamma - \hat{\gamma}) \rightsquigarrow N(0, I_{\gamma\gamma}^{-1}) \quad (25)$$

4 Cálculo de Indicadores de Viabilidade

Os modelos de crescimento em geral são ajustados para possibilitar o cálculo de indicadores de viabilidade de uma população, tal como a probabilidade de uma população atingir um determinado conjunto definido por $M = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \leq m_0\}$, $0 < m_0 < \infty$, ou $M = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \geq m_1\}$, $0 < m_1 < \infty$. Estes intervalos podem estar associados a um nível muito baixo indicando um estado de quase extinção, ou uma meta superior, indicando explosão demográfica ou um objetivo desejado economicamente e/ou ecologicamente.

Consideramos o modelo de crescimento da população dado pelas equações (1) e (2), lembrando que ϵ_t e ω_t são processos independentes, com ϵ_t , *i.i.d.* $N(0, \tau^{-1})$ e ω_t , *i.i.d.* $N(0, \eta^{-1})$. Com esses modelos podemos simular o comportamento da população por um longo período de tempo, gerando possíveis trajetórias para os processos $\{N_t^{(j)}, h_t^{(j)}, j = 1, \dots, J\}$, para valores de tempo a partir de $t = T_0$, para um certo instante inicial T_0 de interesse. Estimamos desta forma, o risco ou probabilidade da população atingir uma meta contando em quantas trajetórias essa meta foi atingida entre todas as J trajetórias geradas. Denotamos o tempo decorrido para atingir essa meta por T_k , com $T_k = \inf\{k > T_0 : N_k \in M | N_{T_0}\}$, e o número associado a essas ocorrências por $(\#\{T_k < \infty\})$. Assim temos a estimativa da probabilidade da população atingir a meta dada por:

$$\hat{P}(N_{T_k} \in M | N_{T_0}) = \frac{\#\{T_k < \infty | N_{T_0}\}}{J} \quad (26)$$

O tempo para a população atingir a meta é um processo aleatório $\{T_k, k \in N\}$ e seu valor esperado pode ser estimado, usando-se as trajetórias geradas, simplesmente calculando-se a média do processo $T_k^{(j)}, j = 1, 2, \dots, \#\{T_k < \infty | N_{T_0}\}$, assim temos:

$$\hat{T}_M = \frac{1}{\#\{T_k < \infty | N_{T_0}\}} \sum_{j=1}^n T_k^{(j)} \quad (27)$$

Devemos adotar um número de trajetórias J muito grande para que a lei dos grandes números possa assegurar a convergência dos estimadores (26) e (27) para os verdadeiros valores. Outra dificuldade encontrada na aplicação prática desta técnica é que, dependendo da política de intervenção adotada $\{h_t, t \geq T_0\}$, a meta pode se tornar inatingível, ou somente atingível com uma probabilidade muito baixa. Assim, é necessário estabelecer um limite para o tempo máximo de simulação, que adotamos por tempo infinito (T_∞); isto é, $\{T_k < \infty\} \equiv \{T_k < T_\infty\}$ e se na simulação do processo N_t , temos que $N_t < M$ para $t \leq T_\infty$ então consideramos que a meta não foi atingida nesta realização.

5 Estudo de caso

Em alguns estudos de populações nos quais temos poucas observações, não é possível estimar a capacidade de suporte (parâmetro K no modelo da equação (1)), simplesmente porque a população não atingiu esse nível no período observado. Quando isso ocorre, podemos obter informações sobre a capacidade de suporte da população em livros, artigos ou com especialistas da área, que muitas vezes fornecem uma boa estimativa. Fixamos então o parâmetro K nesse valor e estimamos os outros parâmetros. Este é o caso do conjunto de dados que apresentamos neste trabalho e o valor adotado foi sugerido por especialistas do Centro de Pesquisa da EMBRAPA - Pecuária Sudeste em São Carlos/SP.

Propomos neste estudo uma avaliação do crescimento da produção de carne no Brasil baseada nos dados do número efetivo de cabeças e abate anual no período de 1983 até 2002 (ANUALPEC, 2003). Os dados da população e abate referentes a este período são apresentados nos gráficos das Figuras 1 e 2 em milhões de cabeças, juntamente com os valores ajustados segundo os modelos das equações (1) e (2), respectivamente.

