

MODELO DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA COM ALGUMAS VARIÁVEIS AUXILIARES

AUGUSTO RAMALHO DE MORAIS

Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. VIVALDO FRANCISCO DA CRUZ

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia - Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro, 1982

Ao meu pai Cipriano "in memoriam",

À minha mãe Maria Aparecida,

que tantos sacrifícios dedicaram à minha
formação, fazendo de suas vidas um exemplo
para a minha.

Aos meus avós Joaquim, Adalgiza, Manoel "in memoriam" e Umbelina,
que plantaram na terra,

DEDICO.

"Através do conhecimento e do Amor
até a perfeição iremos chegar". (Ronaldo)

"A maior recompensa é a consciência
tranquila do dever cumprido" (Alexandre)

Ao meu irmão, cunhada, sobrinha,
aos meus tios, amigos
e à minha noiva,

OFEREÇO.

AGRADECIMENTOS

À vida.

À EMBRAPA - EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA,
pelo suporte financeiro e colaboração no nosso desempenho profissional.

À ESALQ - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", que possibilitou a realização do curso.

Ao Corpo Docente do Departamento de Matemática e Estatística, da ESALQ, pelos ensinamentos ministrados durante o curso de pós-graduação.

Ao Professor Dr. Vivaldo Francisco da Cruz pela orientação e amizade.

Ao CNPMS - Centro Nacional de Pesquisa de Milho e Sorgo que nos acolheu.

Aos colegas que de várias formas me incentivaram e apoiaram.

A todos que, mesmo sem eu o saber, auxiliaram para a realização do curso de Mestrado.

Í N D I C E

	Página
LISTA DE TABELAS.....	v
LISTA DE APÊNDICE.....	vii
RESUMO.....	ix
SUMMARY.....	xii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	3
2.1. Análise de covariância.....	3
2.2. Ajustamento de superfícies de resposta.....	9
3. MATERIAL E MÉTODO.....	24
3.1. Material.....	24
3.2. Método.....	25
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	60
4.1. Modelo sem as variáveis auxiliares adicionais.....	60
4.2. Modelo com as variáveis auxiliares adicionais.....	65
5. CONCLUSÕES.....	77
6. LITERATURA CITADA.....	80
7. APÊNDICE.....	89

LISTA DE TABELAS

Tabela		Página
1	Esquema de análise da variância.....	39
2	Esquema de análise da variância para os efeitos de tratamento ajustados de acordo com a regressão linear, com suas respectivas esperanças matemáticas de quadrados médios.....	52
3	Matriz de dispersão dos efeitos de tratamentos ajustados pela regressão linear, caso de uma variável auxiliar.....	55
4	Estimativas dos parâmetros, desvios padrões e valores de t da variável dependente produção, relativos aos exemplos considerados.....	62
5	Análise da variância relativa aos dados de produção para os exemplos considerados.....	64
6	Valores de quadrados médios e teste F para produção e produção ajustada pelas variáveis auxiliares: altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios, exemplo 1.....	67

Tabela		Página
7	Valores de quadrados médios e teste F para produção e produção ajustada pelas variáveis auxiliares: altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios, exemplo 2.....	68
8	Valores de quadrados médios e teste F para produção e produção ajustada pelas variáveis auxiliares: altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios, exemplo 3.....	69
9	Estimativas ajustadas dos parâmetros, desvios padrões, e valores de t, no exemplo 1.....	71
10	Estimativas ajustadas dos parâmetros, desvios padrões e valores de t, no exemplo 2.....	72
11	Estimativas ajustadas dos parâmetros, desvios padrões e valores de t, no exemplo 3.....	73
12	Estimativas das variâncias das estimativas ajustadas dos parâmetros.....	75

LISTA DE APÊNDICE

Apêndice		Página
1	Valores observados, relativos às variáveis auxiliares nos exemplos considerados.....	90
2	Matriz de dispersão das estimativas dos parâmetros ajustadas pelas três variáveis auxiliares, no exemplo 1.....	91
3	Matriz de dispersão das estimativas dos parâmetros ajustadas pelas três variáveis auxiliares, no exemplo 2.....	92
4	Matriz de dispersão das estimativas dos parâmetros ajustadas pelas três variáveis auxiliares, no exemplo 3.....	93
5	Matrizes de dispersão das estimativas dos coeficientes de regressão, nos exemplos em questão...	94
6	Representação gráfica das produções médias nos três níveis de N, P ₂ O ₅ e K ₂ O	95
7	Valores observados e estimados da produção, no exemplo 1.....	96

Apêndice	Página
8 Valores observados e estimados da produção, no exemplo 2.....	97
9 Valores observados e estimados da produção, no exemplo 3.....	98

MODELO DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA COM ALGUMAS VARIÁVEIS AUXILIARES.

AUGUSTO RAMALHO DE MORAIS

Prof. VIVALDO FRANCISCO DA CRUZ

- Orientador -

RESUMO

A procura de delineamentos que possibilitassem estudos mais eficientes de respostas à variação de fatores aplicados a determinado fenômeno, iniciou-se com R.A. Fisher e, prolonga-se pelos anos, nos vários campos de pesquisa.

Com o objetivo de se verificar a relação entre a produção e níveis de adubação, através do uso da metodologia de superfície de resposta, estudou-se um modelo de regressão polinomial quadrático, tendo-se a preocupação de considerar algumas variáveis auxiliares adicionais ao modelo, com vistas à obtenção de fórmulas que permitam avaliar o comportamento da produção ante à inclusão destas últimas.

Desenvolveu-se, usando o método dos quadrados mínimos, a seqüência de operações para a realização das análises estatísticas considerando-se o modelo adaptado a um esquema fatorial completo, para três fatores em três níveis equidistantes. São dados: o cálculo das estimativas dos parâmetros do modelo, de suas variâncias e covariâncias; a análise da

variância e os testes de hipóteses, os intervalos de confiança para os parâmetros e as respostas esperadas.

Em seguida, foi aplicada a metodologia a dados provenientes de um experimento de adubação N-P-K, em cafeeiro onde, se considerou a produção como variável dependente e, altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios como variáveis auxiliares adicionais.

As principais conclusões obtidas foram:

1. Os parâmetros (a_{ii} , $i, i' = 0, 1, 2, 3$) do modelo com uma variável auxiliar, serão estimados com maior precisão do que no modelo original (sem a variável auxiliar) quando a redução da variância residual deste, dada por $(\sigma^2 - \sigma_1^2)$, for maior do que o acréscimo $[SQa'_{ii}/R(z^2)]\sigma_1^2$, dado pela inclusão da variável auxiliar ao modelo; ou seja,

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} > 1 + \frac{SQa'_{ii}}{R(z^2)},$$

onde: SQa'_{ii} : é a soma de quadrados dos parâmetros (a'_{ii} , $i, i' = 0, 1, 2, 3$), relativa à variável auxiliar;

$R(z^2)$: é a soma de quadrados de resíduo, relativa à variável auxiliar;

σ^2 e σ_1^2 : são as variâncias residuais dos modelos sem e com a variável auxiliar, respectivamente.

2. As variáveis auxiliares que mais contribuíram para a redução da variância residual (σ^2) foram: altura da planta seguida de diâmetro da copa nos exemplos considerados.

3. As estimativas da variância dos parâmetros ($a_{ii'}$, $i, i' = 0, 1, 2, 3$), são dados pela expressão:

$$\widehat{V}(a_{ii'}) = \frac{1}{C_j} \left[1 + \frac{QMa_{ii'}}{R(z^2)} \right] \widehat{\sigma}_1^2, \quad ,$$

onde: $QMa_{ii'}$: quadrado médio do parâmetro ($a_{ii'}$) relativo à variável auxiliar;

C_j : coeficiente dos termos quadráticos, lineares e interações, respectivamente 6, 18 e 12.

$\widehat{\sigma}_1^2$: estimativa da variância residual.

RESPONSE SURFACE MODEL WITH SOME AUXILIARY VARIABLES

*Augusto Ramalho de Moraes**-Author-**Vivaldo Francisco da Cruz**-Adviser-*

SUMMARY

The development of designs that provide more efficient approach studies to investigate response by variation of other factors was initiated by R.A. Fisher in agronomy, and extended to other research areas.

In order to study the relationships between yield and fertilization levels, the response surface methodology was applied to a type of quadratic polynomial regression model, with orthogonal polynomials of first and second degree, considering some auxiliary variables for the obtention of formulae for the evaluation of their effect in the model.

The least square procedure used in order to statistical analysis according to a model adaptate to factorial design, for three factors at three equally spaced levels. The estimates of parameters in the model, their variances and covariances, the analysis

of variance and the tests of hypothesis, the confidence intervals for parameters and expected values are given.

The methodology was applied on N, P₂O₅, and K₂O experiment with coffee-tree fertilization, where dependent variable is yield and auxiliary variables are plant height, treetop diameter and internode number.

The principal conclusions obtained were:

1. The parameters ($a_{ii'}$, $i, i' = 0, 1, 2, 3$) of the model with one auxiliary variable will be estimated with greater precision than those in the original model when the reduction of the residual variance, given by $(\sigma^2 - \sigma_1^2)$, were greater than the quantity $|SQa'_{ii'}/R(z^2)|\hat{\sigma}_1^2$ due to the inclusion of the auxiliary variable in the model; that is, when

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} > 1 + \frac{SQa'_{ii'}}{R(z^2)}$$

where:

$SQa'_{ii'}$: sum of squares of parameters ($a'_{ii'}$, $i, i' = 0, 1, 2, 3$), relative the auxiliary variable;

$R(z^2)$: sum of squares of residual, relative the auxiliary variable;

σ^2 e σ_1^2 : residual variances of the models without and with auxiliary variable.

2. The additional auxiliary variables that contributed to decrease the reduction in residual variance were: treetop, diameter and height plant.
3. The expression of the estimated parameters variance are:

$$\hat{V}(a_{ii'}) = \frac{1}{C_j} \left| 1 + \frac{QMa'_{ii'}}{R(z^2)} \right| \hat{\sigma}_1^2,$$

where: $QMa_{ii}^!$, : mean square of parameters ($a_{ii}^!$), relative the auxiliary variable;

C_j : quadratic, linear and interaction terms coefficient 6, 18, and 12, respectively.

$\bar{\sigma}_1^2$: residual variance estimative.

1. INTRODUÇÃO

A metodologia de superfície de resposta é essencialmente um conjunto de técnicas estatísticas usada em pesquisas com a finalidade de determinar as melhores condições, e também, dar maior conhecimento sobre a natureza de certos fenômenos. É composta por planejamento e análise de experimentos, que procura relacionar respostas com níveis de fatores quantitativos.

Sua aplicação deu-se inicialmente na indústria química. No campo agrônomo, o uso se concentrou no estudo do rendimento de culturas como efeito de níveis de fertilizantes aplicados ao solo; posteriormente incluem-se outros fatores como densidade de plantio, controle de doenças, etc.

Com o crescente aumento do uso de fertilizantes, pesquisadores e economistas têm-se preocupado em buscar solução racional de utilização destes pelos agricultores. Pesquisa-se, também, quais os modos mais eficientes para planejar a procura dessas soluções a partir de deli-

neamentos experimentais que utilizem todas as combinações dos fatores em estudo ou parte delas.

Desenvolveu-se, no presente trabalho, a análise de um modelo de regressão polinomial quadrático adaptado a um esquema fatorial completo, para três fatores em três níveis equidistantes, considerando-se algumas variáveis auxiliares adicionais, através da metodologia de superfície de resposta, com vistas à obtenção de fórmulas que permitam avaliar o comportamento da produção (variável dependente) diante da inclusão das variáveis auxiliares ao modelo.

É dada a seqüência de operações para a realização da análise estatística, com soluções específicas para esse delineamento.

Como exemplo, estudou-se a relação entre a produção de cafeeiro e níveis de adubação N-P-K onde, se considerou altura da planta, o diâmetro da copa e o número de internódios como variáveis auxiliares adicionais na explicação das produções observadas.

De modo específico incluiu-se nos objetivos a verificação da hipótese relativa à influência das variáveis auxiliares adicionais na variável dependente. No caso de rejeição da hipótese da não influência das variáveis, determinar quais delas devem ser consideradas em futuros experimentos desse tipo.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Apresentar-se-á nesse capítulo, primeiramente, uma revisão de trabalhos referentes ao uso da análise de covariância e, em seguida outra relacionada ao ajustamento de superfícies de resposta a dados experimentais. Isto tendo em vista que não encontrou-se, na literatura disponível, referências sobre ajuste de modelos de superfície de resposta que tratassem do modelo proposto neste trabalho.

2.1. ANÁLISE DE COVARIÂNCIA

A análise de covariância tem sido muito bem estudada, principalmente nos delineamentos experimentais inteiramente casualizados e blocos casualizados. A seguir apresenta-se algumas referências sobre a técnica e uso da análise de covariância.

A primeira ilustração do método da covariância na literatura, foi apresentada por Fisher (1932), segundo COCHRAN (1957), onde a variável auxiliar (x) constituía a produção de chá por parcela, obtida num período préliminar e a variável dependente (y) constituiu a produção de chá no final do ensaio, após aplicação dos tratamentos.

KEMPTHORNE (1952) fazendo um estudo sobre a análise da covariância, apresentou um modelo matemático com dois critérios de classificação, com uma observação por parcela e ausência de interação. Supôs a presença de um atributo (x) sujeito à variação associada a cada parcela experimental, e admitiu a seguir a ausência do efeito de tratamentos levantando a hipótese de que os efeitos de tratamentos sejam nulos e, a seguir testa o modelo matemático completo.

OSTLE (1954) apresentou um estudo teórico sobre a análise da covariância, onde abordou um modelo matemático de um experimento fatorial com dois fatores no delineamento em blocos completos casualizados, apresentando fórmulas para cálculo das somas de quadrados e de produtos, teste F para os fatores e sua interação e para variâncias das médias ajustadas. Considerou um exemplo, obtido de Wishart (1950) onde comparou o fornecimento de três rações a leitões de ambos os sexos medindo o peso inicial (x) e o ganho de peso (y).

As principais finalidades do uso da análise da covariância, segundo COCHRAN (1957), são:

- a) aumentar a precisão nos experimentos casualizados;
- b) remover os efeitos de variáveis perturbadoras;
- c) contribuir para esclarecer a natureza dos efeitos de tratamentos;

- d) ajustar regressões em classificações múltiplas;
- e) analisar dados quando algumas observações são perdidas.

O mesmo autor considerou que as pressuposições básicas requeridas para que o uso da análise de covariância seja válido, são uma extensão daquelas necessárias para uma análise da variância, que podem ser resumidas em:

- a) os efeitos dos tratamentos, dos blocos e da regressão devem ser aditivos;
- b) os erros experimentais devem ser independentes e normalmente distribuídos, com média zero e variância constante.

ZELLEN (1957) e DIAS (1981) estudando a análise de covariância intrablocos, com p variáveis auxiliares, para delineamentos em blocos incompletos equilibrados, consideraram o seguinte modelo matemático:

$$Y_{ij} = m + t_i + b_j + \sum_{w=1}^p a_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} ,$$

onde:

Y_{ij} = valor observado da variável dependente;

m = média geral;

t_i = efeito do i -ésimo tratamento;

b_j = efeito do j -ésimo bloco;

a_w = efeito do w -ésimo coeficiente de regressão linear;

$x_{ij}^{(w)}$ = valores da w -ésima variável auxiliar;

e_{ij} = erros experimentais, supostos independentes e normalmente distribuídos com média 0 e variância σ^2 .

KATTI (1965) e SEARLE (1971) estudaram a análise de covariância para qualquer tipo de delineamento, com p variáveis auxiliares, utilizando o seguinte modelo matemático:

$$Y = X\beta + Zb + E \quad ,$$

onde:

Y = vetor das n observações da variável dependente;

X = matriz de incidência correspondente ao delineamento em questão;

β = vetor dos parâmetros correspondentes aos efeitos envolvidos no modelo proposto;

Z = matriz dos valores das p variáveis auxiliares;

b = vetor dos coeficientes de regressão;

E = vetor dos erros experimentais, onde $E \sim N(\Phi, \sigma^2 I)$.

Para obterem as soluções, os autores consideraram o modelo acima reescrito, da seguinte maneira:

$$Y = X\beta^* + (Z - X\Delta)b + E \quad ,$$

onde Δ é uma matriz escolhida tal que $X'(Z - X\Delta) = \Phi$.

SNEDECOR e COCHRAN (1967) afirmaram que quando as variáveis

veis independentes estão relacionadas linearmente com a variável dependente, o uso da análise da covariância pode conduzir a estimativas mais precisas, podendo assim obter-se comparações mais eficientes entre médias dos tratamentos; tais considerações foram também feitas por WINER (1970) e MONTGOMERY (1976).

WINER (1970) desenvolveu a análise de covariância para uma experiência fatorial pxq , com n observações por parcela, onde considerou o seguinte modelo matemático:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \beta(X_{ijk} - \bar{X}) + e_{ijk} ,$$

onde:

Y_{ijk} : são os valores observados;

μ : média geral;

α_i : com $i = 1, 2, \dots, p$, é o efeito do fator α ;

β_j : com $j = 1, 2, \dots, q$, é o efeito do fator β ;

$\alpha\beta_{ij}$: é o efeito da interação $\alpha \times \beta$;

β : é o coeficiente de regressão;

X_{ijk} : são os valores da variável auxiliar;

\bar{X} : média dos valores da variável auxiliar;

e_{ijk} : são os erros experimentais.

PIMENTEL GOMES (1978) para as análises de covariância nos delineamentos em blocos completos casualizados, com uma variável auxiliar, sugeriu, para o cálculo da soma de quadrados de tratamentos ajusta-

da para regressão, o seguinte procedimento:

$$SQT^* = R'(y^2) - \frac{[R'(xy)]^2}{R'(x^2)} - SQRES^* ,$$

onde:

$$R'(y^2) = R(y^2) + SQT(Y);$$

$$R'(x^2) = R(x^2) + SQT(X);$$

$$R'(xy) = R(xy) + SPT;$$

$R(y^2)$ e $SQT(Y)$ são as somas de quadrados de resíduo e de tratamentos, relativas à variável dependente, respectivamente;

$R(x^2)$ e $SQT(X)$ são as somas de quadrados de resíduo e de tratamentos, relativas à variável auxiliar, respectivamente;

$SQRES^*$ é a soma de quadrados do resíduo ajustada para regressão.

