$F(x) \geqslant y \quad C(w,y) = \min_x \{w * x\}$

$C(w,y) = \min_x \{w * x\} \quad F(x) \geqslant y$

$C = A \cap B \quad C(w,y) = \min_x \{w * x\}$

$F(x) \geqslant y \quad C(w,y) = \min_x \{w * x\}$

$C(w,y) = \min_x \{w * x\} \quad F(x) \geqslant y$

$C = A \cap B \quad C(w,y) = \min_x \{w * x\}$

$F(x) \geqslant y \quad C(w,y) = \min_x \{w * x\}$

$C(w,y) = \min_x \{w * x\} \quad F(x) \geqslant y$

$C = A \cap B \quad C(w,y) = \min_x \{w * x\}$

A Função Custo

Eliseu Alves

Embrapa

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - Embrapa
Secretaria de Administração Estratégica - SEA
Ministério da Agricultura e do Abastecimento - MA

A Função Custo

Eliseu Alves

Serviço de Produção de Informação - SPI
Brasília, DF
1996

Agradecimentos

Muitos cooperaram para que este livro fosse publicado. Gostaria, no entanto, de destacar o incentivo do Dr. Alberto Duque Portugal, Presidente da Embrapa, e da Dra. Mariza Barbosa, chefe da SEA, e a competência editorial da equipe de produção do SPI.

Ao Departamento de Economia e Sociologia Rural da ESALQ, na pessoa do professor Geraldo Sant'Ana de Camargo Barros, por ter incluído o texto na sua série didática, os meus sinceros agradecimentos.

Os Professores Maurinho Luiz dos Santos e Francisco Armando Costa, do Departamento de Economia Rural da UFV, fizeram várias sugestões que melhoram a qualidade do texto. Não têm, contudo, responsabilidades pelos erros.

Exemplares desta publicação podem ser adquiridos no
Serviço de Produção de Informação
SAIN Parque Rural. Av. W/3 Norte (final)
Caixa Postal 040315
CEP 70770-901 Brasília, DF.
Fone: (061) 348-4236
Fax: (061) 272-4168

Coordenação Editorial
Marina A. Souza de Oliveira e Araquem Calhão Motta

Capa
Sirlene Siqueira

Revisão
Corina Barra Soares

Normalização Bibliográfica
Zenaide Paiva do Rêgo Barros

Tratamento Editorial
Terezinha Santana G. Quazi

Diagramação
José Ilton Soares Barbosa

Impressão e Acabamento
Embrapa-SPI

Tiragem
500 exemplares

CIP. Brasil.Catalogação-na-publicação.
Serviço de Produção de Informação (SPI) da Embrapa.

Alves, Eliseu.

A função custo / Eliseu Alves; Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária, Secretaria de Administração Estratégica. — Brasília: Embrapa-SPI, 1996.

106p.

ISBN 85-85007-90-7

1. Matemática Econômica. I. Embrapa. Secretaria de Administração Estratégica (Brasília, DF). II. Título.

CDD 330.0151

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 2

(Continua)

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 1

O Caso Diferenciável

Esta monografia versa sobre a função custo O seu objetivo é colocar ao alcance dos economistas rurais, de forma unificada, as principais propriedades da função custo. Está dividida em três capitulos. As questões mais delicadas foram deixadas para outros dois capítulos. No primeiro capítulo, cálculo diferencial é o principal instrumento de análise.

O livro do professor Takayama (Takayama, 1991) é uma referência atual ao assunto, fornece extensa lista bibliográfica e contém um excelente apêndice matemático. Outra referência é o livro do professor Chambers, reeditado em 1994 (Chambers, 1994). O leitor de nível mais avançado deve recorrer ao livro *Generalized concavity* (Avriel et al., 1988).

Admitimos que os mercados sejam competitivos e que os estados da natureza sejam conhecidos com certeza, ou seja, a análise não incorpora o risco.

Conhecimentos de Matemática

O símbolo $w * x$ significa $w * x = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$, portanto, o produto de dois vetores; usamos também a expressão wx, que significa a mesma coisa, quando x e w forem vetores. Se forem números, a expressão representa o produto de dois números.

O instrumento de análise é o cálculo diferencial. O leitor deve recordar as condições de primeira e de segunda ordem para um máximo ou um mínimo. É importante saber aplicar as condições de primeira ordem de Kuhn-Tucker. Recorde-se também dos conceitos de funções côncavas e convexas, como também daqueles de funções semicôncavas e semiconvexas.

1. Primeiro problema: sabemos que o máximo ou o mínimo existe num ponto interior do conjunto de definição da função f(x) Segue-se que as condições de primeira ordem se verificam. Se o mínimo ocorrer na fronteira do conjunto de definição, as condições de primeira ordem podem não se verificar. Por exemplo, $f(x) = (x + 1)^2$ $x \geq 0$ Ela passa por um mínimo em x igual a zero, mas a derivada primeira, neste ponto, se iguala a dois

2. Segundo problema: não conhecemos qual é o máximo ou o mínimo e desejamos encontrá-lo. A estratégia é igualar a derivada primeira a zero e tentar resolver a equação resultante. Isto não garante, porém, que a solução encontrada seja um máximo ou um mínimo. A função $y = x^3$, definida nos números reais, varia de menos infinito a mais infinito; portanto, não admite nem máximo e nem mínimo neste conjunto. Mas a derivada primeira é nula em $x = 0$. As derivadas sucessivas são todas nulas em $x = 0$ Como a derivada segunda é negativa à esquerda de zero, segue-se que a derivada primeira é decrescente à esquerda de $x = 0$. É fácil ver que ela é crescente à direita de zero. Concluímos, assim, que o ponto $x = 0$ é um ponto de inflexão.

3. Temos de recorrer à condição de segunda ordem para o ponto em que a derivada primeira ou o gradiente, no caso de funções de várias variáveis, se igualou a zero. Se a condição de segunda ordem se verificar, temos um máximo local ou um mínimo local. Em certas condições, que devem ser verificadas, o ótimo (máximo ou mínimo) pode ser global. Na presença de restrições, as condições de primeira e de segunda ordem são mais complexas de verificar.

4. Se a matriz hensiana for negativa definida para todos os pontos do conjunto de definição, a função é estritamente côncava; se positiva definida, ela é estritamente convexa. No caso de uma função real, se a derivada segunda for negativa no conjunto de definição, a função é estritamente côncava; se positiva, ela é estritamente convexa. A recíproca não é verdadeira. A função $f(x) = -x^4$, definida no conjunto dos números reais, é estritamente côncava; no entanto, a derivada segunda é nula em $x = 0$.

Uma função é côncava, se e somente se a matriz hensiana for negativa semidefinida no conjunto de definição; para uma função convexa, requer-se que a matriz hensiana seja positiva definida.

Note-se que exige-se que a condição sobre a matriz hensiana seja válida para todos os pontos do conjunto de definição. No caso da procura de um máximo ou de um mínimo, a exigência recai apenas sobre os pontos que satisfazem as condições de primeira ordem.

Definição da Função Custo

A função custo é obtida da seguinte forma:

$$C(w, y) = \min_{x} \{w * x\}$$

Restrito a:

$$F(x) \geq y$$

Desenvolve-se a função custo para os preços de insumos positivos, $w > 0$. Depois, estende-se a mesma para $w \geq 0$. Do ponto de vista matemático, a parte mais delicada é a extensão para preços não-negativos, de modo a manter-se a continuidade da função custo em relação aos preços dos insumos. Cuidaremos desse assunto no Capítulo II. Para que exista o mínimo, requer-se apenas que F(x) seja semicontínua superior e $w > 0$. Adicionamos, contudo, as seguintes restrições: $F(x) \geq 0 \;\; \forall \;\; x \geq 0$; $F(0) = 0$; e $\lim_{x_i \to \infty} F(x) = \infty$; e $x \geq z \;\; \Rightarrow \;\; F(x) \geq F(z)$. Não é difícil provar que o mínimo existe, quando F(x) satisfaz essas condições e $w > 0$. Obviamente, trata-se do mínimo global. Para isto, seja $F(\hat{x}) \geq y$. Defina os conjuntos:

$$A = \{x : 0 \leq \;\; w * x \leq w * \hat{x}\}$$

e

$$B = \{x : F(x) \geq y\}$$

O conjunto A é compacto, como é fácil de ser demonstrado. O conjunto B é fechado, porque F(x) é semicontínua superior. Por isso, o conjunto

$$C = A \cap B$$

é compacto. Considere-se que $\hat{x}$ pertence a C e é factível, porque $F(\hat{x}) \geq y$. Portanto, $C(w, y) \leq w * \hat{x}$. Entre os vetores, z, de B, os candidatos ao mínimo precisam satisfazer $w * z \leq w * \hat{x}$ e, assim, pertencem a A. Conclui-se que o mínimo ocorre em C, que é um conjunto compacto. Como $w * x$ é função contínua de x, ela passa por um mínimo em C Dessa forma, C(w,y) é bem definida.

Admitimos, quando o cálculo diferencial é usado, que F(x) tem derivadas parciais contínuas até segunda ordem, o que implica a sua continuidade Em certas circunstâncias, podemos requerer que F(x) seja semicôncava e até semicôncava estrita. A função objetiva $w * x$ é convexa. Quando F(x) é semicôncava, o mínimo é global, como é fácil de demonstrar. Suponha que não. Como F(x) é semicôncava, o conjunto B é convexo. Seja $\hat{x}$ o mínimo global e seja $\bar{x}$ um mínimo local, que, por hipótese, não é global, ou $w*\hat{x} < w*\bar{x}$. Para $0 \leq t \leq 1$, $x(t) = t\bar{x} + (1-t)\hat{x}$ pertence a B. Mas $w * x(t) = tw * \bar{x} + (1-t)w * \hat{x}$. Como $w * \hat{x} < w * \bar{x}$, segue-se que $w * x(t) < w * \bar{x}$, para $0 < t < 1$. Como qualquer vizinhança de $\bar{x}$ contém algum x(t), segue-se que $\bar{x}$ não é um mínimo local, que contraria hipótese feita Portanto, as condições de primeira ordem dão-nos um mínimo global que pode não ser único. Mas se F(x) for estritamente semicôncava e contínua, o mínimo será único. Suponha que não. Agora, temos os dois mínimos anteriores, porém globais, ou seja, $w * \hat{x} = w * \bar{x}$. Daí se segue que x(t), anteriormente definido, é também um mínimo global. Como F(x) é estritamente semicôncava, tem-se $F(x(t)) > y$ para $0 < t < 1$. A continuidade de F(x) e $F(0) = 0$ indicam que existe k tal que $0 < k < 1$ $F(kx(t)) = y$. Portanto, $w * (kx(t)) < w * \hat{x} = w * \bar{x}$. Que é um absurdo. O mínimo fornecido pelas condições de primeira ordem é, assim, único, quando F(x) é estritamente semicôncava e contínua. Quando F(x) é estritamente semicôncava e contínua e $x \geq z \Rightarrow \quad F(x) \geq F(z)$, as derivadas parciais da função custo em relação aos preços dos insumos existem para todo $y > F(0)$. Essa proposição é demonstrada no capítulo II.

A função de Lagrange é dada por:

$$L(x, \lambda; w, y) = w * x + \lambda(y - F(x))$$

Tendo-se em conta que $i = 1, 2, \ldots, n$ e que o ótimo ocorre em $(\hat{x}, \hat{\lambda})$, podemos escrever as condições de primeira ordem para o mínimo, como se segue:

$$L_i = w_i - \hat{\lambda} F_i(\hat{x}) \geq 0 \quad (1.1)$$

$$\hat{x}_i * (w_i - \hat{\lambda} F_i(\hat{x})) = 0 \quad (1.2)$$

$$L_\lambda = y - F(\hat{x}) \geq 0 \quad (1.3)$$

$$\hat{\lambda} * (y - F(\hat{x})) = 0 \quad (1.4)$$

Se admitirmos uma solução interior $\hat{x} > 0$, 1.2, acima, exige-se que:

$$w_i = \hat{\lambda} F_i(\hat{x}) \quad \text{i=1,2, } \ldots \text{, n} \quad (1.5)$$

Usualmente, admite-se $F_i(x) > 0$, que implica ter, pela equação acima, $\hat{\lambda} > 0$, porque $w > 0$, o qual, por sua vez, tendo-se em conta a equação 1.4, implica $y = F(\hat{x})$. Admitiremos a existência da solução interior. Assim, simplificaremos as demonstrações dos teoremas.

A solução do sistema 1.1-1.4 dá-nos o vetor da demanda de insumos, ou seja, a demanda condicionada a y fixo. Adotaremos, contudo, a terminologia demanda de insumo, eliminando-se da expressão o qualificativo **condicionada**. O vetor solução é função dos preços (w) dos insumos e do nível de produção (y). Defina

$$x(w, y) = (x_1(w, p), x_2(w, p), \ldots, x_n(w, p))$$

Conseqüentemente, $C(w, p) = w * x(w, p)$.

Propriedades Gerais

As propriedades gerais são aquelas que não dependem de ser F(x) diferenciável.

Proposição 1 .

As propriedades gerais mais importantes são as seguintes.

1. $C(w, 0) = 0$ *e* $C(w, y) > 0$ *para* $y > 0$.

2. $C(tw, y) = tC(w, y)$ *para* $t \geq 0$. *Significa que a função custo é linearmente homogênea nos preços dos insumos*[1] .

3. *C(w,y) é função côncava de w. Para* $w > 0$, *é função contínua de w.*

4. *Se* $w^o \geq w^r$, *tem-se que* $C(w^o, y) \geq C(w^r, y)$, *ou seja, a função custo é crescente nos preços dos insumos.*

5. *Se* $y \geq z$, *tem-se* $C(w, y) \geq C(w, z)$, *ou seja, para se produzir mais, não se gasta menos.*

6. $\lim_{y \to \infty} C(w, y) = \infty$.

7. *A função custo é semicontínua inferior em y.*

8. *Se a função de produção é semicôncava estrita, as derivadas parciais em relação aos preços dos insumos existem, quando* $y > 0$.

Comentários:

Os dois últimos itens serão demonstrados no capitulo II. Embora, durante o desenvolvimento, matenha-se $w > 0$, as propriedades 1-7 continuam verdadeiras quando o vetor preços dos insumos tiver algumas componentes nulas, ou seja, continuam válidas, quando se estende C(w,y) em $w \geq 0$. Para se demostrar as propriedades acima, não se exige que F(x) seja diferenciável e semicôncava. Exige-se, apenas, que tenha as demais propriedades listadas, ou seja, $F(0) = 0$, $\lim_{x_i \to \infty} F(x) = \infty$; e F(x) é semicontínua superior em x. Posteriormente, vamos precisar da diferenciabilidade de F(x).

Demonstração:

Propriedade 1.

Como $F(0) = 0$, segue-se, pela definição de C(w,y), que $C(w, 0) \leq w * 0 = 0$. Como $x \geq 0$, segue-se que C(w,y) nunca é negativa. Portanto, $C(w, 0) = 0$. Se $y > 0$, a solução do problema de minimização, proposto no início deste trabalho, não pode ser $x = 0$,

[1] Esta propriedade torna inválida a função $a + b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n + dy$ para representar a função custo. Ela só é linear homogênea em w, se $a = d = 0$. Se $d = 0$, o custo total não depende do nível de produção, o que é difícil de se aceitar.

porque $F(0) = 0$. Em conseqüência, x tem alguma componente positiva. Como $w > 0$, segue-se que $C(w, y) > 0$ para $y > 0$.

Propriedade 2:

Seja $t > 0$. Para $t = 0$, ainda não definimos a função custo.

$$C(tw, y) = \min_{x} \{tw * x \quad F(x) \geq y\}$$

Seja $\bar{x}$ a solução deste problema. E seja $\hat{x}$ a solução do problema de minimização quando $t = 1$, ou seja, $C(w, y) = w * \hat{x}$. Como $F(\bar{x}) \geq y$ e $F(\hat{x}) \geq y$, temos

$$w * \hat{x} \leq w * \bar{x}$$

Tendo-se conta que $t > 0$,

$$tw * \hat{x} \leq tw\bar{x} \quad \Rightarrow \quad tC(w, y) \leq C(tw, y) \quad \text{(i)}$$

Quando $t \neq 1$, $\bar{x}$ é a solução do problema de minimização proposto. Daí se segue que $tw * \bar{x} \leq tw * \hat{x}$ e, portanto,

$$C(tw, y) \leq tC(w, y) \quad \text{(ii)}$$

Comparando-se (i) e (ii), temos:

$$C(tw, y) = tw * \hat{x} = tC(w, y)$$

Propriedade 3:

Temos de mostrar que C(w,y) é função côncava de w.