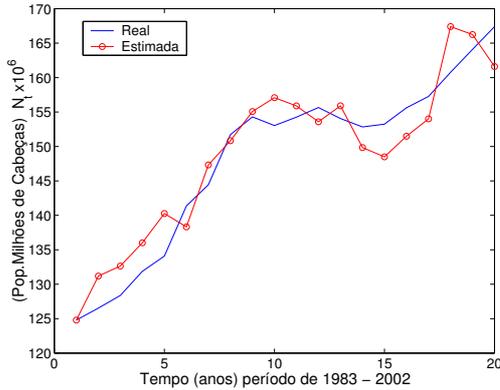


Figura 1: Rebanho bovino brasileiro em milhões de cabeça no período de 1983 a 2002.

Na Tabela 1 estão apresentadas as estimativas dos parâmetros do modelo de Richards para os dados na Figura 1, assim como as estimativas dos parâmetros da função de abate, ajustada aos dados na Figura 2. Na série de dados disponível vemos que a população certamente ainda não atingiu o valor da capacidade suporte, o que nos obriga a adotar um valor compatível com a experiência dos técnicos da EMBRAPA. O valor da capacidade suporte adotado foi $K = 400$ milhões.

Uma observação importante diz respeito à relação $\rho/q = 0,1922$ (ver Tabela 1), presente no modelo de Richards. Ela representa uma estimativa da taxa de crescimento intrínseca da população e portando, serve como indicador para a taxa de abate. Assim, uma taxa de abate muito su-

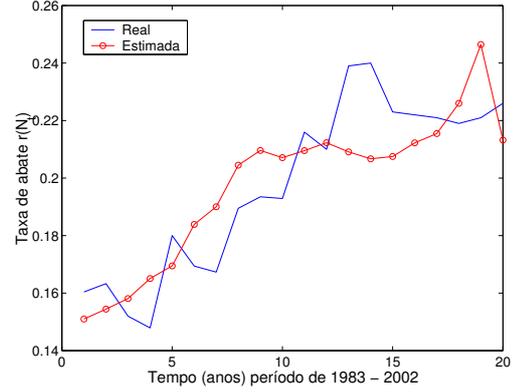


Figura 2: Figura 2 Abate do rebanho bovino brasileiro no período de 1983 a 2002.

Tabela 1: Estimativas dos parâmetros dos modelos com $K = 400 \times 10^6$.

τ	2118,8	ϕ_1	-0,0969
q	35,9	ϕ_2	0,0020
ρ	6,9	η	4124,9

perior a este valor certamente impedirá o crescimento da população. O gráfico da Figura 3 apresenta algumas das 100 mil simulações de trajetórias do processo que foram geradas para calcular a probabilidade da população atingir a meta de 180 milhões de cabeças.

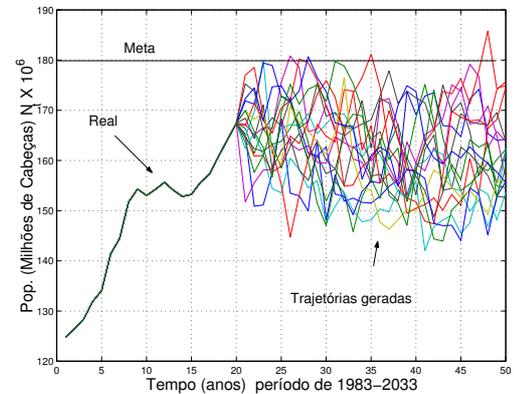


Figura 3: Simulação das Trajetórias de N_t para 30 anos a frente.

Na Tabela 2 apresentamos a probabilidade (risco) e o tempo esperado para que esse evento ocorra considerando cenários onde a taxa de abate $h(N_t)$, ajustada aos dados da Figura 2, é multiplicada por um fator de redução (Fr) que varia de 80% até 100%.

