

# ALGUNS PARADOXOS EM MODELOS DEA-BCC: EFICIÊNCIAS NEGATIVAS E INEXISTÊNCIA DE RETORNOS DE ESCALA

**João Carlos Correia Baptista Soares de Mello (UFF)**

jcsmello@pesquisador.cnpq.br

**Lidia Angulo Meza (UFF)**

lidia\_a\_meza@yahoo.com

**Eliane Goncalves Gomes (Embrapa)**

eliane.gomes@embrapa.br

**Luiz Biondi Neto (UERJ)**

luizbiondi@terra.com.br



*O modelo DEA-BCC é usado em situações onde as unidades avaliadas são de tamanhos bem diferentes e é necessário levar em conta efeitos de escala. No entanto as propriedades deste modelo são, muitas vezes, mal compreendidas. Além das conhecidas distorções devido à existência de DMUs eficientes à partida mostra-se neste artigo a existência de duas outras propriedades problemáticas: a existência de eficiências negativas e os nunca crescentes retornos de escala. As primeiras surgem em situações tipo avaliação cruzada, devido à existência de um termo independente. Já a inexistência de retornos crescentes de escala advém da convexidade da fronteira.*

*Palavras-chaves: DEA, eficiências negativas, Retornos de escala, Paradoxos*

## 1. Introdução

Como é amplamente conhecido, os modelos DEA permitem duas formulações duais e, portanto, equivalentes (LINS e ANGULO-MEZA, 2000). A formulação dos multiplicadores do modelo DEA CCR (CHARNES *et al.*, 1978) estabelece que os pesos ou multiplicadores das variáveis devem ser calculados de forma a maximizar a eficiência de cada DMU. É imposta a restrição de que esses pesos quando aplicados às outras DMUs não podem gerar eficiências maiores do que 1 (considerando a orientação a *inputs*). Como existe a restrição padrão de que os multiplicadores são todos não negativos, e como os valores dos *inputs* e *outputs* são também não negativos, os pesos de uma DMU aplicados a qualquer outra fornecem um índice de eficiência contido no intervalo [0,1].

No caso do modelo DEA BCC (BANKER *et al.*, 1984), o modelo dos multiplicadores é obtido através do dual do modelo do envelope. Como este modelo tem uma restrição de igualdade, existe uma variável livre no modelo dos multiplicadores e, portanto, não se pode garantir a não negatividade dos índices de eficiência quando os pesos de uma DMU são utilizados para outra, em situações típicas de Avaliação Cruzada (SEXTON, 1986) ou no cálculo de alguns índices de eficiência não radial (GONZALEZ-ARAYA, 2003; LINS *et al.*, 2004).

Neste artigo mostra-se que uma pequena alteração intuitiva no modelo dos multiplicadores corrige essa situação. No entanto, gera uma profunda mudança no modelo dual (modelo do envelope), a qual provoca alterações da fronteira e, em casos extremos, pode chegar a provocar perda de sua convexidade.

Por outro lado, o modelo DEA BCC é também conhecido como de retornos variáveis de escala. Usando o modelo suavizado, a fim de poder calcular derivadas (SOARES DE MELLO *et al.*, 2002; SOARES DE MELLO *et al.*, 2004), pode-se demonstrar que o modelo DEA BCC nunca apresenta produtividade marginal positiva, já que tem a exigência de convexidade. Isto o descaracteriza como um modelo de retornos variáveis de escala.

Este trabalho mostra o desenvolvimento teórico das duas afirmações acima, bem como exemplos numéricos e ilustrações gráficas.

## 2. Eficiências negativas no modelo DEA BCC

O modelo DEA-BCC dos multiplicadores, orientado a *inputs*, é apresentado em (1), onde  $o$  é a DMU em análise;  $\mu_{r_o}$  são os multiplicadores não negativos dos *outputs*,  $v_{i_o}$  são os multiplicadores não negativos dos *inputs*,  $y_{rj}$  é o *output*  $r$  da DMU  $j$ ,  $x_{ij}$  é o *input*  $i$  da DMU  $j$ . O termo  $\mu_{*o}$  representa o coeficiente linear do hiperplano suporte e pode assumir qualquer valor real.

$$\text{Max } \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{ro} y_{ro} + \mu_{*o}}{\sum_{i=1}^m v_{io} x_{io}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{r=1}^s \mu_{ro} y_{rj} + \mu_{*o}}{\sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij}} \leq 1, \forall j \tag{1}$$

$$v_{io}, \mu_{ro} \geq 0, \mu_{*o} \in \Re$$

Nas restrições que aplicam os pesos da DMU em análise às outras DMUs, o primeiro termo tem o sinal determinado pelo numerador. Caso o  $\mu_{*o}$  seja suficientemente negativo, este termo poderá ser negativo.