Seja $0 \leq t \leq 1$. E $w(t) = tw^1 + (1 - t)w^2$ e, ainda, $C(w^1, y) = w^1 * x^1$ e $C(w^2, y) = w^2 * x^2$. Finalmente, seja $C(w(t), y) = w(t) * x(t)$. Pela definição da função custo, tem-se:

$$w^1 * x^1 \leq w^1 x(t), \quad \text{porque} \quad F(x(t)) \geq y$$

$$w^2 * x^2 \leq w^2 x(t), \quad \text{porque} \quad F(x(t)) \geq y$$

Multiplicando-se a primeira desigualdade por t e a segunda por (1-t) e somando-se os resultados, tem-se:

$$tw^1 x^1 + (1 - t)w^2 x^2 \leq w(t)x(t)$$

E, portanto,

$$C(tw^1 + (1-t)w^2, y) \geq tC(w^1, y) + (1-t)C(w^2, y),$$

ou seja, C(w,y) é côncava em w.

Corolário 1 . *Para* $w > 0$, *C(w,y) é função contínua de w.*

Demonstração:

Uma função côncava é contínua em qualquer conjunto aberto. Como o conjunto $R^n_{++} = \{w : w > 0\}$ é aberto, por ser o espaço onde C(w,y) é definida, segue-se que C(w,y) é contínua em $w > 0$.

Corolário 2 . $C(w+z, y) \geq C(w, y) + C(z, y)$. *Esta propriedade é conhecida por superaditividade.*

Demonstração:

$C(w+z, y) = 2C(w/2 + z/2, y)$ pela propriedade 2. Pela propriedade 3,

$$C(w/2 + z/2, y) \geq 1/2C(w, y) + 1/2C(z, y)$$

e, assim, fica demonstrado o corolário.

Propriedade 4:

Seja $w^0 \geq w^r$. Sejam $x(w^0, y)$ e $x(w^r, y)$ os pontos nos quais os respectivos mínimos ocorrem, ou seja, as soluções dos dois problemas de minimização. Como elas são factíveis para se obter o nível de produção y e tendo-se em conta a definição de mínimo e que $w^r \leq w^0$, segue-se que:

$$w^r * x(w^r, y) \leq w^r * x(w^0, y) \leq w^0 * x(w^0, y)$$

Conclui-se que $C(w^r, y) \leq C(w^0, y)$, que é o que queríamos demonstrar.

Propriedade 5:

Seja $y \geq z$. É fácil ver que $\{x : F(x) \geq y\} \subset \{x : F(x) \geq z\}$. O mínimo encontrado no segundo conjunto não pode ser maior do que aquele do primeiro, porque todos os pontos do segundo conjunto pertencem ao primeiro, o que resulta $C(w, z) \leq C(w, y)$.

Propriedade 6:

Por hipótese, F(x) cresce sem limite com x. Logo, para qualquer y, existe x, tal que $F(x) \geq y$. A propriedade 5 indica que C(w,y) é função monótona de y. Dessa forma, quando y cresce sem restrição, o limite existe, podendo ser infinito. Se a função C(w,y) fosse limitada, ou seja, não ultrapassasse um dado valor, o limite de C(w,y), quando y tende para o infinito, seria finito. Como w é positivo, isto implica que x(w,y) seja também limitado, ou seja, $x(w,y) \leq \bar{x}$, para algum $\bar{x} > 0$ e para qualquer $y \geq 0$. Mas, para y suficientemente grande, $F(\bar{x}) < y$, o que é uma contradição. Assim, C(w,y) tende para o infinito com y.

Propriedades Específicas

As propriedades são designadas de específicas, porque admitimos que C(w,y) tenha derivada até a segunda ordem em w(derivadas parciais) e y.

Teorema 1 . *A derivada parcial da função custo em relação ao preço do insumo fornece a demanda desse insumo. Formalmente,*

$$\partial C(w,y)/\partial w_i = x_i(w,y)$$

Demonstração:

O teorema do envelope diz que a derivada parcial da função custo em relação ao preço do insumo, isto é, exatamente igual à derivada da função de Lagrange em relação ao preço do mesmo insumo, quando x e λ estão fixados no nível ótimo. Recordemos a função de Lagrange:

$$L(x,\lambda;w,y) = w * x + \lambda(y - F(x)) \tag{1.6}$$

$$\partial L(x,\lambda)/\partial w_i = x_i = \partial C(w,y)/\partial w_i$$

Comentários:

Este teorema indica o caminho para se recuperar a função de produção, quando a função custo é diferenciável. Deriva-se a função custo em relação ao preço de cada insumo e obtém-se um sistema de n equações em $(w_i, x_i, y \;\; i = 1, 2, \ldots, n)$. Eliminam-se os w's e, quando possível, explicita-se y em função dos x's. Convidamos o leitor a obter a função de produção a partir da seguinte função de custo:

$$C(w, y) = w_1^a w_2^{1-a} y^b \quad 0 < a < 1 \quad b > 0$$

Resposta:

$$F(x) = (A x_1^a x_2^{1-a})^{1/b} \quad A = a^{-a}(1-a)^{a-1}$$

Note-se que, se b=1, a função de produção tem a mesma fórmula da função custo. *Nesse caso, dizem-se reciprocamente duais*

Teorema 2 . *É simétrica e negativa semidefinida a matriz das derivadas parciais dos insumos em relação aos preços e é igual a:*

$$\partial^2 C(w, y)/\partial w_i \partial w_j = \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial w_1 & \partial x_1/\partial w_2 & \cdots & \partial x_1/\partial w_n \\ \partial x_2/\partial w_1 & \partial x_2/\partial w_2 & \cdots & \partial x_2/\partial w_n \\ \cdots & & & \\ \partial x_n/\partial w_1 & \partial x_n/\partial w_2 & \cdots & \partial x_n/\partial w_n \end{pmatrix}$$

Demonstração: A obtenção da matriz é imediata. É só derivar cada insumo obtido no teorema 1 em relação ao preço de cada insumo. Primeiramente, demonstraremos que a matriz é simétrica. Pelo teorema 1, $\partial C(w, y)/\partial w_i = x_i$. Logo, $\partial^2 C(w, y)/\partial w_i \partial w_j = \partial x_i/\partial w_j$. Um teorema do cálculo diferencial, o teorema de Young, afirma que, quando as derivadas parciais são contínuas,

$$\partial^2 C(w, y)/\partial w_i \partial w_j = \partial^2 C(w, y)/\partial w_j \partial w_i$$

Segue-se que $\partial x_i/\partial w_j = \partial x_j/\partial w_i$, ou seja, as derivadas cruzadas são iguais.

A matriz $D(w, y) = \partial^2 C(w, y)/\partial w_i \partial w_j$ é negativa semidefinida, porque a função C(w,y) é côncava em w. Se a matriz D(w,y) fosse negativa definida, ou seja, $w' D(w, y) w < 0$ para todo $w > 0$, C(w,y), seria estritamente côncava em R^m_{++}. Como já sabemos, C(w,y) é côncava em R^m_{++}, se e somente se $w' D w \leq 0$ para todo $w > 0$.

Corolário 3 . *Como a matriz D(w,y) é negativa semidefinida, um aumento do preço do insumo x_i não aumentará seu consumo. Se a referida matriz for negativa definida, se o preço do insumo i crescer, teremos uma redução de seu uso.*

Demonstração:

A veracidade da proposição é decorrência da alternância dos sinais dos menores principais sucessivos da matriz D(w,y), quando ela é negativa definida, sendo todos os menores principais de ordem 1 menores ou igual a zero. Se os menores principais sucessivos alternarem sinais e forem todos diferentes de zero, a função será estritamente côncava (a recíproca desta proposição não é verdadeira). Neste caso, o aumento do preço do insumo i reduz seu consumo. Mas note-se que C(w,y) é linear homogênea em w e, portanto, não pode ser estritamente côncava em w. Em virtude de ser C(w,y) linear homogênea em w, tem-se:

$$C((w + aw)/2, y)) = C((1 + a)/2w), y) = ((1 + a)/2)C(w, y) \quad a > 0$$

Se C(w,y) for também estritamente côncava, ter-se-á:

$$C((w + aw)/2, y) > 1/2C(w, y) + 1/2aC(w, y) = ((1 + a)/2)C(w, y)$$

O leitor, comparando as duas expressões acima, pode, facilmente, verificar a contradição. O teorema 4 enunciará uma condição segundo a qual o aumento do preço de um fator reduzirá o seu uso.

Teorema 3 . $x_i(w, p)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ *é homogênea de grau zero em w e*

$$\sum_{j=1}^{n}(\partial^2 C(w, y)/\partial w_i \partial w_j)(w_j) = 0$$

Demonstração:

Como C(w,y) é homogênea de grau 1 em w, segue-se que $\partial C(w, y)/\partial w_i = x_i(w, y)$ é homogênea de grau zero em w e, portanto, $\sum_{j=1}^{n} \partial x_i/\partial w_j * w_j = 0$, que é equivalente ao enunciado do teorema. Daí decorre que $D(w, y) * w = 0$.

Exercício: Seja f(x), $x \in R^n$, linear homogênea. Demonstre que $\partial f(x)/\partial x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ é homogênea de grau zero. Em seguida, prove que $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0$.

Teorema 4 . *Suponha que* $z'Dz < 0$, *quando* $z \neq tw$ *t um número real qualquer, diferente de 0. Por isto, o posto de D é n-1 e* $\partial^2 C(w, y/\partial w_i \partial w_i = \partial x_i(w, y)/\partial w_i = x_{ii}(w, y) < 0$, *ou seja, o aumento do preço de qualquer insumo reduz seu consumo.*

Demonstração:

Note-se que D(w,y) é avaliada para w e y usados no problema de minimização, portanto, fixos. Por isso, escrevemos D no lugar de D(w,y). Pelo enunciado $Dz = 0$ só para z=tw. Isto implica que

$$H = \{z : Dz = 0\}$$

tem dimensão 1. Um teorema de álgebra linear nos diz que o posto de D é n-1. O posto de uma matriz é o maior determinante não nulo que se pode extrair dela, ou equivalentemente, o número máximo de vetores linearmente independentes que suas colunas(ou linhas) contêm.

A matriz D, como vimos, é negativa semidefinida. Podemos ordená-la de forma tal que o determinante formado pelas primeiras n-1 linhas e colunas seja diferente de zero. Seja S a nova matriz obtida de D, pela eliminação da coluna e linha n. O determinante da matriz S é diferente de zero. Por hipótese, $z'Dz < 0$ para $z \neq tw$. Todos os vetores que têm a última componente nula satisfazem este requerimento, porque $w > 0$. Portanto, $v'Sv < 0$, em que v é um vetor de n-1 componentes. Conseqüentemente, S é negativa definida. Um teorema de álgebra linear nos ensina que os menores principais sucessivos alternam sinais. Os de ordem 1 são negativos(eles só têm um elemento); os de ordem 2, obtidos pela eliminação de n-2 linhas e n-2 colunas correspondentes, têm duas colunas e duas linhas, são positivos; e, assim, sucessivamente. Como $\partial x_i/\partial w_i$ é um menor de ordem 1, tem-se $\partial x_i/\partial w_i < 0$.[2]

Vamos, agora, especializar a função de produção.

Função de Produção: Linear Homogênea

Teorema 5 . *Quando a função de produção é linear homogênea, a função custo fatora-se num produto de dois fatores* $C(w, y) = yh(w)$; *um apenas depende dos preços dos insumos e o outro é igual a y.*

Demonstração:

[2] Por sucessivas trocas de linhas e colunas, podemos levar o elemento x_{ii} para a posição de x_{11}. Como o leitor pode verificar, essas trocas sucessivas de linhas e colunas não alteram o sinal do determinante.

A função custo fatorará na expressão $C(w,y) = yh(w)$ se e somente se $C(w,y)/y$ não depender de w, como o leitor pode facilmente demonstrar.

Recordemos a função de Lagrange:

$$L(x, \lambda; w, y) = w * x + \lambda(y - F(x)) \tag{1.7}$$

Na equação acima, y e w são parâmetros. Pelo teorema do envelope, quando as derivadas são avaliadas no ponto que corresponde ao ótimo:

$$\partial L/\partial y = \partial C(w,y)/\partial y = \hat{\lambda}$$

Numa notação simplificada, $C_y = \hat{\lambda}$. As condições de primeira ordem requerem, no ponto de equilíbrio(recorde-se que admitimos $\hat{x} > 0$):

$$w_i = \hat{\lambda} F_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Multiplicando-se as equações acima por $\hat{x}_i$ e somando-se:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \hat{x}_i = \hat{\lambda}(\sum_{i=1}^{n} F_i \hat{x}_i)$$

Como a função de produção, $F(\hat{x})$, é linear homogênea:

$$C(w,y) = \hat{\lambda} F(\hat{x}) = \hat{\lambda} y$$

Porque $C(w,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{x}_i$ e, no ponto de equilíbrio, $F(\hat{x}) = y$. Segue-se que

$$C(w,y)/y = \hat{\lambda}$$

Derivemos agora C/y em relação a y, mantendo-se w fixo.

$$\partial(C/y)/\partial y = \frac{C_y - C/y}{y}$$

O numerador é zero, porque $C_y = \hat{\lambda} = C/y$. Isto mostra que C/y não depende de y mas, tão-somente, de w. Segue-se que, para todo $y > 0$, $C/y = h(w)$, ou $C(w,y) = yh(w)$.

Obtivemos também outro resultado importante. Note-se que provamos que, para todo $y > 0$,

$$C(w,y)/y = \hat{\lambda} = C_y(w,y)$$

Corolário 4 . *Quando a função de produção é linear homogênea, o custo marginal é igual ao custo médio para todo $y > 0$ e w fixo.*

Comentários:

(a) Observe-se que, quando a função de produção é linear homogênea, tem-se o custo médio igual ao custo marginal para todo o campo de definição da função e não apenas no ponto de equilíbrio da firma. Em regime de competição perfeita, a firma iguala o preço ao custo marginal, como vimos. Se o preço de mercado for menor que o custo marginal, a firma nada produzirá. Se igual, a firma pode expandir a produção indefinidamente, se a renda líquida for positiva, e se tornará a única supridora do produto, portanto monopolista Por isso, costuma-se afirmar que uma função de produção linear homogênea é incompatível com a competição perfeita.

(b) Quando não se admite uma função de produção linear homogênea e se admite competição perfeita, **se as forças de mercado trouxerem o equilíbrio para onde o custo marginal é igual ao custo médio e forem ambos iguais ao preço do produto,** a renda será exaurida no pagamento dos fatores de produção. Assim mesmo, isto só vale para o ponto de equilíbrio. Como $C(w,y)/y = p$ ou $py = C(w,y)$, no ponto de equilíbrio, a renda bruta é exaurida no pagamento dos fatores.

(c) Esses resultados podem não prevalecer numa situação que envolva incerteza.

Para o desenvolvimento que se segue, precisamos da seguinte proposição:

Proposição 2 . *Uma função diferenciável é linear homogênea, se e somente se:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

Seja $F(t) = f(tx) = tf(x)$ t é um número real qualquer. Derive F(t) em relação a t e virá:

$$F'(t) = f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(tx) x_i$$

Faça t igual a 1, e a primeira parte da proposição fica provada.

Vamos mostrar que se

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

f(x) é linear homogênea.

Faça $F(t) = f(tx)$, e t é um número real. Derivando-se em relação a t, virá:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(tx)x_i$$

Por hipótese,

$$F(t) = t(\sum_{i=1}^{n} f_i(xt)x_i)$$

Portanto,

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{1}{t}$$

Integrando-se a igualdade acima,

$$\log F(t) = \log(tk)$$

em que k é a constante de integração e $k = F(1)$. Para isso, faça $t = 1$. Portanto, $F(t) = f(tx) = tF(1) = tf(x)$, que era o que desejávamos demonstrar.