O mesmo autor, considerou que o procedimento de utilizar-se uma estimativa média para a variância da diferença entre duas médias de tratamentos, ajustadas para regressão, só deverá ser usado quando os tratamentos não produzem efeitos significativos na variável auxiliar.

2.2. AJUSTAMENTO DE SUPERFÍCIES DE RESPOSTA

Não obstante ser desconhecida a forma matemática da função que melhor se ajuste aos dados de produção, é possível, utilizar modelos estatísticos que dela se aproximam com precisão razoável. A seguir são apresentados alguns trabalhos que mostram o uso dos modelos de superfícies de resposta.

Segundo N.A.S.-N.R.C. (1961) a primeira tentativa de se explicar a produção como uma função da fertilidade é considerada com a "lei do mínimo" proposta por Justus von Liebig, em 1855; mas segundo revisão apresentada por MEAD e PIKE (1975) surgiu com Fechner, em 1860, no campo de próbites.

Mitscherlich (1909) segundo N.A.S.-N.R.C. (1961) foi um dos primeiros a especificar que a relação funcional entre aplicações de fertilizantes e resposta na produção é curvilínea, acrescentando que o crescimento de plantas segue uma curva baseada em aumentos decrescentes. Também, W.J. Spillman, em 1923, chegou a uma função de crescimento exponencial, equivalente à de Mitscherlich, estudando resultados de experimentos de adubação em algodoeiro, na Carolina do Norte.

Nas últimas décadas, grande têm sido a contribuição da estatística por intermédio do uso dos delineamentos experimentais, nas pesquisas, de um modo geral. Segundo Abeywardena (1966), citado por DÁVILA e BENITES (1979), ANDRADE (1977) e ARNOLD *et alii* (1979), a utilização de modelos matemáticos para expressar a resposta de nutrientes, sob a forma de superfície, teve um grande progresso a partir da década de cinquenta, após a publicação dos artigos de Box e Wilson (1951) e de Box e

Hunter (1957).

BOX e WILSON (1951) estudaram delineamentos com a finalidade de determinar o ponto de resposta máxima, em ensaios com diferentes níveis de k fatores, usando o menor número possível de observações. Discutiram o comportamento de alguns delineamentos experimentais propostos, denominados "Planejamentos Compostos", que a princípio foram utilizados na indústria química e, atualmente são usados em outros campos de pesquisa, dos quais destaca-se a agricultura. A suposição predominante neste artigo, é que a resposta pode ser aproximada, em uma região de interesse, por um polinômio, nos níveis dos vários fatores ou variáveis envolvidas.

BOX e HUNTER (1957) desenvolveram os delineamentos rotacionais para k fatores, considerando a propriedade de que é constante a variância da resposta estimada em pontos equidistantes do centro. Propuseram os seguintes requisitos para um delineamento de superfície de resposta:

- deve permitir o ajustamento de um polinômio que se considera adequado, para representar a função verdadeira, tanto quanto possível, dentro da região de interesse;
- deve permitir a verificação da adequada representatividade do polinômio;
- não deve conter um excessivo número de pontos experimentais;
- deve permitir a disposição em blocos;
- deve possibilitar a extensão a um polinômio de grau mais elevado.

HADER *et alii* (1957) apresentaram um estudo de delineamentos e métodos estatísticos para caracterizar a superfície de resposta,

onde consideraram um ensaio de produção de alface afetada por três micronutrientes: cobre, molibdênio e ferro, em cinco concentrações diferentes, em delineamento rotativo de segunda ordem. A análise da variância mostrou efeito altamente significativo para os componentes lineares e quadráticos; entretanto, os parâmetros apresentaram erros padrões relativamente grandes.

COCHRAN e COX (1957) consideraram que o método mais informativo para analisar os resultados de um experimento fatorial depende da natureza dos fatores. Se todos estes, representam variáveis quantitativas, o método mais informativo de análise consiste em relacionar as respostas como função dessas variáveis.

Box e Draper (1959), citados por MEAD e PIKE (1975) discutiram várias razões na escolha de um delineamento para estudar a superfície de resposta. As razões incluem simples interesse na superfície, estimação eficiente dos parâmetros do modelo e possível discriminação entre diferentes modelos e, consideraram ainda, que diferentes delineamentos poderiam ser usados para diferentes objetivos.

HEADY *et alii* (1961) ajustaram quatro funções de produção aos dados de três ensaios de adubação: a) N e P em milho; b) P e K em trevo vermelho e c) P e K em alfafa,

Os autores verificaram que a função de raiz quadrada representou melhor os dados, pois a ela correspondeu o menor desvio de re-

gressão e o maior coeficiente de determinação, para os três ensaios.

CAMPOS (1967) estudou a regressão polinomial quadrática ajustada aos dados de ensaios fatoriais 3^3 , de adubação NPK, na cultura do milho, usando o seguinte modelo matemático:

$$Y = a_0 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + e$$

onde:

x_1, x_2, x_3 representam as doses codificadas de N, P_2O_5 e K_2O , respectivamente;

$a_0, a_{11}, \dots, a_{34}$ são os parâmetros;

Y a produção e, e os erros experimentais.

O autor apresentou, sob o ponto de vista teórico, a determinação das estimativas dos parâmetros e de seus respectivos intervalos de confiança, os níveis ótimos de N, P_2O_5 e K_2O , as estimativas e os intervalos de confiança das produções. Mostrou também, os cortes da superfície quando dois nutrientes são fixados nas doses padrões.

Seguindo ao estudo teórico, foi aplicado o método a 50 ensaios de adubação em milho, estudados isoladamente e reunidos em diversos grupos.

Algumas das principais conclusões obtidas pelo autor foram as seguintes:

- a) Os parâmetros da equação da superfície de resposta apresentaram intervalos de confiança muito amplos, e conseqüentemente uma imprecisão nas

estimativas dos rendimentos.

- b) Há maior evidência de aparecimento de ponto de máximo, à medida que se agrupam os ensaios.
- c) Não houve concordância dos resultados obtidos para as doses econômicas aconselháveis, nos diversos casos estudados, não permitindo assim reco
mendações de fórmulas de adubação.
- d) Os resultados obtidos através de cortes de superfície, foram concordan
tes com os obtidos no seu estudo completo.
- e) A aplicação da regressão polinomial aos ensaios fatoriais 3^3 de aduba-
ção foi recomendada apenas para grupos de ensaios e de boa precisão.

Segundo ESCOBAR e CADY (1967) muitos delineamentos para o estudo das superfícies de resposta têm sido propostos, apresentando algumas vantagens relativas de uns sobre os outros, mas parece não existir um critério único, definido como índice de eficiência de um delineamento sobre outro, pois o conjunto de fatores envolvidos em um experimento de a
dubação é vasto e complexo, incluindo, variações de solo, de cultura e de clima (Heady, 1956, citado por VIEIRA, 1970).

Na comparação entre delineamentos experimentais usados para obtenção de superfícies de resposta polinomiais de segundo grau, BOX e WILSON (1951) levaram em consideração a precisão na estimativa dos parâ
metros da função e o vício que pode surgir pela não adequação do modelo.

Os delineamentos compostos centrais podem ser compara -
dos com os fatoriais 3^k ou com quaisquer outros delineamentos que visem o ajustamento dos dados a um polinômio de segundo grau, com base na efi-
ciência (MYERS, 1971). A eficiência de um delineamento é considerada para

cada coeficiente do polinômio do segundo grau, podendo portanto, um delineamento ser mais eficiente do que outro para determinado coeficiente e ao mesmo tempo ser menos eficiente levando em consideração outro coeficiente.

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972) baseando na comparação de variâncias, demonstraram a eficiência do fatorial 3^3 sobre o delineamento composto central rotativo. A mesma metodologia tinha sido usada anteriormente por CAMPOS (1967) e, posteriormente por OLIVEIRA (1974) para comparar a precisão das estimativas dos coeficientes dos modelos do grupo fatorial 3^k relativamente ao delineamento composto central para $k = 2, 3$ e 4.

DÁVILA (1979) apresentou características e gráficos de alguns delineamentos usados em experimentos com fertilizantes. Comparou a eficiência desses delineamentos com base no maior tamanho de seu determinante $|X'X|$ e observou que os fatoriais 3^2 e 3^3 foram mais eficientes, apesar de terem somente três níveis para cada fator.

PIMENTEL GOMES (1968) considerou a necessidade da caracterização dos pontos críticos, chamando a atenção para o fato de que, a simples solução de equações, formadas com as derivadas parciais de primeira ordem da função de receita líquida, não implica, necessariamente na obtenção de máximo, sendo necessário, portanto, verificar se a matriz das derivadas parciais de segunda ordem é definida negativa. O autor mencionou a existência de vários trabalhos onde o aparecimento de pontos de mínimo e de sela não têm sido considerados e mostrou que, pelo fato dos coeficientes dos termos quadráticos serem todos negativos, não necessariamente se obtém um ponto de máximo, sendo preciso a diagonalização e poste-

rior interpretação dos elementos dessa matriz, mesmo nesse caso. Lembrou ainda, que esses pontos críticos somente terão validade se estiverem dentro da região explorada pelo ensaio experimental.

MORAES (1969) estudando a regressão polinomial quadrática ajustada para um ensaio fatorial 3^3 de adubação em milho, realizado na Venezuela, com níveis não eqüidistantes de N, P_2O_5 e K_2O , determinou as estimativas dos parâmetros, as estimativas das produções a partir da equação de regressão que foram consideradas relativamente boas e os respectivos intervalos de confiança. Foi feita a análise da variância da regressão que mostrou efeito altamente significativo, obtido o coeficiente de determinação ($r^2 = 0,949$) e estudada a função de receita líquida que possui ponto de sela. Mas, considerando somente os valores contidos dentro do intervalo estudado no experimento, o autor determinou o máximo absoluto e recomendou doses de nutrientes.

TEIXEIRA (1969) analisou economicamente, experimentos que relacionam produção de grãos com populações de planta na cultura do milho, para os municípios de Sete Lagoas e Capinópolis, no Estado de Minas Gerais, empregando o modelo de superfície de resposta em termos quadráticos, e concluiu que o efeito do nitrogênio sobre a produção foi menor que o efeito de população de plantas, em todos os ensaios usados.

VIEIRA (1970) estudou quatro funções de produção aplicadas a ensaios fatoriais 3^3 de adubação N, P e K, na cultura do milho. As principais conclusões obtidas foram:

- a) Os parâmetros das quatro funções ajustadas possuem intervalos de confiança bastante amplos. Entretanto a precisão das estimativas dos ren-

- dimentos depende da grandeza relativa das variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros. Isto explica porque, apesar da amplitude dos intervalos de confiança dos parâmetros, obteve-se estimativas razoáveis para os rendimentos.
- b) Nos casos estudados, as doses econômicas de nutrientes, apresentaram diversificação, de tal ordem, que não permitiram a recomendação de uma fórmula de adubação.
 - c) No caso de regressões polinomiais, à medida que se procede ao agrupamento dos ensaios apareceram maior número de pontos de máximos; isto se justifica pela maior precisão das médias dos tratamentos. Para a regressão assintótica o valor de c , da equação de Mitscherlich, obtido de grupos de ensaios merecem maior confiança.
 - d) Dos três modelos de regressão polinomial ajustados, dois revelaram-se praticamente iguais nos resultados: o modelo quadrático e o de grau $3/2$; o mesmo resultado obteve COSTA (1977) e indicaram o uso do modelo quadrático, pois apresenta maior facilidade de cálculos.
 - e) Dos três modelos polinomiais, o modelo de raiz quadrada apresentou maior coeficiente de determinação.
 - f) A aplicação de regressão polinomial aos ensaios fatoriais de adubação foi recomendada para grupos de ensaios, cuja análise estatística dos experimentos fatoriais mostre efeitos quadráticos significativos.
 - g) Para determinar a dose econômica de nutrientes, no caso de três níveis, recomendou o uso da lei de Mitscherlich. Mas, se existirem interações significativas de nutrientes ou queda da produção devido à adu-

bação excessiva, recomendou a regressão polinomial, preferencialmente o modelo de raiz quadrada.

CAMPOS e ARAUJO (1971) estudaram o ajuste de uma superfície de resposta, considerando o modelo quadrático com e sem as interações lineares, a dados de ensaios fatoriais de adubação NPK, na cultura do milho. Verificaram que as estimativas dos parâmetros correspondente as interações, não sendo significativas, dão suporte metodológico para o estudo das superfícies desprezando-as, fato esse evidenciado por apresentarem, ambos os modelos, coeficiente de determinação de 98%.

Observaram que, embora os intervalos de confiança dos parâmetros sejam relativamente amplos, há um estreitamento muito acentuado, no caso dos rendimentos culturais. Esse estreitamento é mais acentuado no caso do modelo sem as interações, em decorrência das fórmulas que estimam as variâncias para os dois modelos.

As pressuposições básicas, segundo MYERS (1971) para o estudo de superfície de resposta, podem ser resumidas em:

- a função existe, mas é muito complicada ou desconhecida, sendo as variáveis envolvidas quantitativas e contínuas;
- a função pode ser aproximada, dentro de uma região de interesse;
- as variáveis independentes são controladas pelo experimento e, medidas sem erro.

O autor considerou que o sucesso dos modelos de superfície de resposta dependem de que a função de produção seja aproximada através de uma regressão polinomial de baixo grau, e, que se as interações

lineares entre os nutrientes forem pouco expressivas, o modelo polinomial quadrático pode ser simplificado, conforme estudos de CAMPOS e ARAUJO (1971) e LIMA (1980).

BALAAM (1973) considerou quatro tipos básicos de delineamentos experimentais como delineamentos de superfície de resposta, que são: fatorial completo, fatorial fracionado, composto central e delineamento rotacional. Apresentou uma breve revisão sobre análise de regressão polinomial, seguida de uma caracterização dos delineamentos em questão.

VIEIRA *et alii* (1971) fizeram um estudo comparativo de três funções na interpretação econométrica de experimentos de adubação NPK, na cultura do milho. As principais conclusões obtidas pelos autores foram:

- as variâncias das estimativas dos parâmetros são amplas;
- quando a análise estatística de ensaios fatoriais não mostrar interações significativas dos nutrientes devem ser pesquisadas as regressões a uma só variável, que considerem o efeito de cada nutriente isoladamente;
- os resultados deste trabalho, bem como os obtidos por CAMPOS (1967) e VIEIRA (1970), para os mesmos dados experimentais, confirmam a observação de Heady (1956), citado por VIEIRA (1970), de que as respostas das culturas aos diferentes nutrientes não obedecem sempre a uma função de forma algébrica particular. Assim, o modelo matemático da função ajustada deve exprimir o fenômeno biológico de variação da produção com a variação da adubação.

MENEGUELLI (1976) estudando o ajustamento das funções quadrática, raiz quadrada, Mitscherlich e linear a um ensaio de adubação, na cultura do milho, com os nutrientes N e P_2O_5 , nas doses 0, 125, 250, 375 e 500 kg/ha, através da técnica de simulação para a geração de experimentos constatou que a função raiz quadrada foi a que apresentou melhores resultados, pois suas rendas líquidas forneceram menores erros médios, seguida da função quadrática.

ANDRADE (1977) apresentou um estudo sobre a metodologia de superfície de resposta, baseando em trabalhos desenvolvidos por Box e outros autores. Concluiu que para o uso do método de máxima inclinação ascendente, os tipos de planejamentos mais adequados são os Compostos Rotacionários, devido ao fato de que não se conhecendo a verdadeira função de resposta, deve-se usar um planejamento que permita verificar qual o grau mais adequado do polinômio a ser ajustado e, também, faça com que as variâncias das respostas estimadas, por pontos equidistantes do centro, sejam iguais.

COSTA (1977) fez um estudo comparativo de três modelos de regressão polinomial ajustados aos dados experimentais de 27 ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK na cultura do arroz, conduzidos no Estado de Goiás. Os modelos de regressão foram: polinomial quadrático, de grau $3/2$ e de raiz quadrada.

Considerando os ensaios individuais e os ensaios dispostos em cinco grupos, e somente os modelos quadrático e raiz quadrada, o autor concluiu que tanto os valores de F das regressões como os coeficientes de determinação, foram concordantes em ambos os modelos, em todos os casos estudados. As doses econômicas obtidas nos cortes, foram bastan-

te próximas das encontradas através das superfícies, e seus intervalos de confiança muito amplos. Em alguns casos os modelos apresentaram doses econômicas fora do intervalo estudado, dificultando a recomendação de adubação.

MONTEIRO (1978) estudou o comportamento de três funções de produção usadas em ensaios fatoriais 3^3 , de adubação NPK, na cultura do amendoim. Para os modelos polinomial quadrático, polinomial de grau $1/2$ e lei de Mitscherlich, determinou as estimativas dos parâmetros, dose econômica dos nutrientes e suas respectivas variâncias. Para os modelos polinomiais determinou as variâncias, intervalos de confiança para os parâmetros e rendimentos e ainda, fez cortes nas superfícies.

As principais conclusões obtidas pelo autor foram:

- os valores do teste F e os coeficientes de determinação, apresentaram concordância nos dois modelos polinomiais;
- as doses econômicas obtidas através dos cortes da superfície foram bastante semelhantes às obtidas pela lei de Mitscherlich;
- com o grupamento dos ensaios, houve um melhor ajuste das funções aos dados experimentais;
- recomenda-se o uso da regressão polinomial quadrática ou a lei de Mitscherlich, para grupos de ensaios de boa precisão, na determinação das doses econômicas de nutrientes, para o caso de três níveis.

MORAIS e GONTIJO (1978) estudaram o efeito da adubação NPK, na cultura do arroz, em quatro diferentes localidades do Estado de Minas Gerais, usando um fatorial 5^3 adaptável a um delineamento composto

central modificado. Determinaram para três locais as equações de superfície de resposta para diversas características como produção de grãos, altura da planta, etc. Obtiveram as equações de superfície para cada nutriente, considerando o corte das superfícies para os outros dois nutrientes em suas doses padrão (60 kg/ha), e ainda, os pontos de máximos.