Para o caso de apenas um *output*, a simples análise do numerador do modelo (1) mostra que os pesos de uma DMU  $o_1$  aplicados à DMU  $o_2$  geram eficiência negativa se o *output* da DMU  $o_2$  for menor que  $-\mu_o/\mu$  da DMU  $o_1$  (SOARES DE MELLO, 2002).

A Tabela 1 traz dados e resultados de um exemplo numérico, que ilustram a situação anteriormente descrita. É importante ressaltar que, como para as DMUs eficientes existem múltiplos pesos ótimos, foram apresentados os primeiros pesos encontrados pelo *software* utilizado, o SIAD (ANGULO-MEZA *et al.*, 2005).

| DMU | Input | Output | Pesos |       |            | Eficiência |
|-----|-------|--------|-------|-------|------------|------------|
|     |       |        | $v$   | $\mu$ | $\mu_{*o}$ |            |
| A   | 4     | 10     | 0,250 | 0,375 | -2,750     | 1,000      |
| B   | 1     | 5      | 1,000 | 0,000 | 1,000      | 1,000      |
| C   | 2     | 7      | 0,500 | 0,000 | 0,500      | 0,500      |
| D   | 1     | 8      | 1,000 | 0,125 | 0,000      | 1,000      |
| E   | 6     | 6      | 0,167 | 0,000 | 0,167      | 0,167      |

Tabela 1 - Dados do exemplo numérico.

Como pode ser observado, o  $\mu_{*o}$  da DMU A é negativo. Quando o multiplicador do *output* único ( $\mu=0,375$ ) e o termo independente ( $\mu_{*o}=-2,750$ ) forem aplicados às outras DMUs, são geradas medidas negativas de eficiência para as DMUs que tenham *output* inferior a 7,333. Isto acontece com as B, C e E, conforme Tabela 2. Nesta tabela são apresentadas as eficiências das DMUs quando calculadas como os pesos das outras DMUs, uma situação semelhante à Avaliação Cruzada. A coluna indica a DMU avaliada utilizando os pesos da DMU da linha correspondente. Por exemplo, a DMU B avaliada com os pesos da DMU A tem uma eficiência  $-3,500$ . Este é um resultado que não tem interpretação na teoria clássica de eficiência (COELLI *et al.*, 1998).

|  |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|
|  | A | B | C | D | E |
|--|---|---|---|---|---|

|   |       |        |        |       |        |
|---|-------|--------|--------|-------|--------|
| A | 1,000 | -3,500 | -0,250 | 1,000 | -0,333 |
| B | 0,250 | 1,000  | 0,500  | 1,000 | 0,167  |
| C | 0,250 | 1,000  | 0,500  | 1,000 | 0,167  |
| D | 0,313 | 0,625  | 0,438  | 1,000 | 0,125  |
| E | 0,250 | 1,000  | 0,500  | 1,000 | 0,167  |

Tabela 2 - Matriz tipo Avaliação Cruzada para o exemplo numérico.

### 3. Proposto de modelo BCC com correção de não negatividade

As eficiências negativas surgem pelo fato de as restrições do modelo DEA BCC orientado a *input* apenas imporem que os pesos de uma DMU quando aplicados aos *inputs* e *outputs* de outras gerem eficiências não superiores a 1. Como uma das variáveis é livre e números negativos são evidentemente inferiores a 1, não há impedimento para surgirem eficiências negativas.