Função de Produção: Homotética

Definição 1 . *Uma função de produção diz-se homotética se existir uma função, R, definida nos números reais, diferenciável, monótona crescente estrita,* $R(0) = 0$ *e se* $y > 0$, $R(y) > 0$ *e* $R'(y) > 0$ *e tal que:*

$$G(x) = R(F(x))$$

e G(x) é função de produção linear homogênea e satisfaz as demais hipóteses de uma função de produção. Veja a secção sobre a definição da função custo.

Como a inversa de R existe,

$$F(x) = R^{-1}(G(x))$$

que é a definição à qual estamos acostumados.

Teorema 6 . *A função de produção é homotética se e somente se*

$$C(w, y) = R(y)h(w)$$

Comentário:

Note-se que a função custo fatora no produto de dois fatores: um apenas depende de y e outro, só de w. Essa propriedade é válida em condições muito mais gerais. As hipóteses feitas garantem que, dado y, existe x, tal que $y = F(x)$, e, portanto, $RF(x) = R(y)$.

Demonstração:

É elementar mostrar que a fatoração acima só é válida, se e somente se a derivada de $C(w, y)/R(y)$ for nula, qualquer que seja $y > 0$.

Sejam $w > 0$ e $y > 0$, quaisquer.

De G(x)=RF(x), tem-se:

$$G_i = R'(y)F_i$$

Portanto,

$$F_i = G_i/R'(y) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Pelas condições de primeira ordem,

$$w_i = \hat{\lambda}F_i = \hat{\lambda}G_i/R'(y)$$

Multiplicando-se as igualdades acima por $\hat{x}_i$ e somando-se,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\hat{x}_i = \hat{\lambda}(\frac{\sum_{i=1}^{n} G_i\hat{x}_i}{R'(y)})$$

Os valores das variáveis são aqueles do ponto de equilíbrio. Ora, $\sum_{i=1}^{n} G_i(\hat{x})\hat{x}_i = G(\hat{x})$, porque, por hipótese, G(x) é linear homogênea; portanto, a igualdade acima pode ser reescrita como:

$$C(w, y) = \frac{\hat{\lambda}G(\hat{x})}{R'(y)} = \hat{\lambda}(\frac{R(y)}{R'(y)})$$

Já sabemos que, independentemente de F(x) ser homotética,

$$C_y(w, y) = \hat{\lambda}$$

Seja $P(w, y) = C(w, y)/R(y)$ e derivemos a igualdade em relação a y:

$$P'(w, y) = \frac{C_y(w, y) - C(w, y)R'(y)/R(y)}{R(y)}$$

Substituindo-se $C_y(w,y)$ e $C(w,y)$ pelas respectivas expressões acima, tem-se que o numerador é nulo. Conclui-se que P(w,y) não depende de y. Como w e y são arbitrários, segue-se que $C(w,y)/R(y) = h(w)$, ou,

$$C(w,y) = R(y)h(w)$$

para todo $y > 0$ e $w > 0$.

O leitor tem familiaridade com o diagrama, em duas dimensões, aquele das isoquantas. Há dois insumos. Cada isoquanta mostra as diferentes combinações dos dois insumos que produzem determinada quantidade do produto. Dado o preço dos insumos, a tangência da linha de preços com uma isoquanta dá a combinação de insumos que minimiza o custo de produzir-se a quantidade de produto a que se refere a isoquanta. À medida que se varia y, os pontos de equilíbrio traçam uma curva no primeiro quadrante. Faça o diagrama. Quando a função de produção é homotética, a curva se reduz a uma linha reta que passa pela origem. Vamos formalizar essa idéia, admitindo-se uma solução interior do problema de minimização, $\hat{x} > 0$.

Teorema 7 . *As duas afirmações seguintes são equivalentes, quando a função de produção é homotética:*

1. *Seja:*

   $$LE(w) = \{x > 0 : F_i(x)/F_j(x) = w_i/w_j \ i \neq j;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

   Primeira afirmação: Se x pertence a LE(w), segue-se que kx pertence a LE(w) para $k > 0$;

2. *Segunda afirmação:*

   $$C(w,y) = R(y)h(w)$$

Comentário: O sistema de equações que define LE(w) compõe-se de n-1 equações e é válido para qualquer $y > 0$ e $w > 0$. Para dado y, ele e mais a equação $y = F(x)$ determinam x, vetor que minimiza os custos. Escrevemos x(w,y) para indicar que a solução depende de w e y. Seja $\bar{x} \in LE(w)$. Seja $\bar{y} = F(\bar{x})$. Esta equação completa o sistema que define LE(w), e $\bar{x}$ é uma das soluções do problema de minimização:

$$\min_{x} w * x, \quad \text{restrito a } F(x) \geq \bar{y}$$

Demonstração:

$1 \Rightarrow 2$. Seja $\bar{x} \in LE(w)$. Note-se que $\bar{x}$ é o vetor a partir do qual o raio emana e $y > 0$. Nosso problema é encontrar C(w,y), quando $y > 0$. Por hipótese $w > 0$.

$$F(k\bar{x}) = R^{-1}(G(k\bar{x})) = R^{-1}(kG(\bar{x}))$$

Ou, tendo-se $\bar{z} = G(\bar{x})$,

$$y = F(k\bar{x}) = R^{-1}(k\bar{z})$$

Em virtudes das hipóteses feitas sobre R, dado y, existe um único k, designado por $k(y)$ tal que $R^{-1}(k(y)\bar{z}) = y$. Podemos escrever:

$$k(y)\bar{z} = R(y)$$

Ou

$$k(y) = R(y)/\bar{z}$$

Por hipótese, $k(y)\bar{x} \in LE(w)$. E $k(y)\bar{x}$ é uma das soluções do problema:

$$\min_{x} w * x, \quad \text{st } F(x) \geq y$$

Conseqüentemente,

$$C(w, y) = w * k(y)\bar{x} = R(y)(w * (\bar{x})/\bar{z})$$

O último fator da igualdade acima, que está entre parêntesis, é, portanto, função de w, e podemos escrever h(w) no seu lugar. Segue-se que:

$$C(w, y) = R(y)h(w)$$

Como w e y são arbitrários, a fatoração é verdadeira para todo $w > 0$ e $y > 0$.

$2 \Rightarrow 1$. Temos de demonstrar que, se $z \in LE(w)$, tem-se $kz \in LE(w)$ para $k > 0$. Existe y_k tal que $F(kz) = y_k$. E seja $R^{-1}G(z) = y_z$. Como $z \in LE(w)$, tem-se $C(w, y_z) = w * z$. Mas $F(kz) = R^{-1}G(kz) = R^{-1}(kG(z)) = y_k$, porque G é linear homogênea. Daí se segue que $kG(z) = R(y_k)$. Mas $C(w, y_k) = R(y_k)h(w) = kG(z)h(w)$. Contudo, $G(z) = R(y_z)$. Portanto, $C(w, y_k) = kR(y_z)h(w) = kC(w, y_z)$. Em conseqüência, $C(w, y_k) = w * (kz)$, que implica que $kz \in LE(w)$.

Se as duas condições forem equivalentes, a condição 2 implica que a função de produção é homotética.

Teorema 8 . *A demanda de um fator de produção decompõe-se no produto de dois fatores, um deles função de y e outro de w, se e somente se F(x) for homotética.*

Demonstração:

1. Sejam $y > o$ e fixo e $w > 0$, variável. Vimos que F(x) é homotética, se e somente se

$$C(w, y) = R(y)h(w)$$

Sabemos que $\partial C(w, y)/\partial w_i = x_i(w, y)$. Portanto,

$$x_i(w, y) = R(y)\partial h(w)/\partial w_i = R(y)h_i(w)$$

Suponhamos, agora, que a demanda de qualquer insumo se decomponha como indicado pela equação acima.

$$C(w, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i(w, y) = R(y)(\sum_{i=1}^{n} w_i h_i(w))$$

Como C(w,y) é linear homogênea em w,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i h_i(w) = h(w)$$

Conseqüentemente,

$$C(w, y) = R(y)h(w)$$

Quando a função de produção é linear homogênea, $R(y) = y$ e

$$x_i(w, y) = yh_i(w)$$

Essa equação sugere um teste para a hipótese de que a função de produção seja linear homogênea. Estima-se a demanda, tomando-se o logaritmo da igualdade acima e escolhe-se uma representação adequada para $h_i(w)$. Se a formulação sobreviver ao teste empírico, as evidências não negam a hipótese de que a função de produção seja linear homogênea.

Maximização da Renda Líquida

Há dois caminhos para se tratar deste problema. Um deles é escrever o problema de maximização diretamente e resolvê-lo. O outro caminho é proceder em duas etapas. Primeiramente, obtém-se a função custo e depois, maximiza-se a diferença entre a renda bruta e o custo. Seja $L(w, p, y) = py - C(w, y)$ a função Lagrange, $p > 0$ é o preço do produto.

$$R(w,p) = \max_y\{py - C(w,y) \quad y > 0\} = \max_y L(w,p,y) = L(w,p,\hat{y})$$

Seguiremos este caminho Admitimos $w > 0$ $p > 0$ e que a solução do problema de minimização de custo é interior: $\hat{x} > 0$ $\hat{\lambda} > 0$. Recordemos que, nestas condições, $F(\hat{x}) = y > 0$, $\partial C(w,y)/\partial y = \hat{\lambda} = \lambda(w,y)$, $\partial C(w,y)/\partial w_i = \hat{x}_i = x_i(w,y)$ e, ainda, que a matriz $[\partial^2 C(w,y)/\partial w_i w_j]$ é simétrica e, pelo menos, negativa semidefinida (ou negativa definida).

A solução do problema de maximização acima pode muito bem não existir no campo dos números reais: pode ser, por exemplo, infinita. Experimente com a função Cobb-Douglas, quando os expoentes somam 1. Vamos supor que a solução seja finita e que $y > 0$, ou seja, a firma sempre produz alguma coisa no ótimo.

Segue-se:

$$p = \partial C(w,y)/\partial y = \lambda(w,\hat{y})$$

Subseqüentemente, não utilizaremos $\hat{y}$ e sim y(w,p) para simplificar a notação e enfatizar que o valor ótimo é função de w e p. A oferta é, assim, dada por y(w,p). Para verificar-se isto, pelo teorema do envelope, basta derivar L(w,p,y) em relação a p.

A condição de segunda ordem para um máximo único pede que $-\partial^2 C(w,y)/\partial y^2 < 0$. Ou,

$$\partial^2 C(w,y)/\partial y^2 = \partial\lambda(w,y(w,p))/\partial y > 0$$

Se a condição acima é verdadeira para todo $y > 0$, então C(w,y) é estritamente convexa para $y > 0$ e a curva do custo marginal é crescente, no valor ótimo, y(w,p). Por causa da continuidade da curva do custo marginal (admitimos a existência da derivada segunda em relação a y, $y > 0$), existe uma vizinhança em torno de y ótimo, y(w,p), na qual a curva do custo marginal é crescente.

Efeito-Preço sobre a Produção Ótima

Uma questão interessante é saber o que ocorre com a produção ótima, quando o preço do fator i varia, e se permite que o produto cresça. Mantém-se o preço do produto constante. Para isto, é suficiente diferenciar $p = \lambda(w, y)$, lembrando-se que se trata do y ótimo e que p é dado constante.

$$0 = dp = \partial\lambda(w, y)/\partial w_i \, dw_i + \partial\lambda(w, y)/\partial y \, dy$$

Daí se segue:

$$\partial y/\partial w_i = -\frac{\partial\lambda(w, y)/\partial w_i}{\partial\lambda(w, y)/\partial y} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

A condição de segunda ordem exige, como vimos, $\partial^2 C(w, y/\partial y\partial y > 0$. E tem-se:

$$\partial\lambda(w, y)/\partial y = \partial^2 C(w, y/\partial y\partial y > 0$$

Portanto, o incremento do preço do insumo i tanto pode aumentar, deixar inalterada, como diminuir a produção ótima, dependendo só do sinal de $\partial\lambda(w, y)/\partial w_i$, porque o outro termo da fração tem sinal positivo, como acabamos de ver.

Definição 2 . *O fator $i^{\acute{e}simo}$ é normal se $\partial x_i/\partial y > 0$; é inferior se $\partial x_i/\partial y < 0$.*

Teorema 9 . *Um aumento do preço de um fator reduz ou incrementa a quantidade ótima do produto, y(w,p), se o fator de produção for, respectivamente, normal ou inferior.*

Demonstração:

Vimos que

$$\partial y/\partial w_i = -\frac{\partial\lambda(w, y)/\partial w_i}{\partial\lambda(w, y)/\partial y} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Uma aplicação do teorema do envelope e do teorema de Young mostra que:

$$\partial^2 C(w, y)/\partial w_i\partial y = \partial x_i(w, y)/\partial y = \partial^2 C(w, y)/\partial y\partial w_i = \partial\lambda(w, y)/\partial w_i$$

Esta identidade demonstra o teorema, já que, como vimos,

$$\partial\lambda(w,y)/\partial y > 0$$

Outra questão que releva investigar é a decomposição do efeito do incremento do preço do fator i sobre a demanda do insumo i, nas componentes:

Efeito Total=Efeito Preço (y Constante) +Efeito Variação de y

Relembremos que, para y ótimo, podemos escrever $x_i = x_i(w,y) = X_i(w, y(w,p))$ Derivando-se a igualdade acima em relação a w_i, virá:

$$\partial x_i/\partial w_i = \partial X_i/\partial w_i + (\partial X_i/\partial y)(\partial y/\partial w_i)$$

O primeiro termo, que é negativo ou nulo, mede o efeito de substituição, ou seja, o efeito de um incremento de preço sobre a demanda do insumo i, quando se mantém a produção constante; o segundo termo significa o efeito de escala, ou seja, o efeito da variação do produto. Sabemos que o primeiro efeito é negativo. Temos de estudar o segundo termo da decomposição.

Admitindo-se que C(w,y) tem derivadas parciais contínuas e pode ser derivada até a segunda ordem, virá, tendo-se em conta o que já conhecemos para y ótimo:

$$\partial^2 C(w,y)/\partial w_i \partial y = \partial X_i/\partial y = \partial^2 C(w,y)/\partial y \partial w_i = \partial\lambda(w,y)/\partial w_i$$

Anteriormente, vimos que $\partial y/\partial w_i = -\frac{\partial\lambda(w,y)/\partial w_i}{\partial\lambda(w,y)/\partial y}$
Segue-se que

$$(\partial X_i/\partial y)(\partial y/\partial w_i) = -(\partial\lambda(w,y)/\partial w_i)\left(\frac{\partial\lambda(w,y)/\partial w_i}{\partial\lambda(w,y)/\partial y}\right)$$

$$= -\frac{(\partial\lambda(w,y)/\partial w_i)^2}{\partial\lambda(w,y)/\partial y}$$

Já sabemos que o denominador tem sinal positivo. O segundo termo da decomposição tem, portanto, também sinal negativo. O efeito total é, portanto, negativo.

Sem esforço adicional, podemos demonstrar uma proposição sobre a curva do custo marginal. No ponto de equilíbrio, temos:

$$\partial C(w,y)/\partial y = \lambda(w,y)$$

que define a curva do custo marginal, CM(y,w). Logo, $CM(y,w) = \lambda(y,w)$. Colocamos y em primeiro lugar para indicar sua condição de variável e o vetor w é o vetor dos parâmetros. A pergunta que se faz é a seguinte: o que ocorre com CM, quando se incrementa o preço de um insumo? O teorema seguinte responde a questão.

Teorema 10 . *O aumento do preço de um fator desloca a curva marginal, CM(y,w), para cima, se o fator for normal, e para baixo, se o fator for inferior.*

Demonstração:

Foi demonstrada a seguinte igualdade, como sempre válida numa vizinhança do equilíbrio:

$$\partial\lambda(w,y)/\partial w_i = \partial x_i(w,y)/\partial y = \partial CM(y,w)/\partial y$$

É só usar a definição de normal e inferior para verificar que a proposição é verdadeira. Por exemplo, se o fator é normal $\partial CM/\partial y = \partial x_i(w,y)/\partial y > 0$.

O leitor deve notar que temos invertida a ordem da diferenciação. Tal é possível, porque as hipóteses sobre a função custo permitem realizar esta operação, ou seja, permitem o uso do teorema de Young. Outro teorema que temos usado é o teorema do envelope. Ao acompanhar cada passo da demonstração, o leitor deve verificar qual teorema foi utilizado. Referimos ao incremento do preço de um fator. Obviamente, poderia ter sido decréscimo.