SHIROSE *et alii* (1978) apresentaram uma aplicação da metodologia de superfície de resposta com a finalidade de determinar a melhor combinação de níveis de açúcar e sal, na paçoca de soja, usando o delineamento composto central rotacional. Obtiveram um coeficiente de determinação de 97,43% e, os níveis 84,96% e 0,48% de açúcar e sal, respectivamente.

SILVA (1978) estudando a interpretação econômica de ensaios de adubação na cultura do milho, no Estado de Pernambuco, através do uso da superfície de resposta em ensaios fatoriais 3^3 , obteve resultados nos quais os parâmetros das interações do modelo polinomial quadrático raramente apresentaram significância; na maioria das vezes as produções observadas situam-se dentro do intervalo de confiança dos rendimentos, principalmente quando o coeficiente de determinação é alto.

Obteve as doses economicamente aconselháveis de N, P_2O_5 e K_2O através dos cortes da superfície; considerou que a obtenção de máximos torna-se problemática quando os grupos são constituídos de poucos ensaios, e ainda, que os intervalos de confiança para doses economicamente aconselháveis quando os termos quadráticos são não significativos deram resultados absurdos.

VIEIRA (1978) considerou que as quantidades econômicas de nutrientes, recomendadas com base em ensaios de boa precisão, conduzi

dos no mesmo local e no mesmo ano agrícola, variam grandemente, sugerindo que é razoável admitir que a variância da quantidade econômica de nutriente é relativamente alta, mesmo para ensaios conduzidos em condições bastante homogêneas.

RIBOLDI (1978) estudou o ajuste dos modelos de regressão polinomiais, raiz quadrada e raiz $3/4$ utilizando o método dos polinômios ortogonais, a dados experimentais de ensaios fatoriais 3^3 incompletos, na cultura do milho, e constatou que:

- as produções médias dos tratamentos estimadas, foram concordantes com as produções médias observadas, para ambos os modelos;
- ambos os modelos podem conduzir a equações com número diferente de parâmetros;
- omitindo o tratamento testemunha obteve-se equações de regressão diferentes das obtidas quando o mesmo foi considerado;
- nos casos de extrapolações, as equações obtidas conduziram a previsões satisfatórias.

NAGAI *et alii* (1979) estudando o modelo polinomial quadrático com vistas à interpretação econômica de ensaios de adubação em algodoeiro, no Estado de São Paulo, obtiveram resultados onde o coeficiente de determinação foi de 95% para um grupo de oito ensaios, sendo significativos os coeficientes lineares para N e K_2O e quadrático para K_2O e, ainda observaram desvios padrões muito elevados.

Com os dados de um ensaio de competição de variedades de milho, adubação e densidade de plantio no município de Governador Vala

dares, no Estado de Minas Gerais, PIRES (1979) estudou economicamente os níveis ótimos dos fatores de adubação e densidade e o comportamento de dois conjuntos de variedades. Verificou que pelas equações de rendimentos, em condições semelhantes às do experimento, as variedades híbridas tendem a gerar melhores resultados que as variedades de polinização aberta e, o nível ótimo de densidade gira em torno de 60 mil plantas por hectare. Devido a não significância dos termos quadráticos nas equações estimadas não obteve-se os níveis ótimos dos nutrientes.

LIMA (1980) estudando 22 ensaios fatoriais 3^3 incompletos de adubação NPK, na cultura da mandioca, observou que apenas houve efeito linear dos nutrientes; que os níveis ótimos dos nutrientes foram bastante discrepantes de um ensaio para outro, e ainda, que os intervalos de confiança obtidos para as doses econômicas foram amplos.

ROJAS (1980) discutiu as características básicas que devem reunir os ensaios de fertilizantes, analisou os critérios desenvolvidos para a obtenção de delineamentos ótimos e apresentou recomendações para experimentos com $k = 2, 3, \dots, 8$ fatores, nos quais a função de resposta é quadrática.

NICOLELLA (1981) estudou a utilização de superfície de resposta na interpretação de ensaios de adubação NPK, conduzidos em plantações de cacau, variedade Catongo. Considerou o ajuste do modelo polinomial quadrático com e sem interações e abordou, principalmente as estimativas dos parâmetros e dos rendimentos, seus intervalos de confiança, e ainda, os níveis ótimos de nutrientes através de cortes das superfícies fixando dois dos nutrientes.

3. MATERIAL E MÉTODO

3.1. MATERIAL

O material experimental usado como exemplo de aplicação é proveniente de um ensaio de adubação mineral (NPK) e orgânica em cafeeiros (*Coffea arabica* L.) foi cedido por GUIMARÃES *et alii* (1976). O experimento foi instalado no município de Machado, MG, em Latossolo Vermelho-Escuro, fase cerrado, usando-se a variedade Catuaí CH 2077-2-5-44 a um espaçamento de 4x1 m, uma planta por cova e o delineamento experimental usado foi inteiramente casualizado em esquema fatorial 3^3 . Foi feita uma calagem em toda a área e os níveis de adubação foram: 1º ano - 0; 15 e 30 g de N, 0; 78 e 156 g de P_2O_5 e 0; 15 e 30 g de K_2O por cova. A adubação de 2º ano de 0; 30 e 60 g de N e 0; 30 e 60 g de P_2O_5 por cova. A adubação do 3º ano de 0; 60 e 120 g de N e 0; 60 e 120 g de K_2O por cova. As fontes foram sulfato de amônio e nitrocálcio alternadamente, superfosfato simples e

apatita de Araxá com 50% de cada um e, cloreto de potássio.

Foi considerada como variável resposta, a produção em gramas de café em coco por quatro plantas, e como variáveis independentes os níveis de nitrogênio (N), fósforo (P_2O_5) e potássio (K_2O), e como variáveis auxiliares: altura da planta (cm), diâmetro da copa (cm) e número de internódios, medidas na época da última adubação.

3.2. MÉTODO

Apresenta-se, nesse capítulo, o desenvolvimento da metodologia de superfície de resposta, em forma matricial, aplicada a um ensaio fatorial completo 3^3 , com níveis equidistantes.

a. MODELO MATEMÁTICO

Apresentar-se-á o método de superfície polinomial de resposta usado em ensaios de adubação N-P-K, em esquema fatorial $3 \times 3 \times 3$, com doses equidistantes, levando-se em consideração algumas variáveis auxiliares adicionais, usando o seguinte modelo matemático:

$$y = a_{00} + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{10}x_1 +$$

(a.1)

$$+ a_{20}x_2 + a_{30}x_3 + b_1z + \dots + b_t t + e ,$$

onde: x_1 : representa as doses reduzidas de nitrogênio (N);
 x_2 : representa as doses reduzidas de fósforo (P_2O_5);
 x_3 : representa as doses reduzidas de potássio (K_2O);
 b_t , com $t=1,2, \dots, t$, são os coeficientes de regressão da variável dependente sobre a t -ésima variável auxiliar;
 z_{ijk}, \dots, t_{ijk} : são os valores reduzidos assumidos pelas variáveis auxiliares.

Para facilidade de cálculos os valores das doses de N, P_2O_5 e K_2O foram codificados como sendo -1, 0, 1, através da seguinte transformação:

$$\frac{D_i - \bar{D}}{q}$$

onde: D_i : são os valores das doses de nutrientes;
 \bar{D} : média desses valores;
 q : diferença entre as doses.

Fez-se também:

$$z_{ijk} = V_{ijk} - \bar{V} \quad (i,j,k = 0,1,2) \quad ,$$

sendo:

V_{ijk} , com $i,j,k=0,1,2$, valores da primeira variável auxiliar;

\bar{V} : média desses valores;

e,

$$t_{ijk} = U_{ijk} - \bar{U}$$

sendo: U_{ijk} : valores da t -ésima variável auxiliar;

\bar{U} : média desses valores.

Pelas características desse modelo (a.1) os parâmetros correspondentes aos efeitos quadráticos puros não são independentes da média, sendo necessária nova parametrização para que se tenha tal independência (DAVIES, 1960; JORGE, 1980).

Assim, o modelo geral em que a variável x_m ($m=1,2,3$) é agora uma variável reduzida e os componentes quadráticos ficam ortogonais à média, será:

$$y = a'_{00} + a_{11} \left(x_1^2 - \frac{\sum x_1^2}{n} \right) + a_{22} \left(x_2^2 - \frac{\sum x_2^2}{n} \right) + a_{33} \left(x_3^2 - \frac{\sum x_3^2}{n} \right) + a_{12} x_1 x_2 + \quad (a.2)$$

$$+ a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{10} x_1 + a_{20} x_2 + a_{30} x_3 + b_1 z + \dots + b_t t + e ,$$

sendo: n : número de doses de cada nutriente;

y : variável aleatória dependente das variáveis $x_1, x_2, x_3, z, \dots, t$;

$a'_{00}, a_{11}, a_{22}, \dots, a_{30}, b_1, \dots, b_t$, são parâmetros a determinar;

e : erro experimental, suposto $e \sim N(0, \sigma_1^2)$.

O desenvolvimento da metodologia do modelo de superfície polinomial de resposta, linear nos parâmetros, está baseado principalmente em definições, fórmulas e conceitos extraídos de BOX e WILSON (1951), GRAYBILL (1961), MYERS (1971), CAMPOS (1967), HOFFMANN e VIEIRA (1977), JORGE (1980) e DRAPER e SMITH (1981).

Em forma matricial, o modelo apresentado (a.2), será:

$$Y = X\beta + \varepsilon ,$$

onde:

Y: vetor das observações, de dimensão (Nx1);

X: matriz dos coeficientes, de dimensão (Nx $p+t$);

β : vetor dos parâmetros, de dimensão ($p+t$ x1);

ε : vetor dos erros experimentais, de dimensão (Nx1).

Observação: Para facilidade de notação considerou-se nos modelos que

$$z_{ijk} = z, t_{ijk} = t \text{ e } y_{ijk} = y.$$

A matriz X, também chamada "matriz das variáveis independentes", fica sendo:

$$X = \begin{bmatrix}
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & z_{000} & \dots & t_{000} \\
 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & z_{010} & \dots & t_{010} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & z_{020} & \dots & t_{020} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & z_{001} & \dots & t_{001} \\
 1 & 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & z_{011} & \dots & t_{011} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & z_{021} & \dots & t_{021} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & z_{002} & \dots & t_{002} \\
 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & z_{012} & \dots & t_{012} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & z_{022} & \dots & t_{022} \\
 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & z_{100} & \dots & t_{100} \\
 1 & -2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & z_{110} & \dots & t_{110} \\
 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & z_{120} & \dots & t_{120} \\
 1 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & z_{101} & \dots & t_{101} \\
 1 & -2/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{111} & \dots & t_{111} \\
 1 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z_{121} & \dots & t_{121} \\
 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & z_{102} & \dots & t_{102} \\
 1 & -2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_{112} & \dots & t_{112} \\
 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & z_{122} & \dots & t_{122} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & z_{200} & \dots & t_{200} \\
 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & z_{210} & \dots & t_{210} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & z_{220} & \dots & t_{220} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & z_{201} & \dots & t_{201} \\
 1 & 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_{211} & \dots & t_{211} \\
 1 & 1/3 & -1/3 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & z_{221} & \dots & t_{221} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & z_{202} & \dots & t_{202} \\
 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & z_{212} & \dots & t_{212} \\
 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & z_{222} & \dots & t_{222}
 \end{bmatrix}$$

b. ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS

O sistema de equações normais obtido através do método dos quadrados mínimos, será: $X'X\beta = X'Y$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \end{bmatrix} \quad (\text{b.1})$$

onde:

Y : vetor das observações, de dimensão (Nx1);

X : matriz da forma $[X_1 \ X_2]$;

X₁: matriz dos valores assumidos por x₁, x₂ e x₃, de dimensão(Nxp);

X₂: matriz dos valores das variáveis auxiliares, de dimensão (Nxt);

β': vetor da forma $[\tau', a']$;

τ : vetor dos efeitos de parâmetros, de dimensão (px1);

a : vetor dos coeficientes de regressão, de dimensão (tx1);

ε : vetor dos erros experimentais, de dimensão (Nx1);

N : número de observações;

p : número de parâmetros do modelo polinomial, em relação à variável respostas;

t : número de variáveis auxiliares (ou coeficientes de regressão).

Representando o sistema de equações de (b.1) por

$$\begin{bmatrix} R & T_x \\ T_x' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{b.2})$$

onde:

$$R = X_1' X_1 = r \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz diagonal dos coeficientes do modelo original;

$$T_x = X_1' X_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ (z_{0..} - 2z_{1..} + z_{2..})/3 & \dots & (t_{0..} - 2t_{1..} + t_{2..})/3 \\ (z_{.0.} - 2z_{.1.} + z_{.2.})/3 & \dots & (t_{.0.} - 2t_{.1.} + t_{.2.})/3 \\ (z_{..0} - 2z_{..1} + z_{..2})/3 & \dots & (t_{..0} - 2t_{..1} + t_{..2})/3 \\ (z_{00.} + z_{22.} - z_{02.} - z_{20.}) & \dots & (t_{00.} + t_{22.} - t_{02.} - t_{20.}) \\ (z_{0.0} + z_{2.2} - z_{0.2} - z_{2.0}) & \dots & (t_{0.0} + t_{2.2} - t_{0.2} - t_{2.0}) \\ (z_{.00} + z_{.22} - z_{.02} - z_{.20}) & \dots & (t_{.00} + t_{.22} - t_{.02} - t_{.20}) \\ (z_{2..} - z_{0..}) & \dots & (t_{2..} - t_{0..}) \\ (z_{.2.} - z_{.0.}) & \dots & (t_{.2.} - t_{.0.}) \\ (z_{..2} - z_{..0}) & \dots & (t_{..2} - t_{..0}) \end{bmatrix}$$

(matriz dos totais de tratamentos relativos às variáveis auxiliares;

$$L = X_2'X_2 = \begin{bmatrix} \Sigma z^2 & \dots & \Sigma zt \\ \dots & \dots & \dots \\ \Sigma zt & \dots & \Sigma t^2 \end{bmatrix}$$

matriz das somas de quadrados e de produtos das variáveis auxiliares;

$$T = X_1'Y = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ (N_0 - 2N_1 + N_2) / 3 \\ (P_0 - 2P_1 + P_2) / 3 \\ (K_0 - 2K_1 + K_2) / 3 \\ (N_0P_0 + N_2P_2 - N_0P_2 - N_2P_0) \\ (N_0K_0 + N_2K_2 - N_0K_2 - N_2K_0) \\ (P_0K_0 + P_2K_2 - P_0K_2 - P_2K_0) \\ (N_2 - N_0) \\ (P_2 - P_0) \\ (K_2 - K_0) \end{bmatrix}$$

vetor dos totais de tratamentos da variável dependente;

$$Z = X_2'Y = \begin{bmatrix} \Sigma zy \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Sigma ty \end{bmatrix}$$

vetor das somas de produtos da variável dependente com as variáveis auxiliares;

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{00} \\ \hat{a}_{11} \\ \hat{a}_{22} \\ \hat{a}_{33} \\ \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{10} \\ \hat{a}_{20} \\ \hat{a}_{30} \end{bmatrix} \quad \text{vetor das estimativas dos efeitos de tratamentos;}$$

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \dots \\ \hat{b}_t \end{bmatrix} \quad \text{vetor das estimativas dos coeficientes de regressão linear.}$$

Observação: Quando do uso dos termos "efeitos de tratamentos" ou simplesmente "tratamentos" referem-se aos parâmetros (a_{00} , a_{11} , a_{22} , a_{12} , a_{13} , a_{23} , a_{10} , a_{20} e a_{30}).

Do sistema de equações normais (b.2), obtêm-se:

$$\begin{cases} R\hat{\tau} + T_X\hat{a} = T & (b.3) \\ T_X'\hat{\tau} + L\hat{a} = Z & (b.4) \end{cases}$$

Considerando, por hipótese, que a matriz R é não singular, de (b.3), tem-se:

$$R^{-1}R\hat{\tau} + R^{-1}T_X\hat{a} = R^{-1}T$$

logo

$$\hat{\tau} = R^{-1}T - R^{-1}T_X\hat{a} \quad (b.5)$$

que é o vetor das estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para a regressão linear.

Substituindo o valor de $\hat{\tau}$ de (b.5) em (b.4), tem-se

$$T_X'(R^{-1}T - R^{-1}T_X\hat{a}) + L\hat{a} = Z$$

$$(L - T_X'R^{-1}T_X)\hat{a} = Z - T_X'R^{-1}T$$

fazendo: $L - T_X'R^{-1}T_X = E_1$

$$Z - T_X'R^{-1}T = E_0$$

obtêm-se:

$$E_1\hat{a} = E_0$$

sendo: E_1 uma matriz não-singular, de dimensão (txt), tem-se:

$$\hat{a} = E_1^{-1}E_0 \quad (\text{b.6})$$

que é o vetor das estimativas dos coeficientes de regressão.

c. ANÁLISE DA VARIÂNCIA

c.1. Soma de quadrados de parâmetros

A soma de quadrados de parâmetros (SQP_0), é obtida por:

$$SQP_0 = \hat{\beta}'X'Y = [\hat{\tau}' \quad \hat{a}'] \begin{bmatrix} T \\ Z \end{bmatrix} = \hat{\tau}'T + \hat{a}'Z \quad (\text{c.1.1})$$

Em (b.5) tem-se que $\hat{\tau} = R^{-1}T - R^{-1}T_X\hat{a}$.