Este problema é facilmente resolvido restrições adicionais: os pesos de uma DMU aplicados às variáveis de outra só podem valores não negativos para as medidas de eficiência. Este modelo, aqui chamado DEA BCC corrigido orientado a *input*, é apresentado em (2). A forma linear de (2) é apresentada em (3). Este modelo aplicado ao exemplo numérico da Tabela 1, gera os resultados da Tabela 3.

$$\text{Max } \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{ro} y_{rj} + \mu_{*o}}{\sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij}}$$

sujeito a

$$0 \leq \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{ro} y_{rj} + \mu_{*o}}{\sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij}} \leq 1$$

$$v_{io}, \mu_{ro} \geq 0, \mu_{*o} \in \mathfrak{R}$$

(2)

$$\text{Max } \sum_{r=1}^s \mu_{ro} y_{rj} + \mu_{*o}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{ro} y_{rj} + \mu_{*o} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{ro} y_{rj} + \mu_{*o} \geq 0$$

$$v_{io}, \mu_{ro} \geq 0, \mu_{*o} \in \mathfrak{R}$$

(3)

| DMU | Input | Output | Pesos | Eficiência |
|-----|-------|--------|-------|------------|
|-----|-------|--------|-------|------------|

|   |   |    | $\nu$ | $\mu$ | $\mu^*_o$ |       |
|---|---|----|-------|-------|-----------|-------|
| A | 4 | 10 | 0,250 | 0,083 | -0,417    | 0,417 |
| B | 1 | 5  | 1,000 | 0,000 | 1,000     | 1,000 |
| C | 2 | 7  | 0,500 | 0,000 | 0,500     | 0,500 |
| D | 1 | 8  | 1,000 | 0,000 | 1,000     | 1,000 |
| E | 6 | 6  | 0,167 | 0,000 | 0,167     | 0,167 |

Tabela 3 - Exemplo numérico para o modelo DEA-BCC corrigido.

Observa-se que o modelo corrigido apenas alterou a eficiência da DMU A. Tal fato aconteceu por ser esta DMU a que gerava eficiências negativas, quando avaliava outras. De fato, o termo  $-\mu^*_o/\mu$  da DMU A é neste modelo igual a 5,00, que é o menor dos *outputs* do conjunto de DMUs.

A matriz do tipo Avaliação Cruzada para o modelo DEA BCC corrigido é apresentada na Tabela 4. Observa-se que todas as avaliações feitas por todas as DMUs geram eficiências entre 0 e 1. É interessante notar que a DMU B avaliada pela DMU A tem eficiência 0, o que significa que a restrição de não negatividade referente à DMU B foi a restrição ativa no modelo DEA BCC corrigido orientado a *input* da DMU A.

|   | A     | B     | C     | D     | E     |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| A | 0,417 | 0,000 | 0,333 | 1,000 | 0,056 |
| B | 0,250 | 1,000 | 0,500 | 1,000 | 0,167 |
| C | 0,250 | 1,000 | 0,500 | 1,000 | 0,167 |
| D | 0,250 | 1,000 | 0,500 | 1,000 | 0,167 |
| E | 0,250 | 1,000 | 0,500 | 1,000 | 0,167 |

Tabela 4 - Matriz tipo Avaliação Cruzada para o modelo DEA BCC corrigido.

#### 4. Interpretação da restrição adicional

Como as restrições de não negatividade são, na verdade, restrições aos pesos, elas podem ser substituídas por uma ou mais DMUs artificiais (THANASSOULIS e ALLEN, 1988; GONÇALVES, 2003). Como a DMU A foi a única que teve a eficiência alterada, a fronteira correspondente ao modelo corrigido é obtida com a introdução de uma DMU com o mesmo *output* da DMU A e *input* igual ao quociente entre o *input* da DMU A e a sua eficiência no modelo corrigido. Com isto, a DMU artificial tem *output* de valor 10 e *input* 1,667.

Na Figura 1 apresentam-se as fronteiras referentes ao modelo DEA BCC e ao DEA BCC corrigido. A fronteira em preto em preto representa a parte comum aos dois modelos; linha contínua em vermelho refere-se apenas ao modelo DEA BCC e a linha vermelha tracejada apenas ao modelo DEA BCC corrigido.