Estimação da Função Custo: Restrições Impostas pela Teoria

A teoria desenvolvida impõe restrições à função custo, ou seja, ela tem de satisfazer determinadas condições. Vejamos alguns casos para aguçar a imaginação do leitor.

Função Linear

Seja a função custo expressa pela seguinte equação:

$$C(w,y) = a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_n w_n + by$$

Substitua w por tw, $t > 0$, e virá.

$$C(w, y) = a_0 + t(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_n w_n) + by$$

Como a função custo é linear homogênea em w, precisamos ter $a_0 = b = 0$ Neste caso, esta função é imprópria para representar a função custo, porque o custo total não depende do nível de produção.

Cobb-Douglas

Seja

$$C(w, y) = A w_1^{a_1} w_2^{a_2} \ldots w_n^{a_n} y$$

Observe-se que a função custo fatora-se no produtos de dois fatores. um apenas contém y e outro é função de w apenas. Já sabemos que a função de produção, que é compatível, é linear homogênea. Como a função custo é linear homogênea, a soma dos expoentes tem de ser 1,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Para obter-se essa relação, basta substituir w por tw na função custo, como fizemos no exemplo anterior

Exercício:

Obtenha a demanda do insumo i. Considere três fatores de produção e encontre $\partial^2 C(w, y)/\partial w_i w_j$. Relembre que esta matriz é simétrica. Verifique as condições para que isto ocorra.

Faça $C(r, y) = A x^a z^b w^c y$ e $r = (x, z, w)$ Designemos a matriz pedida por Q.

$$Q = \begin{pmatrix} a(a-1)/x^2\, C(r,y) & ba/xz\, C(r,y) & ca/wx\, C(r,y) \\ ab/xz\, C(r,y) & b(b-1)/z^2\, C(r,y) & cb/wz\, C(r,y) \\ ac/xw\, C(r,y) & bc/zw\, C(r,y) & c(c-1)/w2\, C(r,y) \end{pmatrix}$$

Por inspeção, descobre-se que a matriz Q é simétrica. Para que a matriz Q seja negativa definida, temos de inspecionar os menores principais sucessivos. Os de primeira ordem são os elementos da diagonal da matriz Q: estes elementos têm de ser negativos. Assim,

$q_{ii} < 0 \quad i = 1, 2, 3$. E temos $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ e $0 < c < 1$. Lembre-se que $a + b + c = 1$, porque a função custo é linear homogênea nos preços dos insumos. Em seguida, verifique o sinal dos determinantes obtidos pela eliminação de uma linha e de uma coluna, ambos da mesma ordem. E tem-se os menores principais de segunda ordem. Eles são todos positivos. Finalmente, o determinante Q tem de ser negativo, o que não é difícil de mostrar. Para testar se a matriz Q é semidefinida, temos de verificar todos os menores de uma dada ordem. Há três menores de ordem 1, os elementos das diagonais. Todos eles são nulos ou negativos. Há três menores principais de ordem 2. Os três menores de ordem dois são positivos ou nulos. Finalmente, o determinante de ordem 3, ou seja, $det(Q) \leq 0$.

Exercício: A função custo é, como vimos, crescente em w e y. Complete o exercício anterior, mostrando que implicações essas duas propriedades têm sobre os coeficientes da função custo.

A Função Translog

A função translog tem sido muito usada em trabalhos empíricos. Os seus parâmetros podem ser facilmente estimados, *desde que os dados tenham sido gerados por agricultores que minimizem custos. Caso contrário, não faz sentido usar a função custo.*

Precisamos de um lema que o leitor não terá dificuldade em demonstrar.

Lema 1 . *Se uma função real é linear homogênea e $t > 0$ e $x > 0$,*

$$\log f(tx) = \log t + \log f(x) \quad (*)$$

Em alguns problemas, é conveniente tomar o logaritmo da função. O lema diz que, se substituirmos a variável x por tx(note-se que o logaritmo só é definido para os valores positivos), teremos de agrupar os termos que contêm $\log t$ e eles igualam-se a 1, que é o coeficiente de $\log t$, no lema acima.

A função translog é dada por:

$$\log C(w, y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i log w_i +$$

$$1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\log w_i \log w_j +$$
$$\sum_{i}^{n} b_i \log w_i \log y +$$
$$(c\log y + 1/2d(\log y)^2)$$

O termo 1/2 visa facilitar manipulações.

Homogeneidade Linear

Pelo lema anterior, substituímos w_i por tw_i e coletamos os termos em $\log t$ Em seguida, igualamos estes termos a 1, que é o coeficiente de $\log t$, como indicado pelo lema.

$$\log t = [\sum_{i=1}^{n} a_i +$$
$$1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\log w_i + logw_j) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i \log y](\log t) + 1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\log t)^2$$

O termo dentro do colchete tem de ser igual a 1, que é o coeficiente de $\log t$, e o fora do colchete, 0. Como podemos variar os preços dos insumos e y(a fórmula da função translog é válida para qualquer preço de insumo positivo e $y > 0$), isto implica que todos os termos que contêm w_i, y e w_j sejam nulos. Se fizermos $w_i = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, n$ e $y = 1$, ter-se-á

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Mas os termos dentro do colchete têm de ser nulos para $w \neq 1$:

a) Desdobrando-se a soma dentro do colchete em $\log w_i$ e $\log w_j$,

$$1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\log w_i = 0$$
$$1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\log w_j = 0$$

A primeira equação pode ser reescrita:

$$\sum_{i=1}^{n}(\log w_i)(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}) = 0$$

Conseqüentemente, para $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

b) Como $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log w_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \log w_i$, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

c) O coeficiente de $\log y$ tem de ser nulo. Tem-se, assim, $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. Se a função de produção for homotética, o termo $b_i \log w_i logy$ não pode estar presente na definição da função Translog. Isto implica que $b_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$.

$$[\partial^2 C(w, y)/\partial w_i \partial w_j]$$

O teorema de Young requer que a matriz acima seja simétrica. Vejamos que restrição é imposta aos coeficientes. Observe-se que:

$$\partial \log C(w, y)/\partial w_i = 1/C(w, y)\, \partial C(w, y)/\partial w_i$$

Derivando-se em relação a w_j,

$$\partial^2 \log C(w, y)/\partial w_i \partial w_j =$$

$$\frac{C(w, y)\, \partial^2 C(w, y)/\partial w_i w_j - (\partial C(w, y)/\partial w_i)(\partial C(w, y)/\partial w_j)}{C(w, y)^2}$$

Equivalentemente,

$$\partial^2 C(w, y)/\partial w_i \partial w_j = C(w, y)\, (\partial^2 \log C(w, y)/\partial w_i \partial w_j)$$
$$+1/C(w, y)\, (\partial C(w, y)/\partial w_i)(\partial C(w, y)/\partial w_j)$$

Na equação acima, o segundo termo da soma à direita não se altera, quando se muda a ordem de w_i e w_j. Portanto, para que a matriz seja simétrica, $\partial^2 \log C(w, y)/\partial w_i \partial w_j$ tem de ser uma matriz simétrica. Tratemos agora de derivar $\log C(w, y)$ em relação a w_i e o resultado em relação a w_j. A dificuldade está com o termo que contém a soma dupla Ele pode ser escrito como uma matriz e é só aplicar a regra de derivação de matriz Seguiremos, contudo, outro caminho

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log w_i \log w_j = \sum_{h=1}^{n} g(h)$$

e

$$g(h) = \log w_h \sum_{j=1}^{n} a_{hj} \log w_j$$

Há dois casos a considerar para se obter $\partial(\sum_{i=1}^{n} g(h))/\partial w_i$:

$h = i$

$$\partial g(i)/\partial w_i = (1/w_i)\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log w_j + \log w_i (1/w_i) a_{ii}$$

$h \neq i$

$$\partial(\sum_{h\neq i} g(h))/\partial w_i = \sum_{h\neq i} (\log w_h / w_i) a_{hi}$$

A derivada que procuramos é soma das duas derivadas encontradas. Note-se que, na segunda expressão, falta o termo $h = i$ Mas ele é uma das parcelas da primeira equação acima. Segue-se que a derivada da soma dupla em relação a w_i é igual a:

$$(1/2w_i)[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log w_j + \sum_{h=1}^{n} a_{hi} \log w_h \quad (*)]$$

Os demais termos de $\partial \log C(w, y)\partial w_j$ não contêm w_j. Derivando-se o resultado encontrado em relação a w_j, virá:

$$(1/2)(1/w_i w_j)[a_{ij} + a_{ji}]$$

e a simetria buscada só ocorrerá se $a_{ij} = a_{ji}$, e aqui está um conjunto de restrições adicionais. Daí se segue:

$$\partial \log C(w, y)/\partial w_i \partial w_j = a_{ij}/w_i w_j = a_{ji}/w_j w_i$$

Tendo-se em conta o resultado acima, a derivada da soma dupla em relação a w_i, obtida em (*), pode ser simplificada, porque as duas parcelas que a compõem são iguais.

$$1/w_i[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} log w_j] \quad (**)$$

Obtém-se pelo teorema do Envelope:

$$\partial \log C(w,y)/\partial w_i = 1/C(w,y)\, \partial C(w,y)/\partial w_i = \frac{x_i}{C(w,y)}$$

Tendo-se em conta (**),

$$\partial \log C(w,y)/\partial w_i = 1/w_i[a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log w_j + b_i \log y]$$

Portanto,

$$\frac{x_i}{C(w,y)} = 1/w_i[a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log w_j + b_i \log y]$$

Multiplicando-se por w_i,

$$s_i(w,y) = w_i x_i / C(w,y) = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log w_j + b_i \log y \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

O lado direito da equação acima é observável. Trata-se da participação do fator i no custo total. A equação acima permite, assim, estimarem-se seus coeficientes. Mas só temos $n-1$ equações para se estimar, porque $\sum_{i=1}^{n} s_i(w,y) = 1$.

Homoteticidade

Se a função de produção é homotética, tem-se: $\log C(w,y) = \log R(y) + \log h(w)$. Na definição da função de custo translog, nenhum termo pode conter produto do tipo $\log w \log y$. Conseqüentemente, $\sum_{i=1}^{n} b_i \log w_i \log y = 0$, o que implica que $b_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$. Se nós pudermos rejeitar a hipótese $b_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$, teremos rejeitado a função de produção homotética. Se não pudermos rejeitar essa hipótese, não é o caso de se afirmar que a função de produção seja homotética (Berndt Christensen, 1973).

Exercício:

Como a função custo é crescente em w e y, que restrições essas duas propriedades impõem sobre os coeficientes da função translog? Digamos que a função custo seja estritamente côncava em w. Portanto, os menores principais sucessivos alternam de sinal, sendo o menor principal de ordem 1 negativo. Que implicações essa propriedade tem sobre os coeficientes da função translog?

Tópicos Adicionais

Nesta seção, abordam-se tópicos importantes, mas sem a preocupação de organizá-los de acordo com algum critério. Precisamos, contudo, de alguma preparação

Definição 3

$$V(y) = \{x . F(x) \geq y\}$$

Em função das hipóteses sobre F(x), V(y) é não vazio, fechado e convexo e se $y > 0$, então $x = 0 \notin V(y)$.

Definição 4

$$V^d = \{x : w * x \geq C(w, y) \; \forall w > 0\}$$

A letra d significa dual e é, assim, em relação a V(y).

Definição 5

$$C^d(w, y) = \min_x \{w * x \;\; x \in V^d(y)\}$$

O teorema seguinte mostra que, conhecida a função de custo, é possível recuperar-se a função de produção que lhe deu origem. Se V(y) for um conjunto convexo, ou, equivalentemente, se F(x) for uma função semicôncava, o teorema enunciado a seguir mostra que $V(y) = V^d(y)$, o que facilita a recuperação da função de produção. Mesmo que essa hipótese não se verifique, tem-se que $C^d(w, y) = C(w, y)$. O teorema da dualidade não depende da hipótese de que F(x) seja diferenciável. Em compensação, não oferece um caminho simples para se realizar a recuperação da função de produção, como é possível fazê-lo no caso diferenciável. O leitor pode verificar que F(x), abaixo definida, tem todas as propriedades de uma função de produção, a qual será semicôncava se V(y) for um conjunto convexo. Veja, sobre isso, o Capítulo II.

$$F(x) = \max_y \{x \in V(y)\}$$

Teorema 11 .*(Teorema da Dualidade)*

As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. $V(y) \subset V^d(y)$.

2. $V^d(y) = V(y)$ *se V(y) for conjunto convexo.*

3. $C^d(w,y) = C(w,y)$ *para todo* $w > 0$.

Comentário: O item 1 é muito fácil de se verificar. Pela definição de C(w,y), se x pertence a V(y), e, portanto, $w * x \geq C(w,y)$ para qualquer $w > 0$. Logo, $x \in V^d(y)$ e tem-se $V(y) \subset V^d(y)$. O item 3 não oferece maiores dificuldades. Note-se que não se exige que V(y) seja conjunto convexo. Tem-se $C^d(w,y) \leq C(w,y)$, porque $V(y) \subset V^d(y)$. Suponha que, para algum $w > 0$, a desigualdade $C^d(w,y) < C(w,y)$ se verifique. Seja z tal que $w * z = C^d(w,y)$. Como z pertence a $V^d(w,y)$, segue-se que:

$$w * z \geq C(,w,y) \ \forall w > 0$$

Em particular, para aquele w para o qual a desigualdade é estrita, deve-se ter $w * z \geq C(w,y)$, que contradiz $C^d(w,y) < C(w,y)$.

Vejamos a demonstração do item 2. Sejam w e y fixos e positivos. Exige-se conhecimento do teorema de separação de conjuntos convexos. Pelo item 1, $V(y) \subset V^d(y)$. Suponha que exista q em $V^d(y)$ e que q não pertença V(y). Portanto, V(y) é subconjunto próprio do R^n_+ e não vazio. Pela definição de $V^d(y)$, q é diferente de zero e $q \geq 0$. Como V(y) é conjunto fechado e convexo, pelo teorema de separação de conjuntos convexos, existe um vetor u, diferente de zero, e $u \in R^n$ e

$$u * x > u * q \quad x \in V(y) \quad (*)$$

Vamos mostrar que $u > 0$. Digamos que u tenha uma componente nula ou negativa. Seja esta componente u_1, sem perda de generalidade. Como, por hipótese, $\lim_{x_i \to \infty} F(x) = \infty$, o vetor x que tiver todas as componentes nulas, exceto a primeira, pertencerá a $V(y)$, quando $x_1 > r$, r é um número positivo adequado. Se a componente u_1 for negativa, a desigualdade (*) não será verdadeira depois que a primeira componente x ultrapassar determinado valor. Logo, u não pode ter uma componente negativa. Suas componentes são nulas ou positiva e, pelo menos, uma positiva; se uma componente de u for nula, escolha x de modo que a única componente positiva seja a correspondente àquela nula de u e de valor tal que $x \in V(y)$, e ter-se-á $0 = u * x > u * q$, o que é impossível porque $q \geq 0$ e u não tem componentes negativas Conseqüentemente, $u > 0$ Seja $\hat{x}$ uma solução do problema de minimização e, obviamente, $\hat{x}$ pertence a V(y) Segue-se que $u * q < u * \hat{x} = C(w, y)$, que contraria a definição de $V^d(y)$ A contradição obtida demonstra que q pertence a V(y) e $V^d(y) = V(y)$, quando V(y) é um conjunto convexo.

Função de Produção de Leontief

A definição da função de produção de Leontief é dada a seguir:

Definição 6

$$F(x) = \min \{x_1/a_1, x_2/a_2, \cdots, x_n/a_n \;\; a_i > 0 \;\; i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Da definição, segue-se que:

$$V(y) = \{x : x_i/a_i \geq y \;\; i = 1, 2, \cdots, n\}$$

É fácil mostrar que esse conjunto é convexo e, portanto, $V(y) = V^d(y)$. Digamos que o objetivo é produzir y unidades do produto. A fórmula acima nos diz que se deve ter:

$$x_1/a_1 = x_2/a_2 = \cdots x_n/a_n = y$$

Temos, assim, $x_i = a_i y \;\; i = 1, \cdots, n$. O custo de produzir y é dado por:

$$C(w, y) = (\sum_{i=1}^{n} w_i * a_i) y$$

A função de produção de Liontief não tem derivada em todos os pontos em que é definida. Satisfaz, contudo, as quatro propriedades que estão enunciadas no início deste capítulo, como o leitor pode verificar. A fatoração da função custo é válida também para funções de produção homotéticas e que não sejam diferenciáveis. A função custo, deduzida acima, indica que a função de produção de Leontief é linear homogênea. O leitor pode verificar isto diretamente a partir de sua definição.