Logo, a soma de quadrados de parâmetros em (c.1.1) fica

$$\begin{aligned} SQP_0 &= (T'R^{-1} - \hat{a}'T_X'R^{-1})T + \hat{a}'Z \\ &= T'R^{-1}T + \hat{a}'(Z - T_X'R^{-1}T) \\ &= T'R^{-1}T + \hat{a}'E_0 \quad \text{com } (p+t) \text{ g.l.}, \quad (\text{c.1.2}), \end{aligned}$$

onde: $T'R^{-1}T$: soma de quadrados de parâmetros (tratamentos);

$\hat{a}'E_0$: soma de quadrados de regressão linear.

c.2. Soma de quadrados de resíduo ajustada

A soma de quadrados de resíduo ajustada para regressão [SQRES_(aj)], é obtida por:

$$\begin{aligned} \text{SQRES}_{(aj)} &= Y'Y - \text{SQP}_0 = Y'Y - T'R^{-1}T - \bar{a}'E_0 \\ &= R(y^2) - \bar{a}'E_0 \quad \text{com } (N-p-t) \text{ g.l.}, \quad (\text{c.2.1}), \end{aligned}$$

onde: $R(y^2) = Y'Y - T'R^{-1}T$.

d. SOMA DE QUADRADOS DE PARÂMETROS AJUSTADA

A soma de quadrados de parâmetros ajustada para regressão, pode ser obtida, utilizando o princípio do resíduo condicional. Considerando o modelo matemático seguinte, onde não aparecem o efeito de parâmetros (tratamentos):

$$y = a_{00} + b_1z + \dots + b_t t + e \quad (\text{d.1})$$

onde: y , a_{00} , b_1 , b_t , z , t e e possuem as mesmas especificações às do modelo em (a.2).

A forma matricial do modelo (d.1) reduzido é:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

onde: $X = [X_{11}, X_2]$, sendo X_{11} um vetor coluna de 1 (uns);

$$\beta' = [\bar{a}_{00}, a'] .$$

Utilizando o método dos quadrados mínimos, obtém-se o sistema de equações normais, seguinte: $X'X\beta = X'Y$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} X'_{11}X_{11} & X'_{11}X_2 \\ X'_2 X_{11} & X'_2 X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{00} \\ \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_{11}Y \\ X'_2 Y \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} N & \Phi \\ \Phi' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{00} \\ \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ Z \end{bmatrix} \quad (d.2)$$

onde: N : número de observações;

Φ : vetor de zeros, de dimensão (tx1);

\bar{a} : vetor dos coeficientes de regressão, de dimensão (tx1);

\bar{a}_{00} : média geral;

L e Z: são semelhantes às do modelo completo em (b.2).

Desenvolvendo (d.2), obtém-se:

$$\begin{cases} N\bar{a}_{00} + \Phi\bar{a} = \Sigma y & (d.3) \\ \Phi'\bar{a}_{00} + L\bar{a} = Z & (d.4) \end{cases}$$

ou simplesmente:

$$\begin{cases} N\bar{a}_{00} & = & \Sigma y \\ L\bar{a} & = & Z \end{cases}$$

Sendo L uma matriz não-singular, de dimensão (txt), as estimativas dos parâmetros (\hat{a}_{00} e \hat{a}) serão:

$$\hat{a}_{00} = (\Sigma y)/N \quad \text{e} \quad \bar{a} = L^{-1}Z.$$

A soma de quadrados dos parâmetros ($\hat{a}_{00}, b_1, \dots, b_t$) relativo ao modelo (d.1) reduzido (SQP₁), onde SQP₁(\hat{a}_{00}, \bar{a}), será:

$$SQP_1 = [\bar{a}_{00} \hat{a}'] \begin{bmatrix} \Sigma y \\ Z \end{bmatrix} = \bar{a}_{00} \Sigma y + \bar{a}' Z, \quad (d.5).$$

Assim, a soma de quadrados de tratamentos, [SQTRA_(aj)], ajustada para regressão linear é obtida pela diferença entre (c.1.2) e (d.5), ou seja:

$$\begin{aligned} SQTRA_{(aj)} &= SQP_0 - SQP_1 = \\ &= T'R^{-1}T + \hat{a}'E_0 - \bar{a}_{00}\Sigma y - \bar{a}'Z, \text{ com } (p-1) \text{ g.l.}, \quad (d.6) \end{aligned}$$

ou também:

$$SQTRA_{(aj)} = SQTRA + \hat{a}'E_0 - \bar{a}'Z,$$

onde: $SQTRA = T'R^{-1}T - \bar{a}_{00}\Sigma y$.

Tabela 1 - Esquema de análise da variância.

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.
$R(a_{00}, a_{11}, \dots, a_{23}, a)$	$p+t$	$T'R^{-1}T + \hat{a}'E_0$
$R(a_{00}, a)$	$t+1$	$\bar{a}_{00}\Sigma y + \bar{a}'Z$
Tratamento (aj)	$p-1$	$T'R^{-1}T + \hat{a}'E_0 - \bar{a}_{00}\Sigma y - \bar{a}'Z$
Resíduo (aj)	$N-p-t$	$Y'Y - T'R^{-1}T - \hat{a}'E_0$
Total	N	$Y'Y$

e. SOMA DE QUADRADOS DE NITROGÊNIO QUADRÁTICO AJUSTADA PARA REGRESSÃO

A soma de quadrados de nitrogênio quadrático, ajustada de acordo com a regressão linear, pode ser obtida, utilizando o método do resíduo condicional.

Considerando o modelo matemático seguinte, onde não aparece o efeito de nitrogênio quadrático:

$$y = a_{00} + a_{22}x_2 + a_{33}x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3 + b_1z + \dots + b_t t + e \quad , \quad (e.1)$$

com as mesmas especificações do modelo completo em (a.1).

Usando a forma matricial ao modelo (e.1) têm-se:

$$Y = X\beta + \varepsilon ,$$

onde: X : matriz da forma $[X_0 \ X_2]$;

X_0 : matriz formada por exclusão da coluna relativa ao efeito nitro
gênio quadrático da matriz X_1 ;

β' : vetor da forma $[\tau_0' , a_0']$;

τ_0 : vetor τ sem o efeito de nitrogênio quadrático.

Utilizando o método dos quadrados mínimos, obtém-se o sistema de equações normais, seguinte: $X'X\tilde{\beta} = X'Y$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} X_0'X_0 & X_0'X_2 \\ X_2'X_0 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tau} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0'Y \\ X_2'Y \end{bmatrix} ,$$

ou sendo representado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} R_0 & T_{x_0} \\ T_{x_0}' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tau} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ Z \end{bmatrix} , \quad (e.2)$$

onde:

$$R_0 = X_0'X_0 = r \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

matriz diagonal dos coeficientes do modelo original sem o efeito nitrogênio quadrático;

$$T_{X_0} = X_0'X_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ (z_{.0.} - 2z_{.1.} + z_{.2.})/3 & \dots & (t_{.0.} - 2t_{.1.} + t_{.2.})/3 \\ (z_{..0} - 2z_{..1} + z_{..2})/3 & \dots & (t_{..0} - 2t_{..1} + t_{..2})/3 \\ (z_{00.} + z_{22.} - z_{02.} - z_{20.}) & \dots & (t_{00.} + t_{22.} - t_{02.} - t_{20.}) \\ (z_{0.0} + z_{2.2} - z_{0.2} - z_{2.0}) & \dots & (t_{0.0} + t_{2.2} - t_{0.2} - t_{2.0}) \\ (z_{.00} + z_{.22} - z_{.02} - z_{.20}) & \dots & (t_{.00} + t_{.22} - t_{.02} - t_{.20}) \\ (z_{2..} - z_{0..}) & \dots & (t_{2..} - t_{0..}) \\ (z_{.2.} - z_{.0.}) & \dots & (t_{.2.} - t_{.0.}) \\ (z_{..2} - z_{..0}) & \dots & (t_{..2} - t_{..0}) \end{bmatrix}$$

matriz dos totais de tratamentos relativos às variáveis auxiliares, na ausência de nitrogênio quadrático;

$$L = X_2'X_2 = \begin{bmatrix} \Sigma z^2 & \dots & \Sigma zt \\ \dots & \dots & \dots \\ \Sigma zt & \dots & \Sigma t^2 \end{bmatrix}$$

matriz das somas de quadrados e de produtos das variáveis auxiliares;

$$T_0 = X_0'Y = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ (P_0 - 2P_1 + P_2)/3 \\ (K_0 - 2K_1 + K_2)/3 \\ (N_0P_0 + N_2P_2 - N_0P_2 - N_2P_0) \\ (N_0K_0 + N_2K_2 - N_0K_2 - N_2K_0) \\ (P_0K_0 + P_2K_2 - P_0K_2 - P_2K_0) \\ (N_2 - N_0) \\ (P_2 - P_0) \\ (K_2 - K_0) \end{bmatrix}$$

vetor dos totais de tratamentos, na ausência de nitrogênio quadrático;

$$Z = X_2'Y = \begin{bmatrix} \Sigma zy \\ \cdot \\ \cdot \\ \Sigma ty \end{bmatrix}$$

vetor das somas de produtos da variável dependente com as variáveis auxiliares;

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{00} \\ \tilde{a}_{22} \\ \tilde{a}_{33} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{10} \\ \tilde{a}_{20} \\ \tilde{a}_{30} \end{bmatrix}$$

vetor das estimativas dos efeitos de tratamentos,
na ausência do efeito nitrogênio quadrático;

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \dots \\ \tilde{b}_t \end{bmatrix}$$

vetor das estimativas dos coeficientes de regressão,
na ausência do efeito nitrogênio quadrático.

Do sistema de equações normais em (e.2), obtém-se:

$$\begin{cases} R_0 \tilde{\tau} + T_{x_0} \tilde{a} = T_0 & (e.3) \\ T_{x_0}' \tilde{\tau} + L \tilde{a} = Z & (e.4) \end{cases}$$

Considerando que a matriz R_0 é não-singular, de (e.3),
tem-se:

$$\tilde{\tau} = R_0^{-1} T_0 - R_0^{-1} T_{x_0}' \tilde{a} \quad (e.5)$$

que é o vetor das estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados para a
regressão linear. Substituindo o valor de $\tilde{\tau}$ em (e.4) tem-se:

$$T'_{x_0} (R_0^{-1} T_0 - R_0^{-1} T'_{x_0} \tilde{a}) + L\tilde{a} = Z$$

$$(L - T'_{x_0} R_0^{-1} T'_{x_0}) \tilde{a} = Z - T'_{x_0} R_0^{-1} T_0$$

fazendo: $L - T'_{x_0} R_0^{-1} T'_{x_0} = E_1''$

$$Z - T'_{x_0} R_0^{-1} T_0 = E_0''$$

obtêm-se:

$$E_1'' \tilde{a} = E_0''$$

sendo E_1'' uma matriz não singular, de dimensão (txt) ,

tem-se:

$$\tilde{a} = (E_1'')^{-1} E_0''$$

que é o vetor das estimativas dos coeficientes de regressão, quando está ausente o efeito de nitrogênio quadrático.

A soma de quadrados de parâmetros (SQP₂) relativo ao modelo (e.1) reduzido, será:

$$SQP_2 = SQP_2(\tilde{\tau}, \tilde{a})$$

$$SQP_2 = \tilde{\beta}' X' Y = [\tilde{\tau}' \quad \tilde{a}'] \begin{bmatrix} T_0 \\ Z \end{bmatrix} = \tilde{\tau}' T_0 + \tilde{a}' Z, \quad (e.6)$$

De (e.5), tem-se que: $\tilde{\tau} = R_0^{-1} T_0 - R_0^{-1} T'_{x_0} \tilde{a}$. Logo:

$$\begin{aligned} SQP_2 &= (T_0' R_0^{-1} - \tilde{a}' T'_{x_0} R_0^{-1}) T_0 + \tilde{a}' Z = \\ &= T_0' R_0^{-1} T_0 + \tilde{a}' (Z - T'_{x_0} R_0^{-1} T_0) \\ &= T_0' R_0^{-1} T_0 + \tilde{a}' E_0'' \quad \text{com } (p-1+t) \text{ g.l.} \quad (e.7) \end{aligned}$$

onde: $T_0'R_0^{-1}T_0$: a soma de quadrados dos parâmetros (a_{00} , a_{22} , a_{33} , a_{12} , a_{13} , a_{23} , a_{10} , a_{20} , a_{30});

$\tilde{a}'E_0''$: soma de quadrados de regressão linear corrigida para ausência de nitrogênio quadrático.

Desse modo, a soma de quadrados de nitrogênio quadrático [SQN''(aj)], ajustada de acordo com a regressão linear, é obtida pela diferença entre (c.1.2) e (e.7), ou seja:

$$\begin{aligned} \text{SQN}''(\text{aj}) &= \text{SQP}_0 - \text{SQP}_2 = \\ &= T'R^{-1}T + \tilde{a}'E_0 - T_0'R_0^{-1}T_0 - \tilde{a}'E_0'' \quad , \text{ com 1 g.l} \end{aligned}$$

Usando-se o seguinte artifício, somando e subtraindo $R(y^2)$ ao segundo membro, tem-se:

$$\text{SQN}''(\text{aj}) = [R(y^2) + T'R^{-1}T] - \tilde{a}'E_0'' - [R(y^2) - \tilde{a}'E_0] - T_0'R_0^{-1}T_0 \quad ,$$

ou

$$\text{SQN}''(\text{aj}) = R'(y^2) - \tilde{a}'E_0'' - \text{SQRES}(\text{aj}) - T_0'R_0^{-1}T_0 \quad ,$$

onde: $R'(y^2) = R(y^2) + T'R^{-1}T$

ou ainda

$$\text{SQN}''(\text{aj}) = \text{SQN}'' + \tilde{a}'E_0 - \tilde{a}'E_0'' \quad ,$$

que são as expressões da soma de quadrados de nitrogênio quadrático ajustada pela regressão linear.

Para P'' , K'' , $N'xP'$, $N'xK'$, $P'xK'$, N' , P' e K' procede-se de maneira análoga.

f. ESPERANÇA MATEMÁTICA DAS SOMAS DE QUADRADOS

f.1. Esperança matemática da soma de quadrados total

Tem-se que:

$$Y'Y = (\beta'X' + \varepsilon') (X\beta + \varepsilon) = \beta'X'X\beta + \beta'X'\varepsilon + \varepsilon'X\beta + \varepsilon'\varepsilon .$$

Aplicando a esperança matemática, e, considerando as hipóteses: os erros experimentais são independentes, as variâncias dos erros constantes e os valores das variáveis auxiliares fixos, tem-se:

$$E(Y'Y) = \beta'X'X\beta + N\sigma^2 = [\tau' \ a'] \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} [X_1 \ X_2] \begin{bmatrix} \tau \\ a \end{bmatrix} + N\sigma^2$$

Fazendo as multiplicações e substituições, obtém-se:

$$E(Y'Y) = \tau'R\tau + 2a'T_X\tau + a'La + N\sigma^2 \quad , \quad (f.1.1)$$

f.2. Esperança matemática da soma de quadrados de resíduo ajustado - SQRES(aj)

Tem-se que:

$$E[SQRES(aj)] = E(Y'Y) - E(T'R^{-1}T) - E(\hat{a}'E_0) .$$

Inicialmente, determinaremos: $E(T'R^{-1}T)$ e $E(\hat{a}'E_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Sendo, } T'R^{-1}T &= Y'X_1R^{-1}X_1'Y = (\beta'X' + \epsilon')X_1R^{-1}X_1'(X\beta + \epsilon) = \\ &= \beta'X'X_1R^{-1}X_1X\beta + \beta'X'X_1R^{-1}X_1'\epsilon + \epsilon'X_1R^{-1}X_1X\beta + \epsilon'X_1R^{-1}X_1'\epsilon. \end{aligned}$$

Aplicando a esperança matemática e considerando as hipóteses anteriores, em (f.1), tem-se:

$$E(T'R^{-1}T) = \beta'X'X_1R^{-1}X_1X\beta + \text{tr}X_1R^{-1}X_1'\sigma_1^2,$$

substituindo convenientemente e aplicando propriedades de álgebra de matrizes, virá:

$$E(T'R^{-1}T) = (\tau'X_1' + a'X_2')X_1R^{-1}X_1'(X_1\tau + X_2a) + \text{tr}I_p\sigma_1^2.$$

Desenvolvendo e simplificando, obtém-se:

$$E(T'R^{-1}T) = \tau'R\tau + 2a'T_X'\tau + a'T_X'R^{-1}T_Xa + p\sigma_1^2, \quad (\text{f.2.1}).$$

Sendo,

$$\hat{a}'E_0 = E_0'E_1^{-1}E_0 = (Z' - T'R^{-1}T_X)E_1^{-1}(Z - T_X'R^{-1}T)$$

Desenvolvendo e sabendo que $Z'E^{-1}T_X'R^{-1}T = T_X'R^{-1}T_XE^{-1}Z$, pois são matrizes de dimensão (1x1) e, uma a transposta da outra, e ainda, que R^{-1} e E_1^{-1} são matrizes simétricas, tem-se:

$$\hat{a}'E_0 = Z'E_1^{-1}Z - 2T_X'R^{-1}T_XE_1^{-1}Z + T_X'R^{-1}T_XE_1^{-1}T_X'R^{-1}T.$$

Substituindo os valores de algumas matrizes e desenvolvendo, virá:

$$\begin{aligned} \hat{a}'E_0 = & \beta'X'X_2E_1^{-1}X_2'X\beta + \beta'X'X_2E_1^{-1}X_2'\epsilon + \epsilon'X_2E_1^{-1}X_2'X\beta + \epsilon'X_2E_1^{-1}X_2'\epsilon - \\ & - 2\beta'X'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'X\beta - 2\beta'X'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'\epsilon - 2\epsilon'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'X\beta - \\ & - 2\epsilon'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'\epsilon + \beta'X'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'X\beta + \beta'X'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\epsilon + \\ & + \epsilon'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'X\beta + \epsilon'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\epsilon . \end{aligned}$$

Aplicando a esperança matemática, considerando as hipóteses em (f.1), substituindo algumas matrizes e simplificando, obtém-se:

$$E(\hat{a}'E_0) = a'E_1a + t\sigma_1^2, \quad (f.2.2)$$

Assim,

$$E[SQRES(aj)] = (f.1.1) - (f.2.1) - (f.2.2),$$

logo,

$$E[SQRES(aj)] = (N - p - t)\sigma_1^2.$$

f.3. Esperança matemática de correção - C

Tem-se que:

$(\Sigma y)^2 = W'YW'Y$, onde W é um vetor coluna de 1 (uns), de dimensão $(N \times 1)$. Desenvolvendo virá:

$$(\Sigma y)^2 = W'X\beta W'X\beta + W'X\beta W'\epsilon + W'\epsilon X\beta + W'\epsilon W'\epsilon.$$

Aplicando a esperança matemática e simplificando, tem-se:

$$E[(\Sigma y)^2] = (W'X\beta)^2 + N\sigma_1^2 .$$

Logo,

$$E(C) = \frac{E[(\Sigma y)^2]}{N} = (W'X\beta)^2/N + \sigma_1^2 , \text{ (f.3.1).}$$

f.4. Esperança matemática da soma de quadrados de nitrogênio quadrático ajustada - SQN''(aj)

Tem-se que:

$$E[SQN''(aj)] = E(T'R^{-1}T) + E(\tilde{a}'E_0) - E(T_0'R_0^{-1}T_0) - E(\tilde{a}'E_0'').$$

Inicialmente, determinaremos:

$$E(T_0'R_0^{-1}T_0) \text{ e } E(\tilde{a}'E_0'').$$

Sendo,

$$T_0'R_0^{-1}T_0 = Y'X_0R_0^{-1}X_0'Y = (\beta'X' + \varepsilon')X_0R_0^{-1}X_0'(X\beta + \varepsilon).$$

De modo análogo, ao obtido em (f.2.1), obtém-se:

$$E(T_0'R_0^{-1}T_0) = \tau_0'R_0\tau_0 + 2a_0'T_{x_0}'\tau_0 + a_0'T_{x_0}'R_0^{-1}T_{x_0}'a_0 + (p-1)\sigma_1^2 , \text{ (f.4.1).}$$

Sendo que:

$$\tilde{a}'E_0'' = (E_0'')'(E_1'')^{-1}E_0'' = (Z' - T_0'R_0^{-1}T_{x_0}') (E_1'')^{-1} (Z - T_{x_0}'R_0^{-1}T_0) .$$

De modo análogo, ao obtido em (f.2.2), obtém-se:

$$E(\tilde{a}'E_0'') = a_0'E_1''a_0 + t\sigma_1^2, \quad (f.4.2).$$

Assim,

$$E[SQN''(aj)] = (f.2.1) + (f.2.2) - (f.4.1) - (f.4.2).$$

Substituindo as expressões pelos seus valores e simplificando, obtém-se:

$$E[SQN''(aj)] = \tau'R\tau + 2a'T'_x\tau + a'T'_xR^{-1}T'_xa + a'E_1a -$$

$$-(\tau_0'R_0\tau_0 + 2a_0'T'_{x_0}\tau_0 + a_0'T'_{x_0}R_0^{-1}T'_{x_0}a_0 + a_0'E_1a_0) + \sigma_1^2.$$

Para obter-se as esperanças matemáticas das somas de quadrados ajustadas de P'' , K'' , $N'xP'$, $N'xK'$, $P'xK'$, N' , P' e K' , procede-se de maneira análoga.

f.5. Esperança matemática da soma de quadrados de tratamentos ajustada - SQTRA(aj)

Tem-se que

$$E[SQTRA(aj)] = E(T'R^{-1}T) + E(\tilde{a}'E_0'') - E(C) - E(\bar{a}'Z).$$

Inicialmente, determinaremos $E(\bar{a}'Z)$.

Sendo,

$$\bar{a}'Z = Z'L^{-1}Z = Y'X_2L^{-1}X_2'Y = (\beta'X' + \epsilon')X_2L^{-1}X_2'(X\beta + \epsilon).$$

Desenvolvendo e aplicando a esperança matemática, virá:

$$E(\bar{a}'Z) = \beta'X'X_2L^{-1}X_2'X\beta + \text{tr}X_2L^{-1}X_2'\sigma_1^2.$$

Substituindo algumas matrizes e simplificando, obtém-se:

$$E(a^{-1}Z) = \tau' T_X L^{-1} T_X' \tau + 2a' T_X' \tau + a' L a + t\sigma_1^2, \quad (\text{f.5.1})$$

Assim,

$$E[\text{SQTRA}(aj)] = (\text{f.2.1}) + (\text{f.2.2}) - (\text{f.3.1}) - (\text{f.5.1})$$

Substituindo as expressões pelos seus valores e simplificando, obtêm-se:

$$E[\text{SQTRA}(aj)] = \tau' C \tau - (W' X \beta)^2 / N + (p-1)\sigma_1^2, \quad (\text{f.5.1})$$

g. ESPERANÇA MATEMÁTICA DOS QUADRADOS MÉDIOS AJUSTADOS

A esperança matemática dos quadrados médios ajustados é obtida tomando-se como divisor das somas de quadrados de cada fonte de variação, o índice da variância residual ajustada (σ_1^2), e são mostradas na Tabela 2.

Tabela 2 - Esquema de análise da variância para os efeitos de tratamentos ajustados de acordo com a regressão linear, com suas respectivas esperanças matemáticas de quadrados médios.

Fontes de Variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
(Tratamento)	(p-1)	V_{10}	$\sigma_1^2 + [\tau' C \tau - (W' X \beta)^2 / N] / (p-1)$
Nitrog. Quad. (aj)	1	V_0	$\sigma_1^2 + K_0$
Fós. Quad. (aj)	1	V_1	$\sigma_1^2 + K_1$
Potás. Quad. (aj)	1	V_2	$\sigma_1^2 + K_2$
Nit. LinxFós. Lin. (aj)	1	V_3	$\sigma_1^2 + K_3$
Nit. LinxPot. Lin. (aj)	1	V_4	$\sigma_1^2 + K_4$
Fós. Lin.xPot. Lin. (aj)	1	V_5	$\sigma_1^2 + K_5$
Nitrog. Lin. (aj)	1	V_6	$\sigma_1^2 + K_6$
Fós. Lin. (aj)	1	V_7	$\sigma_1^2 + K_7$
Potás. Lin. (aj)	1	V_8	$\sigma_1^2 + K_8$
Resíduo (aj)	N-p-t	V_9	σ_1^2

onde:

$$K_i = K - (\tau_i' R_i \tau_i + 2a_i' T_i' \tau_i + a_i' T_i' R_i^{-1} T_i a_i + a_i' E_{ji} a_i),$$

sendo: (i = 0, 1, ..., 8 e j = i+1);

$$K = \tau' R \tau + 2a' T_X' \tau + a' T_X' R_X^{-1} T_X a + a' E_i a.$$

h. MATRIZ DE DISPERSÃO DOS EFEITOS DOS TRATAMENTOS AJUSTADOS

De (b.5) tem-se que:

$$\hat{\tau} = R^{-1}T - R^{-1}T_X \hat{a}$$

substituindo os vetores T e \hat{a} e desenvolvendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} = & R^{-1}X_1'X\beta + R^{-1}X_1'\epsilon - R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'X\beta - R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'\epsilon + \\ & + R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'X\beta + R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\epsilon . \end{aligned}$$

Supondo que os valores das variáveis auxiliares são fixos e $E(\epsilon) = \phi$, tem-se:

$$E(\hat{\tau}) = R^{-1}X_1'X\beta - R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'X\beta + R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'X\beta .$$

Por definição tem-se:

$$D_{\tau} = E\{[\hat{\tau} - E(\hat{\tau})][\hat{\tau} - E(\hat{\tau})]'\} .$$

Assim:

$$\hat{\tau} - E(\hat{\tau}) = R^{-1}X_1'\epsilon - R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'\epsilon + R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\epsilon$$

então:

$$\begin{aligned} D_{\tau} = & E\{(R^{-1}X_1'\epsilon - R^{-1}T_X E_1^{-1}X_2'\epsilon + R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\epsilon)(\epsilon'X_1R^{-1} - \epsilon'X_2E_1^{-1}T_X'R^{-1} + \\ & + \epsilon'X_1R^{-1}T_X E_1^{-1}T_X'R^{-1})\} \end{aligned}$$

sendo as matrizes R^{-1} e E_1^{-1} simétricas. Desenvolvendo e considerando-se, por hipótese, que os erros são independentes e com variância constante, ou seja $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_1^2 I_N$, obtêm-se:

$$D_{\tau} = \sigma_1^2 \begin{bmatrix} R^{-1} - R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} + R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} - R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} + \\ + R^{-1} T_X E_1^{-1} L E_1^{-1} T_X' R^{-1} - R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} + R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} - \\ - R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} + R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1} \end{bmatrix}$$

Simplificando obtêm-se:

$$D_{\tau} = \sigma_1^2 (R^{-1} + R^{-1} T_X E_1^{-1} T_X' R^{-1}), \quad (h.1).$$

No caso particular, de uma variável auxiliar, a matriz de dispersão dos efeitos de tratamentos ajustados pela regressão é mostrada na Tabela 3, onde:

. $Cor = (\sum z)^2 / 27$ é a correção relativa à variável auxiliar;

. SQn'' , ..., SQk' são as somas de quadrados dos tratamentos relativos à variável auxiliar;

. $n'' = z_{0..} - 2z_{1..} + z_{2..}$, $n'xp' = z_{00.} + z_{22.} - z_{02.} - z_{20.}$,
 $n' = z_{2..} - z_{0..}$, os demais valores obtêm-se por analogia;

. $R(z^2)$ é a soma de quadrados de resíduo relativa à variável auxiliar;

. as expressões na diagonal principal representam as variâncias dos efeitos de tratamentos ajustados e, às fora da diagonal principal as covariâncias.

Tabela 3 - Matriz de dispersão dos efeitos de tratamentos ajustados pela regressão linear, caso de uma variável auxiliar.

$\frac{1}{27} \left[1 + \frac{Cot}{R(z^2)} \right]$	$\frac{\sum z n''}{27 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{\sum z p''}{27 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{\sum z k''}{27 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{\sum z n'xp'}{27 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{\sum z n'xk'}{27 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{\sum z p'xk'}{27 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{\sum z n'}{27 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{\sum z p'}{27 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{\sum z k'}{27 \cdot 18 R(z^2)}$
$\frac{1}{6} \left[1 + \frac{SQn''}{R(z^2)} \right]$	$\frac{n'' p''}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'' n'xp'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'' k''}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'' n'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'' p'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'' n'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'' k'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	
$\frac{1}{6} \left[1 + \frac{SQp''}{R(z^2)} \right]$	$\frac{p'' k''}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'' n'xp'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{p'' n'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{p'' p'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{p'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'' n'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'' k'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	
$\frac{1}{6} \left[1 + \frac{SQk''}{R(z^2)} \right]$	$\frac{k'' n'xp'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{k'' n'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{k'' p'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{k'' p'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{k'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{k'' n'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{k'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{k'' k'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	
$\frac{1}{12} \left[1 + \frac{SQn'xp'}{R(z^2)} \right]$	$\frac{n'xp' n'xk'}{12 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'xp' p'xk'}{12 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'xp' n'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xp' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xp' k'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xp' n'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xp' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xp' k'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	
$\frac{1}{12} \left[1 + \frac{SQn'xk'}{R(z^2)} \right]$	$\frac{n'xk' p'xk'}{12 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'xk' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xk' n'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xk' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xk' k'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xk' n'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xk' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'xk' k'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	
$\frac{1}{12} \left[1 + \frac{SQp'xk'}{R(z^2)} \right]$	$\frac{p'xk' n'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'xk' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'xk' n'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'xk' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'xk' k'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'xk' n'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'xk' p'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'xk' k'}{12 \cdot 18 R(z^2)}$	
	$\frac{1}{18} \left[1 + \frac{SQn''}{R(z^2)} \right]$	$\frac{n'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'' k'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'' n'xp'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'' n'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'' p'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{n'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{n'' k'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	
	$\frac{1}{18} \left[1 + \frac{SQp''}{R(z^2)} \right]$	$\frac{p'' k'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'' n'xp'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{p'' n'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{p'' p'xk'}{18 \cdot 12 R(z^2)}$	$\frac{p'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'' p'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	$\frac{p'' k'}{18 \cdot 18 R(z^2)}$	
	$\frac{1}{18} \left[1 + \frac{SQk''}{R(z^2)} \right]$								$\frac{1}{18} \left[1 + \frac{SQk'}{R(z^2)} \right]$

simétrica

OBS.: Quando $z_{ijk} = V_{ijk} - \bar{V}$ tem-se que $\sum z = 0$, na primeira linha e primeira coluna.

$D_1 = 0_1^2$

i. MATRIZ DE DISPERSÃO DOS COEFICIENTES DE REGRESSÃO

De (b.6) tem-se que $\hat{a} = E_1^{-1}E_0$. Substituindo o vetor E_0 e desenvolvendo tem-se:

$$\hat{a} = E_1^{-1}X_2'X\beta + E_1^{-1}X_2'\varepsilon - E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'X\beta - E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\varepsilon .$$

Por definição: $D_r = E\{[\hat{a} - E(\hat{a})][\hat{a} - E(\hat{a})]'\}$. Assim considerando os valores das variáveis auxiliares fixos e $E(\varepsilon) = \Phi$, tem-se

$$\hat{a} - E(\hat{a}) = E_1^{-1}X_2'\varepsilon - E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\varepsilon ,$$

então

$$D_r = E\{(E_1^{-1}X_2'\varepsilon - E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'\varepsilon)(\varepsilon'X_2E_1^{-1} - \varepsilon'X_1R^{-1}T_X'E_1^{-1})\} ,$$

sendo as matrizes R^{-1} e E_1^{-1} simétricas. Desenvolvendo e considerando - se que os erros são independentes e com variância constante tem-se, por hipóteses, $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_1^2 I_N$, logo

$$D_r = \sigma_1^2(E_1^{-1}X_2'X_2E_1^{-1} - E_1^{-1}X_2'X_1R^{-1}T_X'E_1^{-1} - E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'X_2E_1^{-1} + E_1^{-1}T_X'R^{-1}X_1'X_1R^{-1}T_X'E_1^{-1}) .$$

Substituindo algumas matrizes e simplificando, obtém-se

$$D_r = \sigma_1^2 E_1^{-1} , \quad (i.1) .$$

No caso de uma variável auxiliar, tem-se

$$D_r = \frac{\sigma_1^2}{R(z^2)} , \text{ onde: } R(z^2) \text{ é a soma de quadrados de resíduo relativo à análise da variância da variável auxiliar.}$$

j. INTERVALO DE CONFIANÇA DAS ESTIMATIVAS DOS EFEITOS DE TRATAMENTOS AJUSTADOS

A matriz de dispersão D_{τ} , obtida em (h.1), também chamada "matriz das variâncias e covariâncias de $\hat{\tau}$ ", mostra que as variâncias e covariâncias das estimativas dos efeitos de tratamentos dependem do esquema experimental e do modelo de superfície utilizado.

Sendo $\hat{\tau} = R^{-1}T - R^{-1}T_x \hat{a}$, $E(\hat{\tau}) = \tau$ e $E(s_1^2) = \sigma_1^2$, tem-se: $\hat{\tau} \sim N(\tau; D_{\tau})$, logo cada uma das estimativas dos efeitos de tratamentos terá $\hat{a}_{ij} \sim N(a_{ij}, d_{ij}\sigma_1^2)$, onde a_{ij} , $i \leq j = 0, 1, 2, 3$, designa o parâmetro e d_{ij} o elemento da diagonal principal de D_{τ} , correspondente ao parâmetro anterior. Sabe-se, por hipótese, que $\hat{\tau}$ e s_1^2 são independentes, logo, $\hat{\tau}$ e $(N-p-t)s_1^2/\sigma_1^2$ também o são. Desse modo, o intervalo de confiança do efeito de tratamento a_{ij} , com probabilidade de confiança $1 - \alpha$ e, t com $(N-p-t)$ graus de liberdade, pode ser obtido por:

$$\hat{a}_{ij} - t_{\alpha/2} s_1 \sqrt{d_{ij}} \leq a_{ij} \leq \hat{a}_{ij} + t_{\alpha/2} s_1 \sqrt{d_{ij}}, \quad (j.1).$$

k. INTERVALO DE CONFIANÇA DAS ESTIMATIVAS DOS COEFICIENTES DE REGRESSÃO

De modo análogo, ao item anterior, obtém-se:

$$\hat{b}_t - t_{\alpha/2} s_1 \sqrt{d_{tt}} \leq b_t \leq \hat{b}_t + t_{\alpha/2} s_1 \sqrt{d_{tt}}, \quad (k.1)$$

onde: \hat{b}_t é a estimativa do t -ésimo coeficiente de regressão;

d_{tt} , com $t=1,2, \dots, t$, designa o elemento da diagonal principal de D_r , correspondente ao coeficiente de regressão b_t .

ℓ. VARIÂNCIA E INTERVALOS DE CONFIANÇA DAS ESTIMATIVAS DE PRODUÇÃO

Para determinar as variâncias dos valores observados, considerou-se que o vetor das estimativas dos valores esperados de y_{ijk} , representado por \hat{y} , é dado por:

$$\hat{y} = P' \hat{\beta}$$

onde P' é o vetor linha cujos elementos correspondem à linha da matriz X relativa a uma determinada combinação dos níveis dos fatores, ou seja,

$$P' = \left[1 \quad x_1 - \frac{2}{3} \quad x_2 - \frac{2}{3} \quad x_3 - \frac{2}{3} \quad x_1 x_2 \quad x_1 x_3 \quad x_2 x_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad z \quad \dots \quad t \right].$$

A variância de cada valor \hat{y} é

$$V(\hat{y}) = V(P' \hat{\beta}) \quad , \quad (\ell.1) .$$

Desenvolvendo a expressão (ℓ.1) tem-se:

$$V(P' \hat{\beta}) = E[P' \hat{\beta} - P' \beta]^2 = E[P' (\hat{\beta} - \beta)]^2 ,$$

como $P' \hat{\beta}$ é uma matriz de um único elemento, segundo HOFFMANN e VIEIRA (1977), obtém-se:

$$V(P' \hat{\beta}) = P' (X'X)^{-1} P \sigma_1^2 .$$

Como em experimentação σ_1^2 é desconhecida, utiliza-se como sua estimativa não tendenciosa, $s_1^2 = \text{QMRES}(aj)$. Portanto

$$\hat{V}(P' \hat{\beta}) = P' (X'X)^{-1} P s_1^2 .$$

A partir desta fórmula pode-se estimar as variâncias dos vinte e sete valores de y_{ijk} .