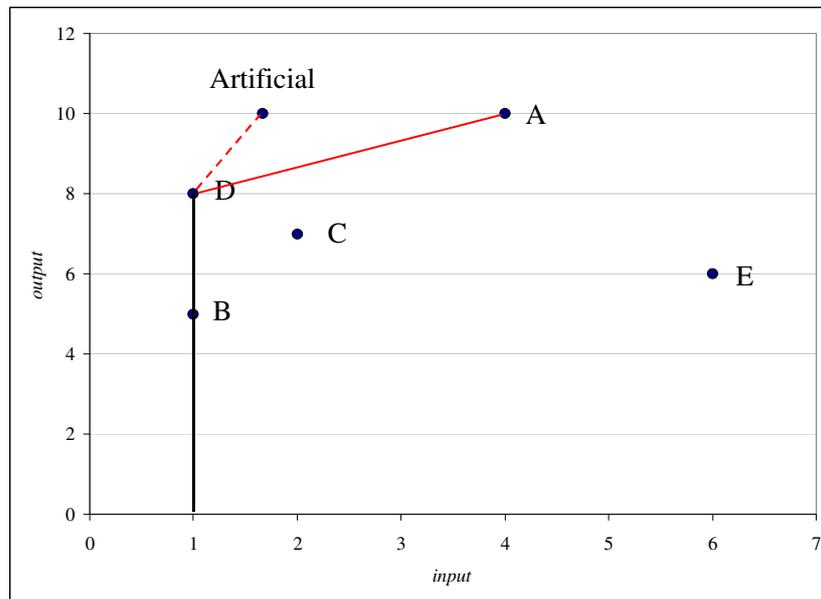


Figura 1 - Fronteiras do modelo DEA BCC original e do modelo corrigido.

A representação geométrica pode ser generalizada para qualquer número de inputs e outputs de forma algébrica. Para tal, constrói-se o dual do modelo (3), conforme formulação (4).

Min  $\theta_o$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda'_j \geq y_{ro}, \forall r$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta x_{io}, \forall i \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \lambda'_j = 1, \forall j$$

$$\lambda_j, \lambda'_j \geq 0, \forall j$$

As restrições adicionais de (3), uma para cada DMU, geram igual número de variáveis de decisão adicionais  $\lambda'$ . Ressalta-se que quando o somatório de todos os  $\lambda'$  não for igual a 0, o somatório dos  $\lambda$  não será unitário e, portanto, não haverá garantia de convexidade no modelo corrigido.

Pelo teorema das folgas complementares, o produto de  $\lambda'$  pela folga da restrição que lhe deu origem deve ser 0. Em consequência,  $\lambda'$  só pode ser diferente de zero se a folga na restrição adicional do modelo (3) for 0, ou seja, se a restrição estiver ativa.

No exemplo numérico apresentado só a DMU A tinha a eficiência alterada e era a restrição relativa à DMU B que provocava essa alteração. Assim, com exceção do  $\lambda'_B$  para a DMU A, todos os outros  $\lambda'$  são nulos.

## 6. Retornos de escala em modelos DEA BCC

O modelo BCC (BANKER *et al.*, 1984) também é conhecido como de retornos variáveis de escala. No modelo de um input e um output ilustrado na figura 2 é costume considerar que a região AB é de retornos crescentes de escala e a região BC como de retornos decrescentes.

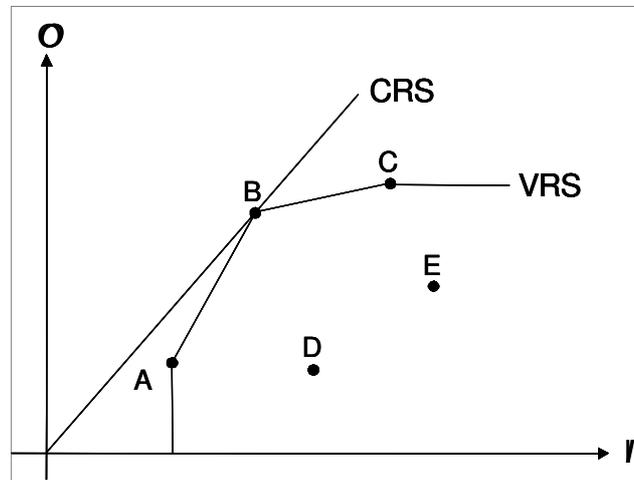


Figura 2. Fronteiras CRS e VRS.