Considerando que temos uma função custo como a introduzida acima, que tipo de função de produção deu origem a ela? Um caminho é construir o conjunto $V^d(y)$, que é aquele que seguiremos.

$$V^d(y) = \{x : w * x \geq (\sum_i^n w_i * a_i)y \ \forall w > 0\}$$

Equivalentemente,

$$V^d(y) = \{x : \sum_{i=1}^n w_i(x_i - a_i y) \geq 0 \ w > 0\}$$

Resta saber se é possível ter-se uma parcela da soma negativa e as demais de tal valor que resultem numa soma não-negativa. Tal não é possível. Para simplificar, digamos que $w_1(x_1 - a_1)y < 0$ e $w_1 > 0$. Mantendo-se as demais componentes de w constantes e deixando w_1 crescer sem limites, encontrar-se-á um $w > 0$, a partir do qual a soma ficará negativa. Não se pode, assim, ter nenhuma parcela da soma negativa. Segue-se que

$$V^d(y) = \{x : x_i \geq a_i y \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

e, portanto, $V^d(y) = V(y)$. Portanto, a função que deu origem a C(w,y) é a função de produção de Liontief.

O leitor pode estar interessado em saber a forma das isoquantas da função de Liontief. Seja y fixo. Pelo que vimos, tem-se $x_1 = a_1 y$ e $x_2 = a_2 y$. No diagrama em que x_1 é o eixo horizontal e x_2 é o eixo vertical, coloquemos o ponto (x_1, x_2) definido pela igualdade acima. Se variarmos x_1 e x_2, simultaneamente, y também variará, como indica a definição da função de Liontief. Como y está fixo, só podemos variar, de cada vez, uma das coordenadas do ponto em questão. Mantenha a ordenada fixa em $x_2 = a_2 y$. Pela definição da função de Liontief, só podemos aumentar x_1 e nunca diminuí-lo. Mantendo-se a abcissa fixa em $x_1 = a_1 y$, raciocínio análogo indica que só podemos aumentar x_2. A isoquanta correspondente à produção de y unidades é, assim, retangular, com vértice em $(x_1 = a_1 y, x_2 = a_2 y)$.

A Função Custo de Curto Prazo

Pode ocorrer que alguns insumos sejam tais que o produtor não os considere no processo de decisão, mantendo-os fixos em determinados níveis. Trata-se, portanto, de uma situação de curto prazo. Dividimos o insumo em dois grupos $x = (u, z)$ e os preços dos insumos em (w_u, w_z) e o vetor z é mantido fixo em $\bar{z}$. É óbvio que isto é feito depois de se reordenarem as componentes de x e w, de modo que aquelas que são variáveis venham em primeiro lugar.

Definição 7

$$V(y, \bar{z}) = \{x = (u, z) : \ z = \bar{z} \ \ F(u, \bar{z}) \geq y\}$$

É evidente que $V(y, \bar{z}) \subset V(y)$, porque, em V(y), as componentes z podem variar. Definimos

$$C(w, \bar{z}, y) = \min_u \{w_u * u + w_z * \bar{z} \ \ (u, z) \in V(y, \bar{z})\}$$

Em vista da inclusão de conjuntos acima, tem-se $C(w, y) \leq C(w, \bar{z}, y)$. Digamos que a solução ótima, quando todos os insumos são variáveis, seja dada por $\hat{x} = (\hat{u}, \hat{z})$ e $y = \hat{y}$. Temos, assim,

$$C(w, \hat{z}, y) = C(w, y), \text{ quando } y = \hat{y}$$

Para outros valores de y, esta igualdade não necessita ser verdadeira. A curva de custo de curto prazo tangencia, assim, a de longo prazo, no ponto $(\hat{y}, C(w, \hat{z}, \hat{y})) = (\hat{y}, C(w, \hat{y}))$. Para outros valores de y, a tangência pode não se verificar, ou seja, $C(w, \bar{z}, y) > C(w, y)$ O mesmo pode ocorrer para outros valores de z, quando y é fixo. Tem-se que, para cada y, as curvas de curto prazo ou tangenciam a de longo prazo ou ficam acima dela. O ponto de tangência é obtido pelo procedimento descrito. Costuma-se, assim, dizer que a curva de custo de longo prazo é o envelope inferior das curvas de curto prazo

O Princípio de Le Chatelier-Samuelson

Para simplificar a exposição, vamos admitir três insumos (x,u,z). O insumo z permanece fixo e os outros dois são variáveis. O vetor preço dos insumos é dado por (w,q,r), sendo w o preço de x, q o preço de u e, finalmente, r o preço de z.

$$C(w, q, r, z, y) = \min_{(x,u)} \{w * x + q * u + r * z, \ F(x, u, z) \geq y\}$$

designando-se a solução ótima por x(w,q,z,y) e u(w,q,z,y) Note-se que z é uma constante. A expressão da função custo de curto prazo é, portanto,

$$C(w,q,r,z,y) = w * x(w,q,z,y) + q * u(w,q,z,y) + r * z$$

Admitindo-se z variável, e minimizando-se C(w,q,r,z,y) em relação a z, obtém-se função custo de longo prazo e x(w,q,r,y),u(w,q,r,y) e z(w,q,r,y) representam a solução ótima Podemos fixar z em z(w,q,r,y) na função custo de curto prazo, e é o que faremos de agora em diante. Escrevemos C(w,q,z(w,q,r,y),y). Note-se que z é fixado no valor z(w,q,r,y). Isto significa que mesmo que se varie w,q,r e y, z continuará com o mesmo valor, ou seja, aquele que z assumiu antes de os preços dos insumos e y serem mudados.

Pelo teorema do envelope, quando z está fixo em $z = z(w,q,r,y)$, sabemos que a demanda de curto prazo pelo insumo x é dada por:

$$\partial C(w,q,z(w,q,r,y),y)/\partial w = x(w,q,z(w,q,r,y),y)$$

E tem-se $x(w,q,r,y) = x(w,q,z(w,q,r,y),y)$, ou seja, no ponto (w,q,r,y) e z fixo em $z(w,q,z(w,q,r,y))$, as demandas de curto e longo prazo têm o mesmo valor. Se variarmos w, por exemplo, e como mantemos z fixo, esta coincidência de valores pode não ocorrer. A pergunta que responderemos é o que ocorre com a igualdade acima, quando permitimos variar apenas w, ou seja, do ponto de vista de longo prazo, permitimos a demanda de curto prazo por x se ajustar. Permitimos, assim, z variar em resposta à variação de w. A resposta é dada por: $\partial x(w,q,r,y)/\partial w = \partial x(w,q,z(w,q,r,y),y)/\partial w + (\partial x(w,q,z(w,q,r,y),y)/\partial z) * (\partial z(w,q,r,y)/\partial w)$

A igualdade acima diz que o ajuste da demanda de longo prazo a uma variação de w é igual ao ajuste da demanda de curto prazo mais um resíduo. Mostraremos que esse resíduo é nulo ou negativo. O resíduo nulo ou negativo implica, depois de se notar que ambos os membros da desigualdade, excluído o resíduo, são nulos ou negativos, conforme já demonstrado:

$$\partial x(w,r,q,y)/\partial w \leq \partial x(w,q,z(w,q,r,y),y)/\partial w$$

Conclusão: aí está o princípio de Le Chatelier-Samuelson. Ele afirma que a demanda de curto prazo tem menor capacidade de ajuste a uma variação do preço w que a de longo prazo. A mesma proposição é verdadeira para variações dos demais preços e y. Cuidemos de mostrar que o resíduo é nulo ou negativo. Designemos o resíduo por Res

$$Res = (\partial x(w,q,z(w,q,r,y),y)/\partial z) * (\partial z(w,q,r,y)/\partial w)$$

Admitindo-se que C(w,q,r,y) seja duas vezes diferenciável e, pelo teorema de Young,

$$\partial C^2(w,q,r,y)/\partial r\partial w = \partial C^2(w,q,r,y)/\partial w\partial r$$

Em vista de $\partial C^2(w,q,r)/\partial w\partial r = \partial C^2(w,q,r)/\partial r\partial w$ e, pelo teorema do envelope,

$$\partial z(w,q,r,y)/\partial w = \partial x(w,q,r,y)/\partial r \quad (1)$$

De $x(w,q,r,y) = x(w,q,r,z(w,q,r,y),y)$, vem que.

$$\partial x(w,q,r,y)/\partial r = (\partial x(w,q,z(w,q,r,y),y)/\partial z)(\partial z/\partial r) \quad (2)$$

Substituindo-se (1) em Res e depois (2), virá:

$$Res = (\partial x(w,q,r,z(w,q,r,y),y)/\partial z)^2(\partial z(w,q,r,y)/\partial r)$$

Ora, sabemos que $\partial z(w,q,r,y)/\partial r$ é negativo ou nulo. O outro termo do produto, por ser um quadrado, é não-negativo. Segue-se que $Res \leq 0$.

A desigualdade pode tornar-se estrita se $\partial z(w,q,r,y)/\partial r < 0$. Se C(w,q,r,y) for estritamente côncava em (w,q,r), essa condição será obedecida. Mas já sabemos que uma função linear homogênea não pode ser estritamente côncava. Conhecemos, contudo, uma condição suficiente para que isso ocorra, a qual é dada pelo teorema 4.

Outra questão que deve ter intrigado o leitor é ter-se dado o nome de princípio **Le Chatelier-Samuelson** a uma mera proposição. A razão é que Le Chatelier enunciou uma proposição semelhante no contexto da química, que recebeu o nome de **Princípio de Le Chatelier**. Samuelson introduziu-a na economia.

Elasticidades

Estudaremos dois tipos de elasticidades: elasticidade da demanda e elasticidade de escala. A elasticidade da demanda de um fator de produção em relação a y é assim definida:

$$e_i = (\partial x_i(w,y))/\partial y)(y/x_i) \; i = 1, 2, \cdots, n$$

Se a função de produção for homotética, $x_i(w,y) = R(y) * h_i(w)$, onde $h_i(w) = \partial h(w)/\partial w_i$. Mas $\partial x_i(w,y)/\partial y = h_i(w)R'(y)$. Substituindo-se essas expressões em e_i, virá:

$$e_i = h_i(w)R'(y)y/h_i(w)(R(y)) = (yR'(y))/R(y))$$

Logo, $e_i = e_j$, quaisquer que sejam i e j, se a função de produção for homotética. Se a função de produção for linear homogênea, $R(y) = y$ e $R'(y) = 1$. Conclui-se que $e_i = 1$ $i = 1, 2, \cdots, n$.

Vejamos a definição de elasticidade de escala.

$$E = (\partial C(w,y)/\partial y)(y/C(w,y))$$

Definamos $s_i = w_i x_i/C(w,y)$, que mede a participação dos dispêndios com o fator i no custo total, quando x_i está no ponto ótimo, $x_i(w,y)$. $C(w,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i(w,y)$. Derivando-se ambos os membros em relação y e multiplicando-os por (y/C(w,y)), virá, depois de algumas manipulações simples:

$$E = \sum_{i=1}^{n} s_i e_i$$

Se $E < 1$, diz-se que retornos crescentes à escala prevalecem; se $E > 1$, retornos decrescentes à escala estão presentes; e, finalmente, quando $E = 1$, temos retornos constantes à escala.

Custo Médio

Para $y > 0$, o custo médio é definido como $M(w,y) = C(w,y)/y$. Se C(w,y) tiver derivada no ponto $y = 0$, segue-se que $\lim_{y \to 0} C(w,y) = C'(w,y)$, ou seja, o custo médio converge para o custo marginal, quando y tende para zero. Note-se que o custo médio não é definido, quando $y = 0$. Mas, se C(w,y) for diferenciável em $y = 0$, podemos estender a definição de M(w,y)da seguinte forma: $M(w,y) = C(w,y)/y$, $y > 0$ e $M(w,y) = C'(w,y)$, $y = 0$.

Uma questão que interessa aos economistas é saber se a curva do custo médio passa por um mínimo. A nova definição de M(w,y) permite que o mínimo se localize no ponto y, quando este é igual a zero, mesmo que M(w,y) seja função convexa de y Se M(w,y) for função estritamente convexa e o mínimo aconteça em $y > 0$, a curva do custo médio terá a forma de um U. A convexidade estrita de C(w,y) implica que o mínimo é único. O ramo à esquerda do mínimo será decrescente e aquele à direita, crescente.

Admite-se que o mínimo de M(w,y) exista para $y > 0$ e que seja único. Uma condição suficiente é a convexidade estrita de M(w,y). Derivando-se M(w,y) em relação a y e igualando-se a zero, $M'(w,y) = \partial M(w,y)/\partial y = 0$ e $M''(w,y) = \partial M^2(w,y)/\partial y^2$),

$$M'(w,y) = \frac{C'(w,y) - C(w,y)/y}{y} = 0$$

Se o mínimo existir no interior do conjunto de definição, ele ocorrerá no ponto em que o custo médio iguala o custo marginal. Seja $\hat{y}$ o ponto onde o mínimo ocorre. A derivada segunda é dada por:

$$M''(w,y) = \frac{y^3 C''(w,y) + C'(w,y) - C'(w,y) - 2y^2(C'(w,y) - C(w,y)/y)}{y^4}$$

No ponto $y = \hat{y}$, o termo entre parêntesis é nulo. Segue-se que

$$M''(w,y) = \frac{C''(w,y)}{y}$$

Tem-se, portanto, $C''(w,\hat{y}) > 0$, para que o mínimo ocorra em $\hat{y}$. Quando $C''(w,y) > 0$, a função C(w,y) é estritamente convexa em y. Mas $C''(w,\hat{y}) > 0$ implica que $C'(w,y)$ seja crescente numa vizinhança de $\hat{y}$. Nesta vizinhança, a curva do custo marginal estará, portanto, abaixo daquela do custo médio à esquerda de $\hat{y}$. E acima, à direita desse ponto. Se o mínimo for único e a curva do custo médio tiver a forma de um U, a curva do custo marginal ficará abaixo da custo médio no trecho $0 < y < \hat{y}$ e acima dela para $\hat{y} < y$. Como vimos, em $y = \hat{y}$, as duas curvas cruzam-se. Elas têm o mesmo valor em $y = 0$.

Se a função de produção for linear homogênea, $C(w,y) = yh(w)$ e, portanto, $C(w,y)/y = C'(w,y) = h(w)$. As duas curvas são paralelas à abscissa, y, e coincidem, assumindo o valor h(w). A curva do custo médio não tem a forma de um U.

Nas duas próximas proposições, admitiremos que C(w,y) seja duas vezes diferenciável em w e y e que $x_i(w,y) > 0$ $i = 1, 2 \cdots, n$ e $y > 0$. Admitiremos, ainda, uma solução interior do problema de minimização e que a curva do custo médio tenha também a forma de um U.

Proposição 3 . *Um aumento do preço do fator* x_i *desloca a curva do custo médio, M(w,y), para cima.*

Demonstração:

Pelo teorema do envelope, $\partial C(w,y)/\partial w_i = x_i(w,y) > 0$, porque, por hipótese, $x_i(w,y) > 0$ e $y > 0$.

$$\partial M(w,y)/\partial w_i = \frac{\partial C(w,y)/\partial w_i}{y} = \frac{x_i(w,y)}{y} > 0$$

que é o que queríamos demonstrar.