Como $\hat{y} \sim N(P\beta; P'(X'X)^{-1}P\sigma_1^2)$, o intervalo de confiança de y_{ijk} , com probabilidade de confiança $1 - \alpha$ e, t com $(N-p-t)$ graus de liberdade, pode ser obtido por:

$$\hat{y} - t_{\alpha/2} s_1 \sqrt{P'(X'X)^{-1}P} \leq y_{ijk} \leq \hat{y} + t_{\alpha/2} s_1 \sqrt{P'(X'X)^{-1}P} .$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para exemplificar a aplicação da metodologia de superfície de resposta, através do uso de um modelo de regressão polinomial quadrático, considerando-se algumas variáveis auxiliares adicionais ao modelo, tomou-se dados provenientes de um experimento em esquema fatorial 3^3 , de adubação N, P_2O_5 e K_2O , em cafeeiro. Os dados observados de produção (variável dependente), altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios (variáveis auxiliares adicionais) relativos à aplicação das vinte e sete combinações de tratamentos, encontram-se nos Apêndices 7, 8, 9 e 1, respectivamente.

4.1. MODELO SEM AS VARIÁVEIS AUXILIARES ADICIONAIS

Usando a metodologia que se encontra em 3.2., não considerando-se as variáveis auxiliares adicionais, obtiveram-se os vetores das estimativas dos parâmetros ($\hat{\tau}$), a análise da variância, as estimativas das

variâncias das estimativas dos parâmetros e as covariâncias (que são nulas). A partir da estimativa $s^2 = \text{QMRES}$, da variância residual (σ^2) ou desvios de regressão, determinou-se os desvios padrões das estimativas dos parâmetros considerando-se o teste t ao nível de 5% de probabilidade e 17 graus de liberdade, e ainda os valores calculados de t para os mesmos parâmetros.

Os valores calculados das estimativas dos parâmetros, desvios padrões e de t encontram-se na Tabela 4, enquanto a análise da variância na Tabela 5, para os exemplos de aplicação considerados.

Tabela 4 - Estimativas dos parâmetros, desvios padrões e valores de t da variável dependente produção, relativos aos exemplos considerados.

Parâmetros	Exemplo 1			Exemplo 2			Exemplo 3		
	Estimati- vas dos parâmetros	Desvios padrões	Valores de t	Estimati- vas dos parâmetros	Desvios padrões	Valores de t	Estimati- vas dos parâmetros	Desvios padrões	Valores de t
a ₀₀	5741,963	356,63	33,97**	2342,074	489,32	10,10**	3024,963	53,67	118,90**
a ₁₁	-936,889	756,53	-2,61*	-1076,889	1038,01	-2,19*	-124,722	113,86	-2,31*
a ₂₂	-397,556	756,53	-1,11	-1822,889	1038,01	-3,71**	-185,556	113,86	-3,44**
a ₃₃	-1177,056	756,53	-3,28**	-990,556	1038,01	-2,01+	-190,556	113,86	-3,53**
a ₁₂	2,167	534,95	0,009	16,833	733,98	0,048	-37,667	80,51	-0,987
a ₁₃	434,417	534,95	1,71	62,083	733,98	0,178	92,750	80,51	2,43*
a ₂₃	115,000	534,95	0,454	848,917	733,98	2,44*	59,250	80,51	1,55
a ₁₀	453,556	436,78	2,19*	364,778	599,30	1,28	249,278	65,74	8,00**
a ₂₀	168,333	436,78	0,813	1365,444	599,30	4,81**	249,889	65,74	8,02**
a ₃₀	-267,500	436,78	-1,29	1141,444	599,30	4,02**	304,111	65,74	9,76**

+, *, ** significativos aos níveis de 10; 5 e 1% de probabilidade, respectivamente.

Os valores calculados das estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros foram:

Estimativas das variâncias	Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3
$\hat{V}(\hat{a}_{00})$	28.567,75	53.780,67	647,17
$\hat{V}(\hat{a}_{ii})$	128.554,89	242.013,02	2.912,28
$\hat{V}(\hat{a}_{ii'})$	64.277,44	121.006,51	1.456,14
$\hat{V}(\hat{a}_{i_0})$	42.851,63	80.671,01	970,76

Tabela 5 - Análise da variância relativa aos dados de produção para os exemplos considerados.

Fontes de variação	G.L.	Exemplo 1		Exemplo 2		Exemplo 3	
		SQ	QM	SQ	QM	SQ	QM
Regressão	9	22451086,42	2494565,16*	100887591,80	11209732,42**	4587384,17	509709,35**
Resíduo	17	13112598,54	771329,33	24685328,07	1452078,12	297052,79	17473,69
Total	26	35564484,96		125572919,90		4884436,96	
CV em %	-	15,30		51,45		4,37	
r ²	-	0,6313**		0,8034**		0,9392**	

*, ** significativo aos níveis de 5 e 1% de probabilidade, respectivamente.

Pelas estimativas das variâncias obtidas nota-se que o parâmetro da média é estimado com mais precisão do que os termos lineares, estes com maior precisão do que os efeitos das interações e estas mais do que os termos quadráticos.

Observa-se na Tabela 4 que os desvios padrões obtidos, em alguns casos são relativamente grandes, em relação aos valores calculados das estimativas dos parâmetros e, essa grandeza se acentua nas estimativas dos parâmetros não significativos. Assim, estimativas de parâmetros que sejam próximas de zero, podem mudar de sinal, concordando com resultados obtidos por vários autores, como CAMPOS (1967), MORAIS (1969) e MONTEIRO (1978). Nota-se que não houve efeito significativo das interações lineares, com exceção de $P'xK'$ e $N'xK'$ nos exemplos 2 e 3, respectivamente, ocorrendo uma predominância dos efeitos lineares e quadráticos. A não significância dos parâmetros nos evidenciam que estes não diferem significativamente de zero podendo, em alguns casos, serem eliminados do modelo, conforme estudos de CAMPOS e ARAUJO (1971).

O modelo ajustou-se melhor aos dados do exemplo 3, evidenciado pelos valores dos coeficientes de determinação, os quais mostraram que 93,92%, 80,34% e 63,13% da variação são explicadas pela regressão, respectivamente, nos exemplos 3, 2 e 1.

4.2. MODELO COM AS VARIÁVEIS AUXILIARES ADICIONAIS

Usando a metodologia que se encontra em 3.2., foram feitas as análises estatísticas considerando o modelo com uma e com as três

variáveis auxiliares adicionais. Os valores obtidos de quadrados médios e do teste F encontram-se nas Tabelas 6, 7 e 8, respectivamente, para os exemplos 1, 2 e 3.

Observa-se que a adição de uma variável auxiliar ao modelo diminuiu moderadamente a estimativa da variância residual, o que era esperado, exceto quando se considerou as variáveis auxiliares altura da planta e número de internódios no exemplo 1 e, número de internódios no exemplo 2.

Em termos percentuais, a variável auxiliar diâmetro da copa reduziu a variância residual em 10,38; 35,97 e 4,77%, respectivamente, nos exemplos 1, 2 e 3; a altura da planta em 22,28 e 2,12%, respectivamente, nos exemplos 2 e 3; o número de internódios em 7,54% no exemplo 3.

Quando são incluídas ou adicionadas variáveis auxiliares ao modelo, a S.Q. de Resíduo e os graus de liberdade do resíduo ficam reduzidos, se o decréscimo da S.Q. de Resíduo é maior proporcionalmente ao decréscimo no número de graus de liberdade, os valores da S.Q. de Resíduo ajustada ficam reduzidos e apresentam maior eficiência relativa.

Tabela 6 - Valores de quadrados médios e teste F para produção e produção ajustada pelas variáveis auxiliares: altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios, exemplo 1.

Fontes de variação	Produção						Fontes de variação, ajustadas pelas variáveis auxiliares					
	Produção			Altura			ϕ copa			Nº internódios		
	QM	F		QM	F		QM	F		QM	F	
N''	5266564,74	6,83*	4765101,37	5,85*	3330323,75	4,82*	4795461,51	6,14*				
P''	948302,52	1,23	1022838,99	1,26	118738,20	0,011	1265075,98	1,62				
K''	8312758,69	10,78**	7742710,70	9,50**	2106373,24	3,05+	8660486,51	11,08**				
N'xP'	53,33	0,00007	9511,74	0,012	310382,66	0,449	113828,10	0,146				
N'xK'	2264614,08	2,94	2271788,48	2,79	924925,56	1,34	2838771,17	3,63+				
P'xK'	158700,00	0,206	159670,01	0,196	5413,25	0,008	189179,70	0,242				
N'	3702827,56	4,80*	3345163,64	4,11+	2895211,16	4,19+	4306867,97	5,51*				
P'	510050,00	0,661	463034,59	0,568	16058,19	0,023	599550,56	0,767				
K'	1288012,50	1,67	1021521,23	1,25	2282465,38	3,30+	630114,76	0,806				
QMRES (aj)	771329,33		814614,70		691264,69		781528,45					
CV(%)	15,30		15,72		14,48		15,40					

+, *, ** significativo aos níveis de 10; 5 e 1%, respectivamente.

Tabela 7 - Valores de quadrados médios e teste F de produção e produção ajustada pelas variáveis auxiliares: altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios, exemplo 2.

Fontes de variação	Fontes de variação, ajustadas pelas variáveis auxiliares											
	Produção			Altura			φ copa			nº internódios		
	QM	F	QM	F	QM	F	QM	F	QM	F	QM	F
N''	6958138,07	4,79*	1363858,49	1,21	389838,36	0,419	6511701,25	4,27+				
P''	19937543,41	13,73**	6968017,97	6,17*	1554165,51	1,67	14147694,58	9,28**				
K''	5887201,85	4,05+	13686,85	0,012	637257,85	0,685	1991562,23	1,31				
N'xP'	3400,33	0,002	26901,12	0,024	33829,46	0,036	28850,01	0,019				
N'xK'	46252,08	0,032	1200623,02	1,06	13027,17	0,014	10549,29	0,013				
P'xK'	8647914,08	5,96*	1972147,08	1,75	629231,72	0,677	7043241,72	4,62+				
N'	2395130,89	1,65	371106,15	0,329	766423,03	0,824	1464880,85	0,96				
P'	33559893,56	23,11**	2494417,54	2,21	127208,15	0,137	17793500,87	11,67**				
K'	23452117,56	16,15**	17988,76	0,016	647991,04	0,697	5678692,07	3,72+				
QMRES (aj)	1452078,07		1128511,17		929797,18		1524920,09					
CV(%)	51,45		45,36		41,17		52,73					

+, *, ** significativo ao nível de 10; 5 e 1%, respectivamente.

Tabela 8 - Valores de quadrados médios e teste F de produção e produção ajustada pelas variáveis auxiliares: altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios, exemplo 3.

Fontes de variação	Fontes de variação, ajustadas pelas variáveis auxiliares													
	Produção				Altura				φ copa				nº internódios	
	QM	F	QM	F	QM	F	QM	F	QM	F	QM	F		
N"	93333,80	5,34*	26713,07	1,56	30258,19	1,82	109069,29	6,75*						
P"	206585,19	11,82**	103249,22	6,04*	148132,03	8,90**	237062,34	14,67**						
K"	217868,52	12,47**	61828,93	3,61+	25081,22	1,51	136094,05	8,42*						
N'xP'	17025,33	0,974	9327,59	0,549	9909,63	0,596	4592,97	0,284						
N'xK'	103230,75	5,91*	52583,28	3,07+	72131,61	4,33+	55042,07	3,41+						
P'xK'	42126,75	2,41	18998,07	1,11	7361,57	0,442	46992,94	2,91						
N'	1118509,39	64,01**	1044171,99	61,05**	576723,40	34,66**	1148788,45	71,11**						
P'	1124000,22	64,33**	1023187,84	59,82**	142518,95	8,57**	1072512,46	66,38**						
K'	1664704,22	95,27**	346902,24	20,28**	252907,89	15,20**	1141822,28	70,67**						
QMRES (aj)	17473,69		17103,60		16639,44		16156,04							
CV(%)	4,37		4,32		4,26		4,20							

+, *; ** significativo ao nível de 10; 5 e 1%, respectivamente.

Das variáveis auxiliares adicionais consideradas, os resultados evidenciam que o diâmetro da copa foi a variável que mais contribuiu para a redução da variância residual, seguida pela altura da planta. O número de internódios, apesar de ter aumentado a variância residual, comportou satisfatoriamente, aumentando alguns valores de fontes de variação, como K'' e $N' \times K'$ no exemplo 1 e, N'' no exemplo 3.

Observa-se alguns resultados bastante interessantes, quando da introdução da variável auxiliar ao modelo, em relação aos valores obtidos das S.Q. de Tratamentos ajustadas. Quando da adição da variável diâmetro da copa ao modelo nota-se que o efeito quadrático de potássio ajustado teve seu nível de significância reduzido, de 1% para 10% no exemplo 1 e 10% para um nível bem inferior a 10% no exemplo 2. Nota-se, também, que $N' \times K'$ passou a apresentar significância (10%) quando se considerou a variável número de internódios no modelo, no exemplo 1.

Pelos valores obtidos para o teste F , evidencia-se que a redução nos graus de liberdade foi maior, proporcionalmente, aos decréscimos da S.Q. de Resíduo.

As estimativas ajustadas dos parâmetros pelas variáveis auxiliares, desvios padrões, valores de t e coeficientes de regressão encontram-se nas Tabelas 9, 10 e 11, respectivamente, para os exemplos 1, 2 e 3.

Observa-se que os desvios padrões foram relativamente grandes quando comparados aos valores obtidos para as estimativas dos parâmetros e maiores do que os obtidos anteriormente, em 4.1., sem as variáveis auxiliares; o mesmo ocorrendo para os valores calculados para o teste t , mas com tendência a serem menores.

Tabela 9 - Estimativas ajustadas dos parâmetros, desvios padrões e valores de t, no exemplo 1.

Estimativas ajustadas dos parâmetros	Altura da planta			Diâmetro da copa			Número de internódios			As três variáveis		
	Estimativas ajustadas	Desvios padrões	Valores de t									
\hat{a}_{00}												
\hat{a}_{11}	-993,288 ± 870,66		-2,42*	-773,534 ± 747,12		-2,19*	-899,898 ± 770,24		-2,48*	-740,113 ± 804,21		-1,96*
\hat{a}_{22}	-422,744 ± 799,81		-1,12	-152,523 ± 780,18		-0,414	-471,356 ± 785,41		-1,27	-235,240 ± 764,47		-0,659
\hat{a}_{33}	-1222,660 ± 840,76		-3,08**	-739,793 ± 898,46		-1,75*	-1206,576 ± 768,40		-3,33**	-694,827 ± 899,73		-1,65
\hat{a}_{12}	-30,335 ± 595,15		-0,108	174,184 ± 551,08		0,670	-108,533 ± 602,90		-0,382	-23,559 ± 586,96		-0,086
\hat{a}_{13}	434,886 ± 552,38		1,67	293,337 ± 537,62		1,16	522,976 ± 550,25		2,01*	402,306 ± 539,70		1,60
\hat{a}_{23}	115,235 ± 552,36		0,442	21,772 ± 521,59		0,088	126,070 ± 541,17		0,494	3,558 ± 504,87		0,015
\hat{a}_{10}	440,023 ± 460,34		2,03*	405,155 ± 419,69		2,05*	534,736 ± 482,91		2,35*	512,896 ± 448,79		2,45*
\hat{a}_{20}	161,293 ± 453,55		0,754	32,204 ± 447,94		0,152	183,093 ± 443,17		0,876	-11,312 ± 439,59		-0,055
\hat{a}_{30}	-248,179 ± 469,84		-1,12	-373,103 ± 435,30		-1,82*	-208,460 ± 449,28		-0,984	-269,818 ± 408,24		-1,41
\hat{b}_1	-14,080 ± 95,99		-0,311	-		-	-		-	-26,574 ± 85,84		-0,656
\hat{b}_2	-		-	49,502 ± 60,90		1,72	-		-	70,675 ± 63,17		2,37*
\hat{b}_3	-		-	-		-	-132,839 ± 319,25		-0,882	-251,975 ± 307,81		-1,74

*, **, * significativo aos níveis de 10; 5 e 1% de probabilidade, respectivamente.

Tabela 10 - Estimativas ajustadas dos parâmetros, desvios padrões e valores de t, no exemplo 2.

Estimativas ajustadas dos parâmetros	Altura da planta			Diâmetro da copa			Número de internódios			As três variáveis		
	Estimativas ajustadas	Desvios padrões	Valores de t	Estimativas ajustadas	Desvios padrões	Valores de t	Estimativas ajustadas	Desvios padrões	Valores de t	Estimativas ajustadas	Desvios padrões	Valores de t
\bar{a}_{00}												
\bar{a}_{11}	-535,158 ± 1033,93		-1,10	-298,426 ± 997,07		-0,668	-1049,763 ± 1076,97		-2,07*	-276,611 ± 1066,36		-0,566
\bar{a}_{12}	-1234,836 ± 1051,52		-2,48*	-682,084 ± 1118,46		-1,29	-1714,384 ± 1193,23		-3,05**	-750,341 ± 1278,35		-1,26
\bar{a}_{13}	-63,678 ± 1225,81		-0,110	500,689 ± 1282,15		0,828	-787,109 ± 1460,15		-1,14	351,698 ± 1504,19		0,500
\bar{a}_{14}	-67,524 ± 625,55		-0,154	-53,255 ± 591,88		-0,191	86,649 ± 825,29		0,217	-140,633 ± 719,42		-0,418
\bar{a}_{15}	-366,760 ± 749,71		-1,03	-33,131 ± 593,38		-0,118	41,739 ± 762,25		0,116	-47,185 ± 862,59		-0,117
\bar{a}_{20}	458,038 ± 734,55		1,32	271,682 ± 700,14		0,823	801,446 ± 790,58		2,15*	289,115 ± 750,55		0,824
\bar{a}_{10}	152,145 ± 562,47		0,573	-272,627 ± 636,59		-0,908	310,525 ± 671,67		0,980	-231,907 ± 765,63		-0,648
\bar{a}_{20}	599,461 ± 854,80		1,49	-196,770 ± 1127,79		-0,370	1245,982 ± 785,70		3,42**	-158,596 ± 1316,98		-0,258
\bar{a}_{10}	64,398 ± 1081,34		0,126	-451,186 ± 1145,77		-0,835	965,124 ± 1060,27		1,93*	-348,726 ± 1287,96		-0,579
\bar{b}_1	113,573 ± 99,36		2,42*	-		-	-		-	9,998 ± 187,49		0,113
\bar{b}_2	-		-	79,345 ± 51,790		3,25**	-		-	80,024 ± 101,10		1,68
\bar{b}_3	-		-	-		-	81,379 ± 397,94		0,433	-97,336 ± 373,30		-0,551

+, *, ** significativo aos níveis de 10; 5 e 1% de probabilidade, respectivamente.