Considerando as 100 mil trajetórias simuladas para $h(N_t)$ segundo a equação (2), a taxa de abate média é estimada em 0,20. As estimativas apresentadas na Tabela 2 mostram que ao considerar uma taxa de abate média superior a 0,20 (ou seja 100% de $h(N_t)$) a probabilidade da população

Tabela 2: Estimativas dos indicadores por simulação de Monte Carlo para vários cenários

Cenários	Fr	Prob.	Tempo
1	80	0,9310	7,0880
2	82	0,8420	8,7260
3	84	0,6860	11,8550
4	86	0,5080	17,1800
5	88	0,3110	27,9040
6	90	0,1980	41,3030
7	92	0,1150	56,2920
8	94	0,0520	68,4940
9	96	0,0230	75,7900
10	98	0,0110	77,8190
11	100	0,0050	79,0050

atingir a meta estabelecida diminui, enquanto que considerando uma taxa inferior ($Fr < 100\%$) possibilitamos o crescimento da população e, conseqüentemente, o crescimento da produção de carne bovina para atender a demanda.

6 Conclusões

Neste trabalho procedemos o ajuste do modelo de crescimento de Richards para a população de gado para abate do Brasil levando em conta as perdas populacionais devido as intervenções (abate). Usando o modelo ajustado e simulações de Monte Carlo estimamos a probabilidade da população atingir um certo nível desejado e o tempo médio para essa ocorrência. Considerando a intervenção estocástica, simulamos 11 cenários variando o fator de redução Fr e concluímos que a meta será atingida entre 7 e 17 anos (cenários de 1 a 4).

A análise mostra que uma taxa de abate superior a 20% pode dificultar o crescimento da população, e no futuro levar a uma diminuição da produção de carne bovina brasileira. Portanto para atingir uma meta mais elevada, como 200 milhões de cabeças em um período inferior a 20 anos, torna-se fundamental uma política ótima de abate de forma a se maximizar um certo retorno esperado em um horizonte finito.

Referências

- ANUALPEC (2003). *Anuário da Pecuária Brasileira*, FNP, 359p.
- Barndorff-Nielsen, O. and Cox, D. (1994). *Inference and Asymptotics*, Chapman & Hall.
- Boyce, M. (1992). Population viability analysis, *Annu. Rev. Ecol. Syst.* **23**(4): 481–506.
- Fitzhugh Jr., H. A. (1974). Analysis of growth curves and strategies for altering their shapes, *Journal of Animal Science* **42**(4): 1036–1051.

- Hertzler, G. (1997). Estimating a stochastic model of population dynamics with an application to kangaroos, *Natural Resource Modelling* **10**(4): 3003–3043.
- Homes, E. E. (2001). Estimating risk in declining populations with poor data, *PNAS* **98**(4): 5072–5077.
- Loibel, S., Val, J. and Andrade, M. (2002). Identificação de modelo de crescimento populacional de Richards, *XIV Congresso Brasileiro de Automática - CBA2002*, Vol. 1, Natal-RN, pp. 745–750.
- Loibel, S., Val, J. and Andrade, M. (2003). *Inference for the Richards Growth Model Using Box and Cox Transformation and Bootstrap Techniques*, Notas da USP-ICMC-SCE, No.75, Série Estatística, São Carlos-SP.
- Ludwig, D. (1996). Uncertainty and the assessment of extinction probabilities, *Ecological Applications* **6**(4): 1067–1076.
- Ludwig, D. (1999). Is it meaningful to estimate a probability of extinction?, *Ecology* **1**(80): 298–310.
- Omlin, M. and Reichechert, P. (1999). A comparison of techniques for the estimation of models prediction uncertainty, *Ecological Modelling* **115**(1): 45–59.
- Pineda, N. (2000). Influência do nelore na produção de carne no brasil, *Simpósio Brasileiro de Criadores de Nelore-SBCN*, Vol. 1, Uberlândia-MG, p. 1.
- Richards, J. (1959). A flexible growth function for empirical use, *Journ. Exp. Bot.* **1**(10): 290–310.
- Seber, G. and Wild, C. (1989). *Nonlinear Regression*, Wiley & Sons.