Proposição 4 . *Um aumento do preço do fator* x_i *dimimui o nível de produção, ou seja, reduz y, se e somente se* $r_i = (\partial x_i/\partial y)(\frac{y}{x_i}) > 1$

Demonstração:

No ponto de equilíbrio tem-se $C'(w,y) = C(w,y)/y$, $\partial(C(w,y)/y)/\partial y = M'(w,y) = 0$ e $C''(w,y) > 0$. Diferenciando-se a igualdade de acima, virá, quando apenas y e w_i são permitidos variar:

$$C''(w,y)dy + (\partial C'(w,y)/\partial w_i)dw_i = (\frac{\partial C(w,y)/\partial w_i}{y})dw_i + M'(w,y)dy$$

Ora, no ponto de equilíbrio $M'(w,y) = 0$ e pelo teorema do Envelope, também no ponto de equilíbrio, $\frac{\partial C(w,y)/\partial w_i}{y} = \frac{x_i}{y}$. Pelos teoremas de Young e do Envelope, $\partial C'(w,y)/\partial w_i = \partial C^2(w,y)/\partial w_i \partial y = \partial x_i/\partial y$. Efetuando-se as substituições,

$$C''(w,y)dy + (\partial x_i/\partial y)dw_i = \frac{x_i}{y}dw_i$$

Depois de manipulações simples,

$$dy/dw_i = 1/C''(w,y)(\frac{x_i}{y} - \partial x_i/\partial y))$$

$$dy/dw_i = 1/C''(w,y)(\frac{x_i}{y})(1 - \partial x_i/\partial y(\frac{y}{x_i}))$$

Segue-se que:

$$dy/dw_i = 1/C''(w,y)(\frac{x_i}{y})(1 - r_i)$$

Na igualdade acima, o primeiro fator da direita é positivo. O segundo será negativo, se e somente se $r_i > 1$, o que demonstra o teorema.

Teorema do Envelope

O teorema do envelope tem uma importância fundamental nos exercícios de comparativa estática. Outros dois teoremas importantes são o de Young e o da função implícita. Mas só cuidaremos de demonstrar o teorema do envelope. Primeiramente, mostraremos que $\partial C(w,y)/\partial w_i = x_i(w,y)$. No problema de minimização, proposto no início deste capítulo, encontramos as identidades:

$$w_i = \lambda(w,y)F_i(x(w,y)) \tag{1.8}$$

$$y = F(x(w,y)) \tag{1.9}$$

Por hipótese, a solução é interior, ou seja, $x(w,y) > 0$ e $\lambda(w,y) > 0$, onde

$$x(w,y) = (x_1(w,y), x_2(w,y), \cdots, x_n(w,y))$$

Note-se que x(w,y) é um vetor e $\lambda(w,y)$ é um escalar. Sabemos que

$$C(w,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i(w,y)$$

Admitamos que somente w_i varie.

$$\partial C(w,y)/\partial w_i = x_i(w,y) + \sum_{i=1}^{n} w_i \partial x_i(w,y)/\partial w_i$$

Vamos mostrar que a segunda parcela da soma é nula. Mantendo-se y constante, e derivando-se a identidade 1.9 em relação a w_i,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} F_i(w,y)\partial x_i(w,y)/\partial w_i$$

Pela identidade 1.8, $F_i(w,y) = w_i/\lambda(w,y)$. E tem-se

$$1/\lambda(w,y)(\sum_{i=1}^{n} w_i \partial x_i(w,y)/\partial w_i) = 0$$

Como, pela hipótese de haver uma solução interior, $\lambda(w,y) > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(\partial x_i(w,y)/\partial w_i) = 0$$

Vejamos o teorema do envelope. Fixemos apenas numa restrição, $G(x,a) = 0$. As funções F(x,a) e G(x,a) satisfazem as condições do teorema de Kuhn-Tucker e o máximo existe e é interior; x é um vetor n-dimencional e a é o vetor dos parâmetros do problema.

Teorema 12 . *Seja*

$$H(a) = \max_x \{F(x,a), \quad \textit{restrito a } G(x,a) = 0\}$$

e seja

$$L(x,a) = F(x,a) - \lambda G(x,a)$$

Quando se deriva L(x,a) em relação a a_i, e se substitui x e λ pelos valores ótimos, segue-se que

$$\partial L(x,a)/\partial a_i = \partial H(a)/\partial a_i$$

Demonstração:

As condições de primeira ordem, quando $x(a) > 0$ e $\lambda(a) > 0$ são soluções do problema de maximização que satisfazem as seguintes identidades:

$$F_i(x(a),a) = \lambda(x(a))G_i(x(a),a) \tag{1.10}$$

$$G(x(a),a) = 0 \tag{1.11}$$

De $H(a) = F(x(a),a)$, derivando-se em relação a a_i, que é a componente de **a** que é permitido variar:

$$H_i(a) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x(a),a)\partial x_i(a)/\partial a_i + F_{a_i}(x(a),a) \quad (i)$$

Derivando-se $G(x(a),a) = 0$, em relação a a_i,

$$\sum_{i=1}^{n} G_i(x(a),a)\partial x_i(a)/\partial a_i + G_{a_i}(x(a),a) = 0$$

Das condições de primeira ordem, $F_i(x(a)) = \lambda(a)G_i(x(a),a)$. Substituindo-se na identidade acima e depois de manipulações simples,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x(a),a)\partial x_i(a)/\partial a_i = -\lambda(a)G_{a_i}(x(a),a)$$

Substituindo-se em (i),

$$H_i(a) = F_{a_i}(x(a),a) - \lambda(a)G_{a_i}(x(a),a)$$

Se derivarmos L(x,a) em relação a a_i, vamos encontrar exatamente a expressão acima, quando x e λ assumem os valores ótimos.

Conclusões Finais

A literatura que aplica a função custo a problemas empíricos é enorme. Os livros dos professores Takayama e Chambers referem-se a inúmeros trabalhos que aplicam a teoria da função custo. O professor Takayama tem publicado sobre o assunto recentemente. Pensamos que esta monografia poderá ser útil aos colegas economistas rurais, que queiram utilizar a função custo em suas pesquisas

Referências

AVRIEL, M.; DHIEWERT, W. E.; SCHAIBLE, S.; ZANG, I. **Generalized concavity**. New York: Plenum Press, 1988. 332p

BERNDT, E. R.; CHRISTENSEN, L. R The translog function and the substitution of equipment, structures, and labor in U.S. Manufactoring 1929-68. **Journal of Econometrics**, v.1, n.1, p.81-114, Mar 1973.

CHAMBERS, Robert G. **Applied production analysis:** a dual approach. New York. Cambridge University Press, 1994.

SIMONSEN, M. H **Teoria microeconômica**. 2.ed Rio de Janeiro. Fundação Getúlio Vargas, 1971.

TAKAYAMA, Akira. **Analytical methods in economics**. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1991.

CAPÍTULO 2

Função Custo: Tópicos Especiais

No primeiro capítulo, tratamos de demonstrar as propriedades da função custo, no âmbito do cálculo diferencial. Neste capítulo, discutiremos propriedades mais delicadas da função custo, como a extensão para $w \geq 0$ Procura-se desenvolver alguns conhecimentos de matemática que facilitam a compreensão do texto. Noções sobre conjunto compacto e convexo no R^n presume-se serem do conhecimento do leitor

Preparação Matemática

Normalmente, reserva-se o termo espaço para um conjunto para o qual é definido alguma estrutura, como uma topologia ou uma álgebra. Nem sempre faremos esta distinção Referimo-nos ao conjunto dos números reais, quando a melhor expressão seria linha reta, porque, implicitamente, estamos admitindo uma topologia.

Transformações

Estudaremos algumas transformações, das quais extrairemos os teoremas do máximo Neste trabalho, transformação é uma função com domínio no conjunto X e contradomínio nos subconjuntos de Y O próprio Y e o conjunto vazio são elementos do contradomínio. Se Y é finito, com n elementos, o leitor pode verificar que o número de subconjuntos é 2^n. Isso explica a notação 2^Y para o contradomínio. X é subconjunto de R^n e Y é subconjunto de R^m.

Definição 1 .*[Transformação] A transformação $T : X \to 2^Y$ faz corresponder a cada elemento de X um único subconjunto de Y. O próprio Y e o conjunto vazio são subconjuntos de Y.*

No caso de funções, destacam-se as funções contínuas, com grande importância em todos os campos da matemática e da economia Quanto a transformações, o conceito de continuidade é também essencial. Porém, há mais de um conceito e nem sempre são equivalentes.

Definição 2 .*[Semicontínua Inferior]*

A transformação T é semicontínua inferior(abreviado para sci) em $\hat{x} \in X$, se, dado qualquer conjunto aberto $G \subset Y$ e tal que $T(\hat{x}) \cap G \neq \emptyset$, existir um conjunto aberto, U, que contém $\hat{x}$ e $T(x) \cap G \neq \emptyset \ \ \forall x \in U$.

Teorema 1 . *A condição necessária e suficiente para que T seja sci é que G conjunto aberto de Y, $T^-(G)$ seja conjunto aberto de X. Por definição,*

$$T^-(G) = \{x : x \in X \ T(x) \cap G \neq \emptyset\}$$

Demonstração:

1. T é sci.

Seja $x \in T^-(G)$. Vamos mostrar que existe um conjunto aberto de X que contém x e está contido em $T^-(G)$.

Seja G um conjunto aberto de Y e x, elemento de X, tal que $x \in T^-(G)$. Pela definição de sci, existe um conjunto aberto de X, V, que contém x, e, ainda, $T(y) \cap G \neq \emptyset$ para todo y de V. Pela definição de T^-, tem-se que $V \subset T^-(G)$. Logo, $T^-(G)$ é aberto em X.

2. Seja G um conjunto aberto de Y, então, $T^-(G)$ é um conjunto aberto de X. Isto implica que T é sci.

Seja z um elemento de X e G um conjunto aberto de Y, tal que $T(z) \cap G \neq \emptyset$. Como $z \in T^-(G)$, e este conjunto é aberto em X, existe um conjunto aberto, U que contém z, e $U \subset T^{-}(G)$. Daí se segue que, se y pertence a U, então, $T(y) \cap G \neq \emptyset$, que prova que T é sci.

O exemplo abaixo ilustra uma transformação que não é sci.

Exemplo 1 . *A transformação T age sobre os números reais não-negativos, o conjunto X, da seguinte forma:*

$$T(x) = [0,1] \quad \textit{para } x > 0$$
$$T(0) = [0,2]$$

ou seja, o contradomínio de cada número positivo é o intervalo fechado de pontos extremos 0 e 1. Contudo, o ponto 0 tem, como contradomínio, o intervalo fechado de pontos extremos 0 e 2. Faça o gráfico e se convença de que T não é sci em 0. Sugestão: considere qualquer intervalo aberto $(2-a, 2+a)$ e $0 < a < 1$. Certifique-se que a este intervalo apenas corresponde o ponto 0, ou seja, $T^{-}([2-a, 2+a]) = 0$, e 0 é um conjunto fechado de $\{x \geq 0\}$.

Definição 3 .*[Semicontínua Superior] A transformação $T : X \to 2^Y$ é semicontínua superior, scs, no ponto x de X, se para qualquer conjunto aberto G de Y e $T(x) \subset G$ existir um conjunto, V, aberto em X, que contenha x, e se y pertencer a V, então, $T(y) \subset G$.*

Teorema 2 . *T é scs, se e somente se para qualquer conjunto G, aberto em Y, $T^{+}(G)$ é conjunto aberto de X.*

$$T^{+}(G) = \{x : x \in X \quad T(x) \subset G\}$$

1. T é scs.

Seja G um conjunto aberto de Y. Temos de mostrar que $T^{+}(G)$ é aberto em X. Se G for o conjunto vazio, $T^{+}(G) = \emptyset$, que é aberto em X. Suponha que G contenha algum elemento y, e que $y \in T(z) \subset G$, $z \in X$. Como T e usc, existe um conjunto aberto, V_y, tal que z pertence a V_y e se w pertence a V_y, então, $T(w) \subset G$. Portanto, $V_y \subset T^{+}(G)$. Logo $T^{+}(G)$ é a união de todos os conjuntos V_y, quando y pertence a G. Como V_y é aberto, segue-se que $T^{+}(G)$ é conjunto aberto.

2. Seja G um conjunto aberto de Y. Se G for o conjunto vazio, $T^+(G) = \emptyset$ e nada há a demonstrar. Seja G não-vazio. Mas, $T^+(G)$ é um conjunto aberto de X, por hipótese. Seja z tal que $T(z) \subset G$. Como $z \in T^+(G)$, segue-se que existe um conjunto aberto, U, que contém z e é subconjunto de $T^+(G)$. Logo, $T(U) \subset G$ e T é scs em z. Como z é um ponto arbitrário de X, segue-se que T é scs em X. □

Exemplo 2 . *A transformação T é definida nos números não-negativos, como se segue:*

$$T(x) = [0,1] \quad para \quad x > 0$$
$$T(0) = 0$$

Faça o gráfico da transformação. No eixo Y, seja $[0,1/4)$ um conjunto aberto que contém zero. Note-se que $T^+[0,1/4) = 0$, portanto, um conjunto fechado de X. E, por isso, T não é scs em 0. Sem muito esforço, demonstre que T é sci. Use o teorema 1. Use o teorema 2 para mostrar que T, no exemplo 1, é scs. Os dois exemplos mostram que os dois conceitos não são equivalentes.

Definição 4 .*[Transformação contínua] T é uma transformação contínua se for sci e scs, simultaneamente.*

Comentários:

Como o conjunto vazio é subconjunto de Y, é preciso completar as definições dadas:

$$T^+(\emptyset) = \{x : x \in X \quad T(x) \subset \emptyset\} = \emptyset$$
$$T^-(\emptyset) = \{x : x \in X \quad T(x) \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset$$

As definições dadas não são fáceis de ser verificadas na prática. Dois conceitos que, em certas circunstâncias, são, respectivamente, equivalentes a cada uma delas, serão explicitados.

Definição 5 .*[Transformação Fechada]*

$$T : X \rightarrow 2^Y$$
$$x^v \rightarrow x$$

$$y^v \to y \;\; e \;\; y^v \in f(x^v)$$

Então,

$$y \in f(x)$$

Vejamos outra definição importante.

Definição 6 .*[Gráfico de uma Transformação] O gráfico de uma transformação é dado por:*

$$G_T = \{(x, y) : y \in T(x)\}$$

Proposição 1 . *O gráfico de uma transformação é um conjunto fechado no Produto Cartesiano XxY, ou seja, G_T é um conjunto fechado em XxY se e somente se a transformação for fechada.*

Demonstração:

1. A transformação é fechada. Temos de mostrar que $G_T = \bar{G_T}$. Seja $(x, y) \in \bar{G_T}$. Por definição, existe uma seqüência de G_T, (x^v, y^v) que converge para (x,y). Como, $y^v \in T(x^v)$, sendo a transformação fechada, $y \in T(x)$. Logo, $(x, y) \in G_T$. Portanto, $\bar{G_T} \subset G_T$. Como, por definição, $G_T \subset \bar{G_T}$, segue-se que $G_T = \bar{G_T}$.

2. O gráfico de G_T é conjunto fechado.

Seja (x^v, y^v) uma seqüência tal que $y^v \in T(x^v)$, $x^v \to x$ e $y^v \to y$. Como o gráfico é um conjunto fechado, segue-se que $(x, y) \in G_T$. Portanto, $y \in T(x)$ e, assim, T é uma transformação fechada. □

Teorema 3 . *Seja T scs e T(x) conjunto fechado de Y para todo x de X. Então, T é transformação fechada.*

Demonstração:

Admita que não.

Existe, portanto, uma seqüência (x^v, y^v) que converge para (x,y) e y não pertence a T(x). Como T(x) é um conjunto fechado de Y, existem dois conjuntos, sendo U fechado e V aberto, tais que $U \cap V = \emptyset$. $y \in U$ e $T(x) \subset V$.

Como T é scs e $T(x) \subset V$, existe um conjunto aberto de X, W(x), e se z pertence a W(x), então, $T(z) \subset V$.

Como $x^v \to x$, para v suficientemente grande $v \geq \bar{v}$, x^v está contido em W(x). Daí se segue que $y^v \in V$ para $v \geq \bar{v}$, que impede que y^v convirja para y, contrariando a hipótese feita.

Como se obtêm U e V?

Como T(x) é um conjunto fechado, e y não pertence T(x), a distância de y a T(x) é um número positivo $\epsilon > 0$. Defina $U = \{u : |u - y| \leq \epsilon/2\}$. Obviamente, U é conjunto fechado. O complemento de U, V, é um conjunto aberto. □

Exercício:

Recorde-se da definição da distância de um ponto a um conjunto e demonstre que a distância de um ponto a um conjunto fechado, em que o ponto não pertence ao conjunto, é um número positivo. A distância entre dois conjuntos fechados, que não se interceptam, pode ser nula. Considere o eixo dos x's e $1/x$.