Tabela 11 - Estimativas ajustadas dos parâmetros, desvios padrões e valores de t, no exemplo 3.

Estimativas ajustadas dos parâmetros	Altura da planta			Diâmetro da copa			Número de internódios			As três variáveis		
	Estimativas ajustadas	Desvios padrões	Valores de t									
$\hat{\alpha}_{00}$												
$\hat{\alpha}_{11}$	-116,063 ± 137,88		-1,78+	-82,447 ± 129,62		-1,35	-136,202 ± 111,13		-2,60*	-27,645 ± 159,11		-0,372
$\hat{\alpha}_{22}$	-178,561 ± 129,83		-2,92**	-123,031 ± 148,15		-1,76+	-203,923 ± 112,86		-3,83**	-60,305 ± 183,26		-0,704
$\hat{\alpha}_{33}$	-179,565 ± 150,99		-2,52*	-102,453 ± 176,91		-1,23	-160,708 ± 117,38		-2,90*	-87,223 ± 182,40		-1,02
$\hat{\alpha}_{17}$	-35,835 ± 81,75		-0,929	-29,141 ± 80,05		-0,772	-20,447 ± 81,30		-0,533	-44,821 ± 87,98		-1,09
$\hat{\alpha}_{13}$	88,753 ± 87,90		2,14*	79,961 ± 81,42		2,08+	72,086 ± 82,79		1,84+	91,983 ± 94,18		2,09+
$\hat{\alpha}_{23}$	55,919 ± 85,57		1,39	28,876 ± 92,03		0,665	62,694 ± 77,93		1,71	6,219 ± 100,77		0,132
$\hat{\alpha}_{10}$	248,168 ± 66,12		7,96**	219,792 ± 79,15		5,89**	253,870 ± 63,82		8,43**	203,464 ± 90,75		4,81**
$\hat{\alpha}_{20}$	243,561 ± 87,07		5,93**	178,128 ± 129,03		2,93**	245,297 ± 63,82		8,15**	147,578 ± 142,48		2,22*
$\hat{\alpha}_{30}$	293,342 ± 117,73		5,28**	233,771 ± 127,12		3,90**	281,151 ± 70,90		8,40**	213,462 ± 137,37		3,33**
\hat{b}_1	1,998 ± 18,171		0,233	-		-	-		-	6,960 ± 22,08		0,674
\hat{b}_2	-		-	6,394 ± 9,96		1,36	-		-	7,718 ± 13,189		1,25
\hat{b}_3	-		-	-		-	20,715 ± 28,35		1,55	-28,591 ± 49,428		-1,24

+, *, ** significativo nos níveis de 10; 5 e 1% de probabilidade, respectivamente.

As estimativas ajustadas dos parâmetros, em poucos casos, se aproximam daquelas obtidas sem o ajustamento feito pelas variáveis auxiliares. Nota-se uma maior semelhança no exemplo 3 quando da inclusão da variável altura da planta.

As estimativas dos coeficientes de regressão apresentaram significância somente para as variáveis auxiliares altura da planta e diâmetro da copa no exemplo 2 e, diâmetro da copa no exemplo 1, evidenciando que estas variáveis auxiliares contribuíram satisfatoriamente na redução da variância residual.

De maneira geral, o ajustamento das estimativas dos parâmetros pelas variáveis auxiliares não trouxe resultados plenamente satisfatórios, pois as estimativas dos quadrados médios ajustadas das diversas fontes de variação, na maioria das vezes, sofreram reduções e, em alguns casos muito acentuados, inibindo assim as reduções ocorridas nas variâncias residuais. Estes fatos devem-se, talvez, à pouca precisão dos exemplos considerados ou que o método não se adapte bem ao estudo de superfícies de resposta, ou ainda, que as variáveis auxiliares altura da planta, diâmetro da copa e número de internódios estão sendo afetadas pelos próprios tratamentos (níveis de N, P_2O_5 e K_2O) conforme PIMENTEL GOMES (1978).

As estimativas das variâncias das estimativas ajustadas dos parâmetros se encontram na Tabela 12, para os exemplos em questão.

Nota-se, em comparação com as estimativas das variâncias dos parâmetros calculados, em 4.1., que algumas estimativas ajustadas de variância dos parâmetros foram inferiores (aquelas onde figuram o

Tabela 12 - Estimativas das variâncias das estimativas ajustadas dos parâmetros.

	Exemplo 1			Exemplo 2			Exemplo 3		
	Altura da planta	ϕ copa	Nº de internódios	Altura da planta	ϕ copa	Nº de internódios	Altura da planta	ϕ copa	Nº de internódios
$\hat{V}(\hat{a}_{11})$	168667,05	124198,60	132004,53	237857,16	212411,85	258068,38	4230,15	3738,07	2747,88
$\hat{V}(\hat{a}_{22})$	142330,72	135433,38	137253,92	246953,32	278334,73	316794,44	3750,56	4883,71	2834,04
$\hat{V}(\hat{a}_{33})$	157282,28	179609,28	131374,61	334334,01	365770,72	474376,09	5072,98	6963,67	3065,98
$\hat{V}(\hat{a}_{12})$	78810,02	67571,74	80875,46	94747,63	77948,75	151544,89	1487,02	1425,85	1470,59
$\hat{V}(\hat{a}_{13})$	67889,68	64309,12	67367,11	125058,37	78342,47	129278,90	1719,17	1474,92	1525,26
$\hat{V}(\hat{a}_{23})$	67885,84	60532,78	65162,36	120052,08	109068,55	139066,48	1629,37	1884,68	1351,31
$\hat{V}(\hat{a}_{10})$	47150,42	39192,65	51887,25	70391,83	90168,87	100378,06	972,87	1393,77	906,39
$\hat{V}(\hat{a}_{20})$	45768,97	44645,13	43698,21	162576,84	283002,21	137353,56	1686,91	3704,49	906,39
$\hat{V}(\hat{a}_{30})$	49117,29	42159,75	44911,40	260171,94	292098,30	250129,53	3083,69	3595,48	1118,43

sinal -), evidenciando que os efeitos correspondentes a estas variâncias podem ser obtidas com maior precisão pelo modelo com a variável auxiliar.

Os valores estimados de produção, através do modelo original (sem variáveis auxiliares adicionais) e do modelo com as variáveis auxiliares encontram-se nos Apêndices 7, 8 e 9, respectivamente, para os exemplos 1, 2 e 3.

Observa-se que os valores estimados se aproximam satisfatoriamente dos valores observados, principalmente nos exemplos com menor coeficiente de variação ou maior precisão.

5. CONCLUSÕES

A aplicação da metodologia de superfície de resposta, a través do uso de um modelo de regressão polinomial quadrático, a experimento planejado em esquema fatorial para três fatores e três níveis equidistantes, tendo-se a preocupação de considerar algumas variáveis auxiliares adicionais ao modelo, levou às seguintes conclusões:

1. Os parâmetros ($a_{ii'}$, $i, i' = 0, 1, 2, 3$) do modelo com uma variável auxiliar, serão estimados com maior precisão do que no modelo original (sem a variável auxiliar) quando a redução da variância residual deste, dada por $(\sigma^2 - \sigma_1^2)$, for maior do que o acréscimo $[SQa_{ii'}/R(z^2)]\sigma_1^2$, dado na inclusão da variável auxiliar ao modelo, ou seja,

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} > 1 + \frac{SQa_{ii'}}{R(z^2)},$$

onde: $SQa'_{ii'}$: é a soma de quadrados do parâmetro ($a'_{ii'}$, $i, i' = 0, 1, 2, 3$), relativa à variável auxiliar;

$R(z^2)$: é a soma de quadrados de resíduo relativa à variável auxiliar;

σ^2 e σ_1^2 : são as variâncias residuais dos modelos sem e com a variável auxiliar, respectivamente.

2. As variáveis auxiliares que mais contribuíram para a redução da variância residual (σ^2) foram: diâmetro da copa seguida da altura da planta, nos exemplos em questão. Consequentemente as estimativas ajustadas dos parâmetros se aproximaram mais das estimativas do modelo original (sem a variável auxiliar) ao serem ajustadas pelas variáveis auxiliares: número de internódios e altura da planta.

3. As estimativas da variância dos parâmetros ($a'_{ii'}$, $i, i' = 0, 1, 2, 3$) são dadas pela expressão:

$$\widehat{V}(a'_{ii'}) = \frac{1}{C_j} \left[1 + \frac{QMa'_{ii'}}{R(z^2)} \right] \sigma_1^2 ,$$

onde: $QMa'_{ii'}$: quadrado médio do parâmetro ($a'_{ii'}$) relativo à variável auxiliar;

C_j : coeficiente dos termos quadráticos, lineares e interações, respectivamente 6, 18 e 12.

4. A covariância entre os efeitos ajustados de dois parâmetros é dada pela soma de produtos desses parâmetros dividida pela soma de quadrados de resíduo, relativas à variável auxiliar. Por exemplo, a covariância entre os efeitos ajustados de nitrogênio e fósforo quadráticos, nos exemplos considerados, é:

$$\text{Cov}(a_{11}, a_{22}) = \frac{n''}{18} \cdot \frac{p''}{18} \frac{\sigma_1^2}{R(z^2)},$$

cujos valores foram definidos em **h**.

6. LITERATURA CITADA

ANDRADE, D.F. de, 1977. Alguns Aspectos da Metodologia de Superfície de Resposta. São Paulo, USP. 87p. [Dissertação de Mestrado]

ARNOLD, B.; L. NELSON; R. VACCARO; C. MORÁN; T. SCHOFIELD; R. ARROYO, 1979. Diseños de Superfícies de Resposta. In: **Curso de Estatística Experimental Avanzada**, Tomo 2, Lima. 444p.

BALAAM, L.N., 1973. Response Surface Designs. In: **Developments in Fields Experimental Design and Analysis**. Proceedings of a Symposium held at St. Albert's College, University of New England Armidale, New South Wales, Australia, 3-7 September. Commonwealth Agricultural Bureaux, p.11-32.

- BOX, G.E.P. e J.S. HUNTER, 1957. Multifactor Experimental Designs for Exploring Response Surfaces. *Ann. Math. Stat.*, Hayward, 28(1): 195-241.
- BOX, G.E.P. e K.B. WILSON, 1951. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *J.R. Statist. Soc. B.*, London, 13: 1-45.
- CAMPOS, H., 1967. Aspectos da Aplicação das Superfícies de Resposta a Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP. 82p. [Tese de Livre-Docência]
- CAMPOS, H. e P.F.C. de ARAUJO, 1971. Aspectos Econômicos da Adubação em Milho. Departamento de Ciências Sociais Aplicadas, ESALQ/USP, Piracicaba, 41p. [Mimeografado]
- COCHRAN, W.G., 1957. Analysis of Covariance: its nature and uses. *Biometrics*, Raleigh, 13: 261-281.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. *Experimental Designs*. 2ª edição. New York, John Wiley. 611p.
- COSTA, R.A. da, 1977. Funções de Produção Ajustadas a Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação de Arroz. Piracicaba, ESALQ/USP. 80p. [Dissertação de Mestrado]
- DAVIES, O.L., 1960. *The Design and Analysis of Industrial Experiments*. 2ª ed., London, Oliver and Boyd. 636p.

- DÁVILA, L.E.R., 1979. Alguns Diseños para Estúdios de la Superfícies de Respuesta a la Aplicación de Fertilizantes. In: Reunión Internacional de Biometria, Região Brasileira. Piracicaba, 1975. Fundação Cargill, p.131-156.
- DÁVILA, L.E.R. e J. BENITEZ, 1979. Vantajas y Desventajas del Modelo Polinomial Cuadrático en el Estúdio de la Respuesta a los Fertilizantes. In: Reunión Internacional de Biometria, Região Brasileira. Piracicaba, 1975. Fundação Cargill, p.101-109.
- DIAS, J.F.S., 1981. Análise de Covariância Intrablocos, com p variáveis Auxiliares, para Delineamentos em blocos Incompletos Equilibrados. Piracicaba, ESALQ/USP. 96p. [Tese de Doutorado]
- DRAPER, N.R. e H. SMITH, 1981. Applied Regression Analysis. 2ª ed., New York, John Wiley. 709p.
- ESCOBAR, J.H. e F.B. CADY, 1967. Consideraciones sobre la Comparación de Diseños de Tratamientos. Agrociência, Chapingo, 2: 64-75.
- GRAYBILL, F.A., 1961. An Introduction to Linear Statistical Models, Vol. 1. New York, McGraw-Hill. 463p.

- GUIMARÃES, P.T.G.; F.M. FREIRE; J.G. de CARVALHO; M.M. de CARVALHO; S.P. de SOUZA; J.M. BRAGA, 1976. Ensaio de Adubação Mineral e Orgânica para a Formação de Cafeeiros em um Latossolo Vermelho Escuro, fase cerrado de Machado-MG. In: Projeto Café - Relatório Anual 74/75. Belo Horizonte, EPAMIG. p.139-146.
- HADER, R.J.; M.E. HARWARD; D.D. MASON; D.P. MOORE, 1957. An Investigation of Some of the Relationships of Cooper, Iron and Molybdenum in the Growth and Nutrition of Lettuce: I. Experimental Design and Statistical Methods for Characterizing the Response Surface. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, Madison, 21: 59-64.
- HEADY, E.O.; J.T. PESEK; W.G. BROWN; J.P. DOLL, 1961. Crop Response Surfaces and Economic Optima in Fertilizer Use. In: *Agricultural Production Functions*. Ames, Iowa State Univ. Press. 667p.
- HOFFMANN, R. e S. VIEIRA, 1977. *Análise de Regressão. Uma Introdução a Econometria*. São Paulo, HUCITEC-EDUSP. 339p.
- JORGE, J. de P.N., 1980. Delineamento Guadalupe para Três Fatores, Analisado através de Modelo de Regressão Polinomial Quadrática. Piracicaba, ESALQ/USP. 56p. [Dissertação de Mestrado]
- KATTI, S.K., 1965. Multiple Covariate Analysis. *Biometrics*, Raleigh, 21: 957-974.

- KEMPTHORNE, O., 1952. *The Design and Analysis of Experiments*. New York, John Wiley. 631p.
- LIMA, A.R.C., 1980. Superfícies de Resposta em Experimentos Fatoriais 3^3 Incompletos de Adubação NPK em Mandioca no Estado do Ceará. Piracicaba, ESALQ/USP. 100p. [Dissertação de Mestrado]
- MEAD, R. e D.J. PIKE, 1975. A Review of Response Surface Methodology from a Biometric Viewpoint. *Biometrics*, Raleigh, 31: 803-851.
- MENEGUELLI, C.A., 1976. Avaliação do Efeito da Escolha de Forma Algébrica Inadequada para Função de Resposta à Adubação. Brasília, Universidade de Brasília/Departamento de Estatística. 41p. [Dissertação de Mestrado]
- MONTEIRO, J.R.A., 1978. Comportamento de Funções de Produção em Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação NPK em Amendoim (*Arachis hypogaea* L.) no Estado do Maranhão. Piracicaba, ESALQ/USP. 73p. [Dissertação de Mestrado]
- MONTGOMERY, D.C., 1976. *Design and Analysis of Experiments*. New York, John Wiley. 418p.