No entanto, a afirmação anterior esbarra no conceito de retorno de escala. Retornos crescentes de escala correspondem à produtividade marginal positiva, ou:

$$\frac{\Delta}{\Delta I} \left( \frac{\Delta O}{\Delta I} \right) \geq 0 \quad (5)$$

Já os retornos decrescentes de escala correspondem à produtividade marginal negativa, ou:

$$\frac{\Delta}{\Delta I} \left( \frac{\Delta O}{\Delta I} \right) \leq 0 \quad (6)$$

Para fins de análise de retornos será usado o modelo DEA suavizado (SOARES DE MELLO, 2002; SOARES DE MELLO *et al.*, 2002; SOARES DE MELLO *et al.*, 2004; NACIF, 2005). Este modelo é o mais próximo possível da fronteira DEA tradicional, mantém as suas propriedades e permite o cálculo de derivadas. Na figura 2, observa-se que a fronteira DEA-BCC tem sempre concavidade voltada para baixo, ou seja:

$$\frac{d^2 O}{dI^2} \leq 0 \quad (7)$$

Ora a inequação (7) é a forma infinitesimal da inequação (6). Tem-se assim que o modelo DEA-BCC apresenta sempre produtividade marginal negativa, ou retornos não crescentes de escala.

## 5. Conclusões

Neste artigo mostrou-se que o modelo DEA BCC orientado a *input* pode gerar situações paradoxais, devido à possibilidade de ocorrer eficiência de valor negativo, ocultas no modelo. Mostrou-se ainda que uma pequena alteração intuitiva no modelo dos multiplicadores corrige essa situação. No entanto, esta alteração no modelo dos multiplicadores gera uma profunda

mudança no modelo dual, o modelo do envelope, que provoca alterações da fronteira e, em casos extremos, a perda de convexidade.

Finalmente, deve se observar que as situações aqui apresentadas não se aplicam ao modelo CCR nem ao modelo BCC orientado a *outputs*.

Quanto aos retornos de escala, deve-se verifica se a expressão “retornos crescentes de escala” poderá ter um significado diferente do significado econômico clássico. A construção de um verdadeiro modelo de retornos variáveis de escala implica no desenvolvimento de fronteira com concavidade negativa.

## 7. Bibliografia

ANGULO-MEZA, L., BIONDI NETO, L., SOARES DE MELLO, J. C. C. B. & GOMES, E. G. *ISYDS - Integrated System for Decision Support (SIAD Sistema Integrado de Apoio a Decisão): A Software Package for Data Envelopment Analysis Model*. Pesquisa Operacional. Vol. 25, n. 3, p. 493-503, 2005.

BANKER, R. D., CHARNES, A. & COOPER, W. W. *Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis*. Management Science Vol. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.

CHARNES, A., COOPER, W. W. & RHODES, E. *Measuring the efficiency of decision-making units*. European Journal of Operational Research. Vol. 2, n., p. 429-444, 1978.

COELLI, T., RAO D.S.P. & BATTESE, G. E. *An introduction to efficiency and productivity analysis*: Kluwer Academic Publishers, Vol., 1998

GONÇALVES, D. A. *Avaliação de Eficiência de Fundos de Investimentos Financeiros: Utilização de DMUs Artificiais em Modelos DEA com Outputs Negativos*. (Doutorado). Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

GONZALEZ-ARAYA, M. C. *Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações*. (Doutorado). Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

LINS, M. P. E. & ANGULO-MEZA, L. *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Rio de Janeiro: Editora da COPPE/UFRJ, Vol., 2000

LINS, M. P. E., ANGULO-MEZA, L. & MOREIRA DA SILVA, A. C. *A multi-objective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis*. Journal of the Operational Research Society. Vol. 55, n., p. 1090–1101, 2004.

NACIF, F. B. *Suavização da fronteira DEA: modelo geral BCC n-dimensional*. Engenharia de Produção, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2005.

**SEXTON, T. R.** *Measuring Efficiency: An assessment of Data Envelopment Analysis. New Directions For Program Evaluation.* San Francisco: Jossey-Bass, Vol., 1986, 32

**SOARES DE MELLO, J. C. C. B.** *Suavização da fronteira DEA com o uso de métodos variacionais.* Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.

**SOARES DE MELLO, J. C. C. B., GOMES, E. G., BIONDI NETO, L. & LINS, M. P. E.** *Suavização da Fronteira DEA: O caso BCC tridimensional.* Investigação Operacional. Vol. 24, n., p. 89-107, 2004.

**SOARES DE MELLO, J. C. C. B., LINS, M. P. E. & GOMES, E. G.** *Construction of a smoothed DEA frontier.* Pesquisa Operacional. Vol. 28, n. 2, p. 183-201, 2002.

**THANASSOULIS, E. & ALLEN, R.** *Simulating Weight restrictions in Data Envelopment Analysis by means of unobserved DMUs.* Management Science. Vol. 44, n., p., 1988.