Teorema 4 . *Seja T uma transformação fechada e Y compacto. Então, (i) se a é um ponto de X, T(a) é um conjunto compacto; (ii) T é uma transformação scs.*

Demonstração:

(i) Utilizaremos do fato de que o gráfico de uma transformação fechada é um conjunto fechado. O conjunto abaixo é compacto:

$$(a, T(a)) = \{(x, y) : y \in T(x)\} \cap \{a\, x\, Y\} = G_T \cap \{a\, x\, Y\}$$

Com pouco esforço, o leitor se convencerá da validade das igualdades acima.

Observe-se que o conjunto G_T é fechado, porque a transformação T é fechada, por hipótese. Admitimos o conjunto Y compacto. Logo, $\{a\, T(a)\}$, sendo a interseção de dois conjuntos, um fechado, G_T, e o outro compacto, $\{a\, x\, Y\}$, é conjunto compacto. E, assim, $\{a, T(a)\}$ é um conjunto compacto. Sejam $\Pi_x : X\, x\, Y = X$ e $\Pi_y : X\, x\, Y = Y$ as projeções sobre os respectivos eixos X e Y. Elas são função contínuas.

$$\Pi_y(a, T(a)) = T(a)$$

A continuidade da projeção, sendo $\{a, T(a)\}$ um conjunto compacto, implica que T(a) é um conjunto compacto.

(ii) Seja W um conjunto aberto de Y. O conjunto V será aberto em X se T for scs, pelo teorema 2.

$$V = T^+(W) = \{x \in X : T(x) \subset W\}$$

Consideremos o conjunto V^c, complemento de V; o objetivo é mostrar que ele é fechado. É fácil ver que

$$V^c = \{x \in X : T(x) \subset W^c\}$$

Defina agora o conjunto auxiliar

$$M = \{(x, y) : y \in T(x)\} \cap \{X \, x \, W^c\} = \{G_T \cap X \, x \, W^c\}$$

É fácil ver que $\Pi_x(M) = V^c$

Seja $x \in \bar{V^c}$. Existe uma sequência x^v que converge para x, e a seqüência pertence a V^c. Seja $y^v \in T(x^v)$. É claro que y^v pertence a W^c que, sendo um conjunto fechado de um espaço compacto, é compacto. Existe, portanto, uma subseqüência z^v de y^v que converge para um ponto y de W^c. Seja h^v a correspondente subseqüência de x^v. Obviamente, essa subseqüência converge para x. Ora $(h^v, z^v) \in G_T$, que, sendo um conjunto fechado, implica que (x,y) pertença a G_T. Mas (x, y) pertence a $X \, x \, W^c$; portanto, pertence a M. Mas $\Pi_x(x, y) = x \in V^c$. Logo, $\bar{V^c} \subset V^c$, o que equivale a $V^c = \bar{V}c$. E V^c é, portanto, um conjunto fechado e, assim, V é conjunto aberto. □

Definição 7 . *Uma transformação é hemicontínua inferior, HCI, no ponto x de X se a seqüência x^v de X converge para x e $y \in T(x)$; então, existe uma seqüência y^v de Y, $y^v \in T(x^v)$ e y^v converge para y.*

Teorema 5 .

Uma transformação, T, é HCI no ponto x de X, se e somente se T for sci em x. Admitimos que $T(x) \neq \emptyset \; \forall x \in X$.

Demonstração:

Necessidade: Suponha que não. Existe x, elemento de X, e T não é sci em x. Seja V um conjunto de Y, aberto, e tal que $T(x) \cap V \neq \emptyset$. E $y \in T(x) \cap V$. Seja U_n uma seqüência de conjuntos abertos de X, tais que:

$$U_n = \{z :\in X \,|z - x| < 1/n \; n = 1, 2, \ldots\}$$

Como T não é sci em x, em cada U_n é possível escolher-se z_n, tal que a seqüência obtida convirja, obviamente, para x e $T(z_n) \cap V = \emptyset$. Seja t^n uma seqüência qualquer, tal que $t^n \in T(z_n)$. Esta seqüência não pode convergir para y, porque $y \in V$ e $T(z_n) \cap V = \emptyset$. Logo T não é HCI em x, que contraria a hipótese feita sobre T.

Suficiência. Seja $\{x_v\}$ uma sequência de X que converge para o ponto x e $y \in T(x)$. Defina $B(y, 1/n) = \{z : z \in Y |z - y| < 1/n \quad n = 1, 2, \cdots\}$, uma bola aberta, de raio $1/n$ e centrada em y. Trata-se de um conjunto aberto. Como $B(y, 1/n) \cap T(x) \neq \emptyset$, pela definição sci, para cada n, existe uma bola aberta de raio $1/m_n$, $B(x, 1/m_n)$, tal que, se q pertence a essa bola, então, $T(q) \cap B(y, 1/n) \neq \emptyset$. Como a seqüência escolhida converge para x, cada bola aberta $B(x, 1/m_n)$ contém todos seus elementos, exceto um número finito deles, para $m_n \; n = 1, 2, \cdots$ e escolhe-se m_n de modo que $m_n \to \infty$. Seja o elemento x_{m_n} de $B(x, 1/m_n)$. Tem-se $T(x_{m_n}) \cap B(y, 1/n) \neq \emptyset$. Seja $y_n \in T(x_{m_n}) \cap B(y, 1/n)$. A seqüência y_n, que converge para y, é a seqüência procurada. □

Iniciaremos a discussão dos teoremas conhecidos por teoremas do máximo. O primeiro deles indica que a transformação scs transforma conjuntos compactos em conjuntos compactos, mas às custas de uma restrição adicional.

Teorema 6 . *Se X é um conjunto compacto e se x é um elemento de X e* **T(x) um conjunto compacto de Y**, *segue-se que T(X) é compacto em Y, se T for scs.*

Demonstração:

Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de T(X), porque T é scs. Como T(x) é compacto, existe uma subcobertura finita da cobertura original que cobre T(x), cuja união de conjuntos designamos por W(x).

$\{T^+(W(x))\}_{x \in X}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe uma subcobertura finita que cobre X. Designá-la-emos por $\{T^+(W(x_i)\}_{i \in F}$, onde F é um conjunto indexador finito.

$\{W(x_i)\}_{i\in F}$ é uma cobertura finita de T(X). Cada um de seus membros é a reunião de um número finito de U's. Portanto, um número finito de conjuntos da cobertura original cobre T(X) e segue-se que T(X) é compacto. □

Precisamos, agora, do conceito de semicontinuidade para funções. Trataremos do assunto a seguir.

Funções Semicontínuas Reais

Definição 8 .*[Semicontinuidade Inferior-lsc]*

A função f(x) é semicontínua inferior se, dado $\epsilon > 0$, *existir uma vizinhança,* $N(x,\epsilon)$, *tal que, se y pertencer à mesma,*

$$f(y) > f(x) - \epsilon$$

Definição 9 *[Semicontinuidade Superior-usc] A função f(x) é semicontínua superior se, dado* $\epsilon > 0$, *existir uma vizinhança* $N(x,\epsilon)$, *tal que, se y pertencer à mesma,*

$$f(y) < f(x) + \epsilon$$

Proposição 2 . *(i) A função f(x) é usc em x, se e somente se, quando* $x_{n,} \rightarrow x$

$$\limsup_n f(x_n \leq f(x)$$

(ii) A função f(x) é lsc em x, se e somente se, quando $x_n \rightarrow x$,

$$\limsup_n f(x_n) \geq f(x)$$

Demonstração:

Só demonstraremos o item (i). Como f(x) é usc, se e somente se -f(x) for lsc, não há dificuldade na demonstração do item (ii).

1. Seja a seqüência $x_n \rightarrow x$. Pela definição de usc e de limite, para $n > \bar{n}$, $f(x_n) < f(x) + \epsilon$. Logo,

$$\sup_{n>\bar{n}} f(x_n) \leq f(x) + \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário,

$$\sup_{n>\bar{n}} f(x_n) \leq f(x)$$

Conseqüentemente,

$$\limsup_n f(x_n) \leq f(x)$$

2. Suponha agora que prevaleça a desigualdade do enunciado para lim sup. Seja $\epsilon > 0$ e admita que f(x) não seja usc. Seja $N(x, 1/n)$ uma seqüência de vizinhanças de x. Em cada uma delas existirá x_n, tal que $f(x_n) \geq f(x) + \epsilon$. Ora, isso implica, como o leitor pode facilmente entender, que

$$\limsup_n f(x_n) > f(x),$$

que é uma contradição.

Proposição 3 . *Seja* $A(r) = \{x : f(x) \geq r \quad r$ *é um número real qualquer*$\}$. *Então, f(x) é usc, se e somente se A(r) for um conjunto fechado para todo r.*

Demonstração:

1. Seja x pertencente ao fecho de A(r), $\bar{A}(r)$. Então, existe uma seqüência, x_n, de A(r) que converge para x. Evidentemente, $f(x_n) \geq r$, que implica $\limsup_n f(x_n) \geq r$. Como, por hipótese, $\limsup_n f(x_n) \leq f(x)$, segue-se que

$$f(x) \geq r$$

Portanto, x pertence a A(r), que demonstra a metade da proposição.

2. Seja A(r) fechado para cada r, número real. A estratégia é encontrar u, tal que A(u) não seja fechado, obtendo-se uma contradição. Suponha que f(x) não seja usc em x. Isto implica que existe uma seqüência x_n, que converge para x, e tal que $\limsup_n f(x_n) > f(x)$, que implica que existe u, tal que:

$$\limsup_n f(x_n) > u > f(x)$$

Seja, agora,

$$A(u) = \{w : f(w) \geq u\}$$

É claro que x **não** pertence a A(u).

Pela definição de limite supremo (limsup), podemos extrair uma subseqüência de x_n, designada por x_{nk}, que obviamente converge para x, e $f(x_{nk})$, que converge para o $\limsup f((x_{nk})$. Para $k \geq \bar{m}$, então, $f(x_{nk}) > u$. Vamos eliminar dessa subseqüência os primeiros nk termos. A seqüência resultante, x_m, então, pertence a A(u). Dessa forma, construímos uma seqüência, x_m que pertence a A(u), cujo limite não está em A(u), e este conjunto não é, assim, fechado, o que é a contradição buscada.

Deixamos, como exercício, a demonstração do corolário que se segue.

Corolário 1 . *Uma função real é contínua, se e somente se for usc e lsc.*

Teorema 7 . *Se f(x,y) for uma função real lsc em XxY e T(x) uma transformação sci e $T(x) \neq \emptyset$, então, a função*

$$M(x) = \sup_{y \in T(x)} f(x,y),$$

definida no campo dos números reais, é lsc.

Demonstração:

Na definição, é crucial a hipótese $T(x) \neq \emptyset$. Pela definição de supremo, para $\bar{x}$ pertencente a X e $\epsilon > 0$, existe $\bar{y}$ em $T(\bar{x})$, tal que:

$$f(\bar{x},\bar{y}) \geq M(\bar{x}) - \epsilon$$

Como f(x) é lsc (veja definição), existem duas vizinhanças, $U(\bar{x})$ e $V(\bar{y})$, tais que, se $(x,y) \in U(\bar{x})xV(\bar{y})$,

$$f(x,y) > f(\bar{x},\bar{y}) - \epsilon > M(\bar{x}) - 2\epsilon \tag{2.1}$$

Pode ocorrer que, para algum x de $U(\bar{x})$, se tenha $T(x) \cap V(\bar{y}) = \emptyset$. Nesse caso, para este x, ao se tomar o supremo, na definição de M(x), y não variará em $V(\bar{y})$ e não se poderá usar a desigualdade acima.

É agora que a hipótese da lsc nos socorre. Como $V(\bar{y}) \cap T(\bar{x}) \neq \emptyset$, existe $U'(\bar{x})$, tal que, se z pertencer a essa vizinhança, tem-se $T(z) \cap V(\bar{y}) \neq \emptyset$. Portanto, construiremos uma nova vizinhança:

$$U''(\bar{x}) = U' \cap U(\bar{x})$$

Para z nesta vizinhança, tem-se: $T(z) \cap V(\bar{y}) \neq \emptyset$, que nos garante tomar o supremo num conjunto não-vazio. Trata-se do segundo supremo da desigualdade abaixo. Como $T(x) \cap V(\bar{y}) \subset T(x)$, daí se segue, tendo-se em conta 2.1,

$$M(x) = \sup_{y \in T(x)} \{f(x,y)\} \geq \sup_{y \in \{T(x) \cap V(\bar{y})\ x \in U''\}} \{f(x,y)\} \geq f(\bar{x},\bar{y}) - \epsilon > M(\bar{x}) - 2\epsilon$$

Logo, para $x \in U''(\bar{x})$,

$$M(x) > M(\bar{x}) - 2\epsilon$$

Teorema 8 . *Seja f(x,y) uma função usc em XxY e $T : X \to Y$ uma transformação que é scs, T(x) não-vazio e compacto, então a função*

$$M(x) = \max_{y \in T(x)} f(x,y)$$

é bem definida e é usc.

Demonstração:

Será feita por etapas.

1. Como T(x) é um conjunto compacto e f(x,y) é usc em y, porque, por hipótese, é usc em (x,y), pelo teorema 6, o máximo existe e M(x) é uma função bem definida.

2. Como f(x,y) é usc, dado $\epsilon > 0$, para cada $(\bar{x}, y)$ e $y \in T(\bar{x})$, existem vizinhanças $U_y(\bar{x})$ e V(y), tais que, se $(x,z) \in U_y(\bar{x}) x V(y)$, tem-se

$$f(x,z) < f(\bar{x},y) + \epsilon \quad (*)$$

3. Como V(y) é uma cobertura de $T(\bar{x})$, que é um conjunto compacto, existe uma subcobertura finita da cobertura, $\{V(y)\ \ y \in T(\bar{x})\}$, que cobre $T(\bar{x})$. Designemo-la por $\{V(y_i)\ \ i \in F\}$ e F é um conjunto finito. Logo, $T(\bar{x}) \subset \cup_{i \in F} V(y_i) = W$. Designemos o conjunto correspondente a V_{y_i} por $U_{y_i}(\bar{x})$. Para $(x,z) \in U_{y_i} x V(y_i)$, tem-se

$$f(x,z) < f(\bar{x},z) + \epsilon \quad (**)$$

4. Seja $U(\bar{x}) = \cap_{i \in F} U_{y_i}(\bar{x})$. Se $(x, z) \in U(\bar{x})xW$, então, para algum $i \in F$ $z \in V(y_i)$, o que implica que

$$f(x, z) < f(\bar{x}, y_i) + \epsilon \quad (***)$$

Pode ocorrer que, quando x pertence a $U(\bar{x})$, T(x) não esteja contido em W e, nesse caso, a desigualdade (***) não se aplica. Mas $T(\bar{x}) \subset W$. Como T(x) é scs, existe $U_1(\bar{x})$, tal que $T(U_1(\bar{x})) \subset W$. Defina $U'(\bar{x}) = U_1(\bar{x}) \cap U(\bar{x})$.

5. De $(***)$ vem $f(x, z) < \max_{i \in F} f(\bar{x}, y_i) + \epsilon < M(\bar{x}) + \epsilon$. Restringindo-se x em $U'(\bar{x})$, a desigualdade acima é válida para todo elemento de T(x). Logo, para $x \in U'(x)$,

$$M(x) = \max_{z \in T(x)} f(x, z) \leq \max_{i \in F} f(x, y_i) + \epsilon < M(\bar{x}) + \epsilon$$

Assim, fica demonstrado o teorema. □

Exemplo 3 . *Seja f uma função contínua, definida no conjunto XxY e com valores nos números reais. Então, a transformação:*

$$T(x) = \{y : \ y \in Y \ f(x, y) \leq 0\}$$

é fechada.

Demonstração:

Recordemos a definição de transformação fechada:

$$x^v \to x; \ y^v \to y; \ y^v \in T(x^v) \Rightarrow y \in T(x)$$

Logo, $f(x^v, y^v) \leq 0$. Como f(x,y) é uma função contínua, $\lim_{v \to \infty} f(x^v, y^v) = f(x, y)$, segue-se que $f(x, y) \leq 0$. Tem-se, assim, $y \in T(x)$.