- MORAES, R.S., 1969. Superfície Polinomial de Resposta num Ensaio de Adubação com Níveis Não Eqüidistantes. Piracicaba, ESALQ/USP. 58p. [Tese de Doutorado]
- MORAIS, O.P. de e V. de P.M. GONTIJO, 1978. Respostas da Cultura de Arroz (*Oryza sativa* L.) de Sequeiro à Fertilização NPK e à Calagem. In: Projeto Arroz-Relatório Anual 75/76. Belo Horizonte, EPAMIG. p.93-138.
- MYERS, R.H., 1971. Response Surface Methodology, Boston, Allyn e Bacon. 246p.
- (NAS-NRC) NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES - NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1961. Status and Methods of Research in Economic and Agronomic Aspects of Fertilizer Response and use. Publication 918, Washington.
- NAGAI, V.; N.M. SILVA e T. IGUE, 1979. Aplicação do Modelo Polinomial Quadrático ao Estudo de Experimentos de Adubação em Algodoeiro. In: Reunião Internacional de Biometria, Região Brasileira, Piracicaba, 1975. Fundação Cargill. p.78-100.
- NEVES, O.S. e Outros, 1960. Ensaio de Adubação do Algodoeiro. Boletim nº 114 do Instituto Agrônômico. Campinas, Instituto Agrônômico. 33p.
- NICOLELLA, G., 1981. O Uso de Superfície de Resposta na Interpretação de Ensaio de Adubação NPK em Plantações de Cacau (*Theobroma cacao* L.). Piracicaba, ESALQ/USP. 91p. [Dissertação de Mestrado]

- OLIVEIRA, L.M. de, 1974. Eficiência de Delineamentos para Ajustamento de Superfícies de Resposta. Piracicaba, ESALQ/USP. 61p. [Dissertação de Mestrado]
- OSTLE, B., 1954. *Statistics in Research*. Ames, Iowa State College Press, 487p.
- PIMENTEL GOMES, F., 1968. Novos Aspectos do Estudo Econômico de Adubação. *Fertilité*, Paris, 34: 3-9.
- PIMENTEL GOMES, F., 1978. *Curso de Estatística Experimental*. 8ª ed. São Paulo, Livraria Nobel. 430p.
- PIMENTEL GOMES, F. e H. CAMPOS, 1972. The Efficiency of Factorial 3^3 Designs as Compared to a Central Composite Rotatable Design. *Potash Review*, Berna, Fevereiro. 3p.
- PIRES, V.M., 1979. Análise de Superfície de Resposta em Condições de Risco Quando as Informações são Escassas. Um Exemplo com a Cultura do Milho. Viçosa, U.F.V. 69p. [Tese de Mestrado]

- RIBOLDI, J., 1978. Ajustamento de Duas Superfícies de Resposta Usadas em Ensaio de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP. 81p. [Dissertação de Mestrado]
- ROJAS, B.A., 1980. Diseño de Experimentos de Fertilizantes. *Agrociência*, Chapingo, 40: 191-202.
- SEARLE, S.R., 1971. *Linear Models*. New York, John Wiley. 532p.
- SHIROSE, I.; R. CARVALHO; V.L.P. FERREIRA; R.L. CARVALHO, 1978. Aplicação de metodologia de superfície de resposta na determinação de níveis ótimos de açúcar e sal na paçoca de soja. *Coletânea do Instituto de Tecnologia de Alimentos*, Campinas, 9: 239-256.
- SILVA, I.P. da, 1978. Interpretação Econômica de Ensaio de Adubação de Milho em Pernambuco. ESALQ/USP, Piracicaba. 138p. [Dissertação de Mestrado]
- SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1967. *Statistical Methods*. 6ª ed., Ames, Iowa State College Press. 593p.
- TEIXEIRA, T.D., 1969. Superfície Quadrática e suas Aplicações na Análise Econômica de Experimentos. Viçosa, U.F.V. 164p. [Tese de Mestrado]
- VIEIRA, S., 1970. Aspectos das Funções de Produção Ajustadas aos Ensaio Fatoriais 3^3 de Adubação. Piracicaba, ESALQ/USP. 160p. [Tese de Doutorado]

VIEIRA, S., 1978. Estudo Econométrico de Funções de Produção para Adubação. In: Reunião Comemorativa dos Noventa Anos do Instituto Agronômico. Campinas, Instituto Agronômico. 13p.

VIEIRA, S.; H.V. de ARRUDA e R. HOFFMANN, 1971. Estudo Comparativo de Três Funções na Análise Econométrica de Experimentos de Adubação. Convênio ESCO-MA/ESALQ-USP, Piracicaba. 111p.

WINER, B.J., 1970. Statistical Principles in Experimental Design. New York, McGraw-Hill. 672p.

ZELLEN, M., 1957. The Analysis of Covariance for Incomplete Block Design. Biometrics, Raleigh, 13: 309-332.

7. APÊNDICE

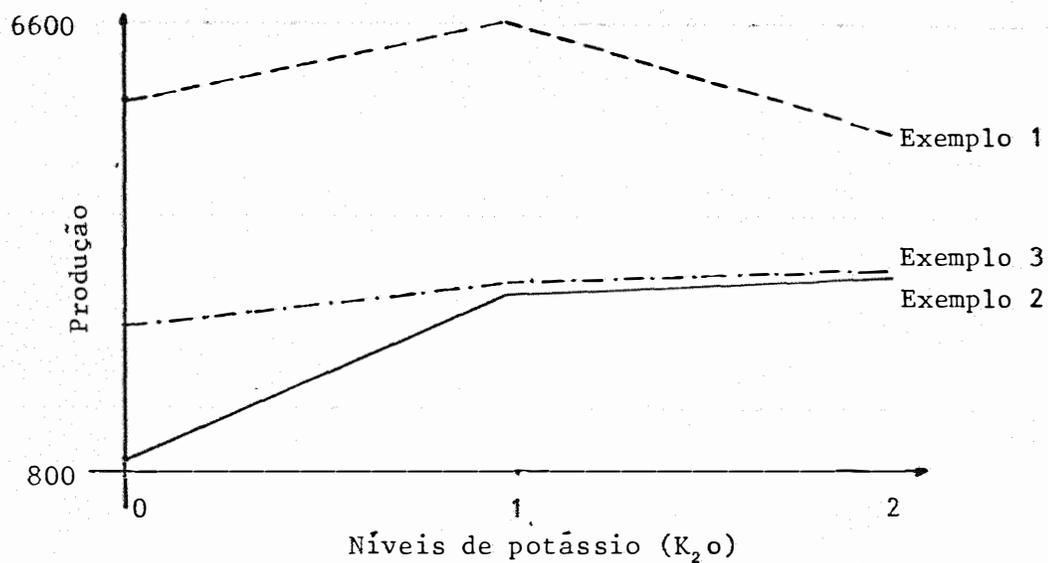
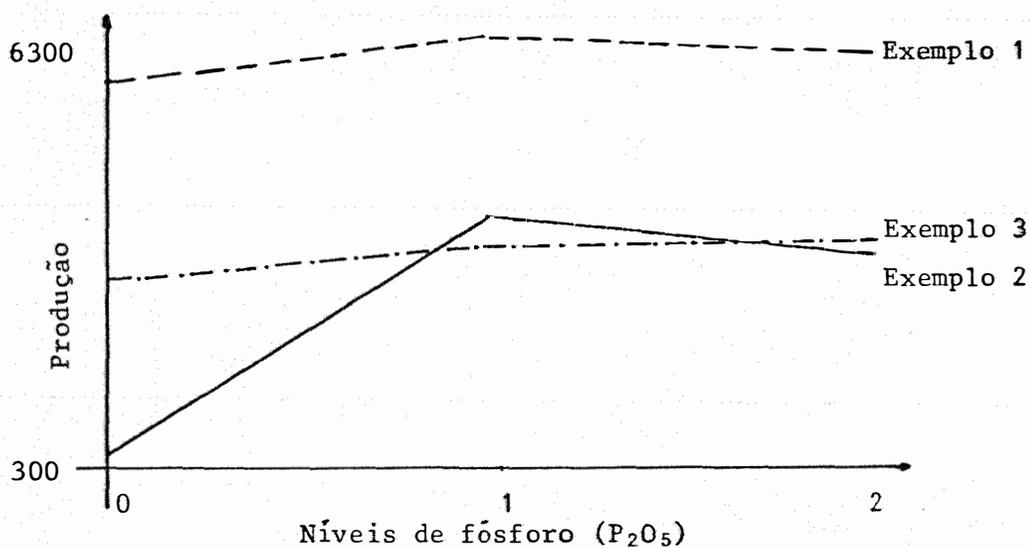
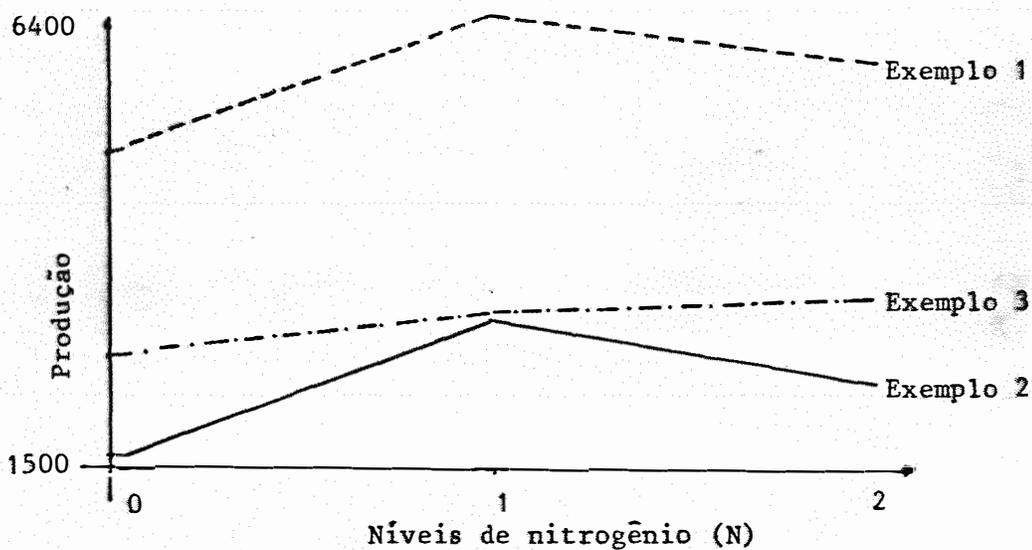
Apêndice 1 - Valores observados, relativos às variáveis auxiliares nos exemplos considerados.

Tratamentos	Altura da planta			Diâmetro da copa			Nº de internódios		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
000	90,6	70,6	81	115,4	58,1	87	19	15	34
010	96,6	76,2	86	137,8	84,0	111	23	18	35
020	91,9	83,4	88	132,3	89,0	110	23	20	35
001	92,8	76,0	84	137,2	85,6	111	22	20	35
011	96,2	88,5	92	136,5	114,2	125	24	23	31
021	104,4	89,6	97	141,0	124,8	133	22	24	36
002	95,5	76,7	86	113,6	88,9	101	20	19	31
012	103,9	88,8	96	134,9	119,4	127	23	23	35
022	91,6	91,9	92	142,6	128,2	135	22	25	36
100	99,2	78,4	89	144,2	86,2	115	24	22	28
110	94,0	73,5	84	130,6	85,5	108	23	19	31
120	100,0	71,5	86	134,5	94,6	115	21	18	33
101	107,0	81,4	94	132,5	86,4	109	21	21	39
111	95,8	103,0	99	145,3	151,8	149	21	24	33
121	101,4	99,0	100	141,0	145,9	143	23	25	33
102	94,1	84,2	89	136,7	96,1	116	22	20	35
112	99,8	105,5	103	135,1	153,1	144	23	25	33
122	99,6	104,9	102	130,1	153,2	142	23	22	36
200	94,9	62,0	78	122,2	72,8	98	22	16	33
210	89,9	71,2	81	127,4	90,5	109	22	20	29
220	87,8	76,2	82	120,1	96,2	108	21	19	32
201	94,1	85,9	90	136,6	102,9	120	24	24	34
211	105,6	103,8	105	152,1	149,1	151	24	25	37
221	88,8	94,6	92	141,0	145,9	143	23	23	35
202	97,8	81,4	90	132,0	96,6	114	26	22	36
212	95,8	93,4	95	140,2	132,5	136	23	25	35
222	91,5	106,9	99	137,5	150,2	144	24	25	33

Apêndice 3 - Matriz de dispersão das estimativas dos parâmetros ajustadas pelas três variáveis auxiliares, exemplo 2.

0,037037	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,230004	0,084425	0,107256	-0,011779	-0,010991	-0,044547	-0,046203	-0,119210	-0,119100											
0,343303	0,223751	0,016270	0,035106	-0,072452	-0,111340	-0,228148	-0,214085												
0,475311	0,033762	0,022822	0,096937	-0,136037	-0,282452	-0,294372													
	0,108727	-0,005666	-0,000942	-0,012921	-0,007852	-0,017858													
	0,156309	0,002240	0,096681	-0,042762	-0,049681	-0,000665													
		0,118341	0,041475	0,096370	0,099681														
			0,123145	0,129749	0,092424														
				0,364363	0,276264														
					0,348481														

simétrica



Apêndice 6 - Representação gráfica das produções médias nos três níveis de N, P_2O_5 e K_2O .

Apêndice 7 - Valores observados e estimados da produção, no exemplo 1.

Valores obser- vados	Valores estimados				
	Sem variáveis auxiliares	Com variáveis auxiliares			
		Altura	Diâmetro	Número	as três
4436	5102,6 ± 1322,4	5109,3	4671,2	5378,7	5026,2
6030	5551,0 ± 1084,6	5523,9	5763,8	5484,3	5679,0
5090	5102,6 ± 1322,4	5243,8	5447,5	5178,5	5188,6
5855	5462,3 ± 1084,6	5502,7	5796,9	5329,3	5764,7
5935	6026,0 ± 943,5	6069,2	5502,8	5826,6	5368,5
5680	5794,6 ± 1084,6	5722,6	5701,1	5913,5	5749,6
3620	3468,1 ± 1322,4	3443,7	3215,6	3530,9	3156,9
3344	4146,8 ± 1084,6	4055,0	4287,4	4021,4	3935,8
4795	4030,4 ± 1322,4	4112,3	4395,8	4100,6	4839,4
6034	6056,1 ± 1084,6	6017,0	6803,0	5734,8	6440,6
6305	6506,9 ± 943,5	6559,0	6292,8	6396,0	6089,8
6835	6162,7 ± 1084,6	6097,8	6348,7	6247,4	6467,0
7080	6850,4 ± 943,5	6766,4	6568,8	7005,4	6583,8
7010	7416,3 ± 943,5	7508,1	7387,1	7660,0	8010,0
7295	7187,0 ± 943,5	7167,8	7053,9	7105,9	6806,8
6760	5290,6 ± 1084,6	5362,0	5642,0	5331,4	6542,8
4540	5971,5 ± 943,5	5980,9	5769,3	5979,1	5714,2
5440	5857,3 ± 1084,6	5837,6	5641,1	5816,9	5123,1
5195	5136,0 ± 1322,4	5119,6	4883,1	5220,8	4904,9
6079	5589,1 ± 1084,6	5628,6	5472,6	5640,6	5595,1
4550	5246,9 ± 1322,4	5251,1	5148,4	5250,6	5120,3
6275	6364,8 ± 1084,6	6425,1	6229,2	6350,2	6256,7
7345	6932,8 ± 943,5	6816,9	6214,1	6896,1	7247,0
6265	6705,8 ± 1084,6	6761,6	6859,7	6632,1	6890,8
3715	5239,4 ± 1322,4	5221,8	5160,2	5066,3	4763,4
7475	5922,5 ± 1084,6	5918,9	5946,7	6136,9	6356,0
6050	5810,4 ± 1322,4	5798,7	5893,7	5733,3	5760,0

Apêndice 8 - Valores observados e estimados da produção, no exemplo 2.

Valores obser- vados	Valores estimados				
	Sem variáveis auxiliares	Com variáveis auxiliares			
		Altura	Diâmetro	Número	as três
298	-898,5 ± 1814,4	-777,0	-861,4	-991,9	-1216,1
692	1424,0 ± 1488,2	1282,4	1460,3	1020,3	1667,0
958	100,8 ± 1814,6	1054,2	759,7	174,7	547,6
235	322,5 ± 1488,2	-129,2	130,0	323,4	-160,6
2407	3494,0 ± 1294,6	3172,1	2937,6	3463,2	2979,3
3215	3019,7 ± 1488,2	2709,2	2953,0	3011,5	3078,9
470	-437,7 ± 1814,4	-271,0	202,7	-422,5	1,9
2895	3582,8 ± 1488,2	3571,7	3432,8	3599,5	3500,6
3395	395,7 ± 1814,4	3793,9	752,6	4031,2	3649,9
206	464,2 ± 1488,2	1209,1	1480,1	810,9	897,6
752	2803,6 ± 1294,6	2028,9	1638,3	2745,7	1380,2
912	1497,3 ± 1488,2	708,3	1209,7	1414,5	1078,7
673	1747,3 ± 1294,6	1219,8	272,5	1680,4	53,4
6695	4935,6 ± 1294,6	3565,2	2662,0	4709,6	2792,2
6255	4478,2 ± 1294,6	4417,6	4599,7	4537,9	4879,1
372	1049,3 ± 1488,2	1080,5	819,9	975,6	765,8
6345	5086,5 ± 1294,6	5791,8	6099,3	5164,3	6504,1
5330	5478,0 ± 1488,2	5546,4	5498,3	5273,2	6179,3
477	-326,8 ± 1814,4	-625,2	-67,6	-542,2	-209,3
2460	2029,4 ± 1488,2	1748,3	1497,0	2046,1	1238,7
1079	413,1 ± 1814,4	1175,2	745,4	800,2	570,4
267	1018,4 ± 1488,2	1394,3	1063,8	1100,6	923,8
5115	4223,5 ± 1294,6	5214,1	6169,3	4243,6	5624,5
2160	3782,9 ± 1488,2	3486,3	3975,3	3720,5	4380,6
323	795,5 ± 1814,4	61,2	308,6	356,8	173,1
4655	4436,5 ± 1488,2	3668,8	3860,7	4466,8	3973,0
4595	4844,8 ± 1814,4	4977,2	4604,5	4905,1	4941,0

Apêndice 9 - Valores observados e estimados da produção, no exemplo 3.

Valores observados	Valores estimados			
	Sem variáveis auxiliares	Com variáveis auxiliares		
		Altura	Diâmetro	Número
2166	2169 ± 199	2171	2147	2192
2657	2583 ± 163	2583	2601	2620
2586	2626 ± 199	2628	2650	2619
2423	2482 ± 163	2505	2527	2520
2953	2985 ± 142	2979	2947	2907
3102	3057 ± 163	3090	3083	3072
2559	2473 ± 199	2478	2486	2423
2855	3006 ± 163	3012	2992	3038
3306	3167 ± 199	3161	3176	3183
2532	2488 ± 163	2498	2577	2406
2768	2864 ± 142	2854	2805	2855
3012	2869 ± 163	2857	2875	2875
3028	2923 ± 142	2925	2846	3013
2451	3359 ± 142	3357	3403	3338
3131	3423 ± 142	3424	3420	3380
2915	2978 ± 163	2973	2993	2988
3546	3472 ± 142	3479	3502	3459
3590	3596 ± 163	3598	3573	3625
2577	2557 ± 199	2555	2555	2576
2734	2896 ± 163	2892	2868	2859
2884	2863 ± 199	2867	2859	2879
3002	3056 ± 163	3085	3083	3048
3685	3483 ± 142	3501	3553	3539
3593	3480 ± 163	3504	3528	3518
3217	3232 ± 199	3231	3227	3219
3689	3690 ± 163	3684	3668	3690
3713	3776 ± 199	3777	3774	3732