Lema 1 . *Seja T_i $_{i \in I}$ uma família de transformações fechadas, indexadas por I, então, $T = \cap_{i \in I} T_i$ é uma transformação fechada.*

Demonstração:

Seja

$$x^{v} \to x \quad \text{e pertencem a X} \tag{2.2}$$

$$y^{v} \to y \text{ e } y^{v} \in T(x^{v}) \tag{2.3}$$

$$\text{Precisamos mostrar que} \tag{2.4}$$

$$\Rightarrow y \in T(x) \tag{2.5}$$

Pela definição de T e como cada T_i é uma transformação fechada, segue-se que y pertence a cada T_i e, portanto, pertence a T. Logo, T é uma transformação fechada. □

Lema 2 . *Se T é uma transformação fechada e Q é uma transformação scs e Q(x) é um conjunto fechado, segue-se que $R = T \cap Q$ é uma transformação fechada que é scs, quando Y é um espaço compacto.*

Demonstração:

Como Q(x) é um conjunto fechado, Q é uma transformação fechada, pelo teorema 3. Segue-se que R é uma transformação fechada, pelo lema 1. Como Y é um conjunto compacto e R uma transformação fechada, segue- se que R é scs. □

Terminamos a preparação que nos permite enunciar e provar o teorema principal.

Teorema 9 . *Se f é uma função contínua definida em Y e contradomínio nos números reais, e T é uma transformação contínua(simultaneamente scs e sci) e T(x) compacto para todo x de X, então a função definida por*

$$M(x) = \max_{y \in T(x)} f(y)$$

é contínua e a transformação H(x), definida por

$$H(x) = \{y \in T(x) \; e \; f(y) = M(x)\},$$

é usc.

Demonstração:

A demonstração será feita por etapas:

1. Defina $g : XxY \to R$ por $g(x,y) = f(y)$. Como f(y) é função contínua, segue-se que g(x,y) é função contínua de (x,y) definida em XxY. Portanto, scs e sci, simultaneamente.
2.

$$M(x) = \max_{y \in T(x)} g(x,y)$$

é, pelos teoremas 7 e 8, sci e scs, simultaneamente. E, pelo corolário 1, M(x) é função contínua de x. Do ponto de vista de aplicação, esta é a parte mais relevante do teorema.
3.

$$\Delta(x) = \{y : M(x) - f(y) \leq 0\}$$

O exemplo acima mostrou que $\Delta(x)$ é uma transformação fechada, porque M e f são funções contínuas. É fácil verificar que $\Delta(x)$ é um conjunto fechado para cada x.

4. É fácil ver que $H = T \cap \Delta$. Logo, pelo lema 2, H(x) é scs.

Observações:

1. $\Delta(x)$ não exige que y pertença a T(x);
2. Quando y pertence a T(x), $M(x) - f(y) < 0$ é impossível. Logo, $H = T \cap \Delta$;
3. A função M(x) é bem definida, porque T(x) é um conjunto compacto. □

Funções Semicôncavas

Outro conceito importante é o de função semicôncava. Um exemplo, em três dimensões, é a função de gráfico semelhante a um sino. É um conceito mais geral que o de função côncava. Toda função côncava é semicôncava; mas a recíproca não é verdadeira. Toda combinação linear de funções côncavas é uma função côncava; mas essa propriedade nem sempre é válida para funções semicôncavas, que limita sua aplicação em economia. Não vamos aprofundar-nos no seu estudo. Um tratamento detalhado do assunto pode ser visto em Avriel et al., 1988.

Definição 10 .

A função real f(x), definida no conjunto convexo X, é semicôncava, se, para $0 \leq t \leq$ *dados quaisquer x e y,* $f(tx + (1 - t)y \geq \min(f(x), f(y))$.

Teorema 10 . *Uma função f(x) é semicôncava, se e somente se o conjunto*

$$C = \{x : f(x) \geq r \quad r \text{ é qualquer número real}\}$$

for convexo.

Demonstração:

1. f(x) é semicôncava.

Sejam x e y pertencentes a C e r um número real Portanto, $f(x) \geq r$ e $f(y) \geq r$ Seja $x(t) = tx + (1 - t)y$ $0 \leq t \leq 1$ Seja $r' = \min(f(x), f(y))$ Pela definição de semiconcavidade, $f(x(t)) \geq r' \geq r$. Logo, x(t) pertence ao conjunto C e C é convexo

2. O conjunto C é convexo. Sejam x e y dois pontos quaisquer. E seja o mínimo de (f(x),f(y)) igual a $r = f(x)$ Poder-se-ia ter escolhido f(y). E seja x(t), como anteriormente definido. Como C é convexo, x(t) pertence a C,

$$C = \{x : f(x) \geq r\}$$

Logo, $f(x(t)) \geq r = \min(f(x), f(y))$. □

A Função Custo: Tópicos Avançados

Discutiremos a extensão de C(w,y) para $w \geq 0$, a continuidade de C(w,y) em relação a w, a semicontinuidade inferior em relação a y e a existência de derivadas parciais. O capítulo finaliza com a discussão da dualidade que existe entre a função custo e a função de produção.

Continuidade e Semicontinuidade

Primeiramente, virá um lema que encontrará aplicação a seguir.

Lema 3 . *Sejam y^1, y^2 e $A(y)$ uma transformação dada por*

$$A(y) = \{x \geq 0 : F(x) \geq y\}$$

Então, $A(y)$ é uma transformação fechada e será usc, se o contradomínio for um conjunto compacto.

Demonstração:

Admitamos que

$$y^v \rightarrow y$$

$$x^v \in A(y^v) \; x^v \rightarrow x$$

Temos de mostrar $x \in A(y)$.

Observe-se que $\limsup y^v = y$, porque o limite de y^v é igual a y. Como $x^v \in A(y^v)$, segue-se que $F(x^v) \geq y^v$. Sendo F(x) usc, pela proposição 2,

$$F(x) \geq \limsup F(x^v) \geq y$$

Conseqüentemente, $x \in A(y)$. Logo, a transformação A(y) é fechada. Pelo teorema 4, A(y) será scs, quando o contradomínio de A(y) for um conjunto compacto y. □

Teorema 11 . *A função custo é lsc, semicontínua inferior, em y.*

Demonstração:

Seja uma seqüência y^v, do intervalo $|y_1, y_2|$ que converge para y e $y_1 \leq y \leq y_2$ $y_1 < y_2$. Como toda seqüência convergente é limitada, a escolha do intervalo não limita a generalidade. Seja $C(w, y^v) = w * x^v$. Admita-se que x^v resolva o problema de minimização, quando $y = y^v$. E x_i $i = 1, 2$ faz o mesmo, quando $y = y_i$ $i = 1, 2$. Como C(w,y) é crescente em y, $y^v \leq y_2$, tem-se $w * x^v \leq w * x_2$. Como $x^v \geq 0$, e $w > 0$, segue-se que x^v pertence ao conjunto compacto $A = \{x : 0 \leq w * x \leq w * x_2\}$. Portanto, existe uma subseqüência de x^v, designada por z^v, que converge para algum z, que pertence a A. Designemos por s^v a correspondente subseqüência de y^v. Portanto,

$$\limsup C(w, s^v) = \limsup(w * z^v) = \lim(w * z^v) = w * z$$

Pela definição de *limsup*, certamente,

$$\limsup C(w, y^v) \geq \limsup C(w, s^v) = w * z \quad (*)$$

Mas $F(z^v) \geq s^v$. Como F(x) é usc, tem-se:

$$F(z) \geq \limsup F(z^v) \geq \limsup s^v = y$$

Fatos usados na obtenção da desigualdade acima: a subseqüência s^v converge para o mesmo limite da seqüência original e, para uma seqüência convergente, tem-se $\limsup =$ $\lim$.

Conseqüentemente, $z \in A$ e

$$C(w, y) \leq w * z \quad (*)$$

Considerando-se (*) e (**), tem-se que $\limsup C(w, y^v) \geq C(w, y)$ e, pela proposição 2, C(w,y) é lsc em y. □

Demonstração alternativa:

Com pouco esforço podemos provar o teorema, via teorema do máximo, teorema 8. Vimos que A(y) é uma transformação fechada. Construamos a transformação: $B(y) = \{x \geq 0 : w * x \leq w * x^2\}$. B(y) é uma transformação constante: transforma todo y sempre no mesmo conjunto, que é compacto. Portanto, é fácil mostrar que B(y) é uma transformação fechada e scs. Logo, $T(y) = A(y) \cap B(y)$ é uma transformação fechada. Como o contradomínio de T(y) é compacto, T é scs. Ora,

$$C(w, y) = \min_{x \in T(y)} w * x = -[\max_{x \in T(y)} w * x]$$

Como $w * x$ é função contínua de x, segue-se pelo teorema 8 que a função, entre colchetes, é usc. E o negativo de uma função que é usc é lsc. □

Precisamos de mais um lema.

Lema 4 . *A transformação*

$$A(w) = \{x \geq 0 : \ w * x \leq w * x^2 \ w > 0\}$$

é contínua em w.

Demonstração:

Consideremos $0 < w^1 < w^2$ e $w^1 \leq w \leq w^2$. Para cada w nesse intervalo, o contradomínio de A(w) é um conjunto compacto em R^m_{++}, porque fechado e limitado. Mas

$$A(w) \subset \{x \geq 0 : w * x \leq w^2 * x^2\}$$

Portanto, o contradomínio de A(w) é um conjunto compacto de R^m_{++}, porque é fechado e limitado. Se provarmos que A(w) é uma transformação fechada, segue-se que A(w) é scs. Se provarmos que A(w) é sci, então, ela é uma transformação contínua.

1. A(w) é uma transformação fechada.

$$w^v \to w$$

$$x^v \to x \quad x^v \in A(w^v)$$

Temos de provar que:

$$x \in A(w)$$

Pela definição de A(w),

$$w^v * x^v \leq w^v * x^2$$

Tomando-se o limite, quando v tende para o infinito,

$$w * x \leq w * x^2$$

que demonstra que $x \in A(w)$. Logo, A(w) é uma transformação fechada. Como o contradomínio de A(w) é um conjunto compacto, portanto fechado, segue-se, pelo teorema 4, que A(w) é scs.

Exercício: Verifique quando foi usada, na demonstração, a continuidade de $w * x$.

2. A(w) é HCI.

$$w^v \to w$$

$$\hat{x} \in A(w)$$

Temos de provar que existe uma seqüência

$$t^v \to \hat{x} \quad t^v \in A(w^v)$$

Sejam h^v uma seqüência do R^n_+ que converge para $\dot{x}$.

Caso 1. $w * \dot{x} \quad w * x^2$. Defina c^v da seguinte forma. $w^v * h^v c^v \quad w^v * \dot{x} \quad w^v * x^2$
É fácil verificar que a seqüência c^v converge para 1, porque w^v converge para w e h^v para $\dot{x}$. Defina $t^v = h^v c^v$ Logo, $t^v \in A(w^v$ e t^v converge para $\dot{x}$.

Caso 2. $w * \dot{x} < w * x^2$. Como o limite de $w^v h^v$ é igual a $w * \dot{x}$, segue-se que para $v \geq \dot{v}$, $w^v * h^v < w * x^2$. Eliminem-se de h^v os primeiros v termos e ter-se-á a seqüência h'^v que pertence a $A(w^v)$ e converge para $\dot{x}$

Assim, A(w) é HCl e, portanto, sci. Por ser sci e scs, é contínua para w no intervalo estipulado. Como w^1 e w^2 são arbitrários, A(w) é contínua para $w > 0$. □

Construamos, para cada y maior que zero e fixo, a transformação constante

$$B(w) = \{x \geq 0 : F(x) \geq y\}$$

É fácil ver que esta transformação é contínua. Deixamos ao leitor, como exercício, verificar isto. Daí se segue que $T(w) = A(w) \cap B(w)$ é uma transformação contínua

Como

$$C(w, y) = \min_{x \in T(w)} w * x$$

e $w * x$ é função contínua de w, pelo teorema 10, C(w,y) é função contínua de $w > 0$.

Toda função côncava é contínua no interior do conjunto de definição, o qual é convexo. Por este teorema, a função C(w,y) é contínua para $w > 0$. É claro que o caminho é muito mais simples, mas exige a aplicação de um teorema de análise, cuja demonstração é complicada. □

Extensão de Fenchel

Definição 11 . *Seja f(x) uma função real definida no conjunto X e* $X \subset Y$. *Seja g(y) definida no conjunto Y. Então, a função g é extensão de f, se* $g(x) = f(x) \quad x \in X$.

Como temos $y > 0$ e fixo, de forma mais simples, escreve-se $g(w) = C(w, y) \quad w > 0$. Vamos estender o conjunto de definição de g para $w \geq 0$.

Definição 12

$$G_g = \{(c, w) : g(w) \geq c\} \tag{2.6}$$

$$h(w) = \sup_c (c, w) \in G_g \tag{2.7}$$

$$G_h = \{(c, w) : h(w) \geq c\} \tag{2.8}$$

Comentário: Observe-se que $G_g \subset RxR^m_{++}$. Logo, o fecho de G_g, designado por $\bar{G}_g$, é tomado em relação à $Rx\bar{R}^m_{++} = RxR^m_+$. O fecho do conjunto, Q , é a intercepção de todos os conjuntos fechados que contêm Q, subconjuntos estes do espaço de referência, no caso acima, RxR^m_+. No espaço de referência RxR^m_{++}, G_g é conjunto fechado, porque g(w) é função contínua em R^m_{++}.

Proposição 4 . *Para* $w > 0$, *então,* $h(w) = g(w)$. *Logo, h é uma extensão de g.*

Demonstração:

Deve-se notar que em RxR^m_{++}, $G_g = \bar{G}_g$. Como $c \leq g(w)$ e $(g(w), w) \in G_g$, o maior valor de c, na definição de h(w), é igual a g(w). Assim, a proposição é verdadeira. □

Proposição 5 . $G_h = \bar{G}_g$.

Demonstração:

Se $(c, w) \in \bar{G}_g$ tem-se $h(w) \geq c$, porque h(w) é o supremo de c em $\bar{G}_g$ que é um conjunto fechado. Isto implica que $(c, w) \in G_h$ e, portanto, $\bar{G}_g \subset G_h$.

Se $(c, w) \in G_h$, tem-se $h(w) \geq c$, por definição. Se tivermos $c = h(w)$, como $(h(w), w)$ pertence a $\bar{G}_g$, porque este conjunto é fechado, segue-se que $(c, w) \in \bar{G}_g$ e, assim, $G_h \subset \bar{G}_g$, e, assim, $G_h = \bar{G}_g$.

Seja $h(w) > c$. Ora, $(h(w), w)$ pertence a $\bar{G}_g$. Seja (c^n, w^n) uma seqüência de G_g que converge para $(h(w), w)$. Para $n \geq N$, tem-se $c^n > c$, porque $h(w) > c$. Como $w_n > 0$, $g(w_n) = h(w_n)$, segue-se que (c, w^n) pertence a G_g e, portanto, a $\bar{G}_g$. O limite da última seqüência, que é (c,w), pertence a esse conjunto e, logo, $G_h \subset \bar{G}_g$ e, novamente, $G_h = \bar{G}_g$. □

Comentário:

Obtivemos a extensão de g(w), sendo h(w) esta extensão. Como o conjunto, no qual o supremo foi tomado, é um conjunto fechado, $\bar{G}_g$, segue-se que o supremo ocorre num ponto desse conjunto.

Proposição 6 . *g(w) é limitada em todo conjunto limitado de* R^m_+.

Demonstração:

Como U é um conjunto limitado, sem muito esforço, demonstra-se que existe $\bar{w} > 0$, tal que, se w pertence a U, segue-se que $w \leq \bar{w}$. Como g(w) é monótona crescente, se $w > 0$ é um elemento de U, tem-se $g(w) \leq g(\bar{w}) \quad (*)$.

Admita-se que g(w) seja ilimitada em U. Existe, assim, uma seqüência $w^n > 0$, tal que $\{g(w^n)\}$ seja um conjunto ilimitado. Mas isso é impossível, por causa de (*). □

Proposição 7 . *h(w) é finita para todo* $w \in R^m_+$.

Demonstração:

Se $w > o$, então, $g(w) = h(w)$ e, portanto, h(w) é finita. Suponha que exista um $w \geq 0$, tal que $h(w) = \infty$. Escolha uma seqüência decrescente, $w^n > 0$, e tal que $(c^n, w^n) \in G_g$ e esta seqüência convirja para (h(w),w). Tem-se $g(w^n) \leq g(w^1) \; \forall n$, porque g(w) é monótona crescente. Como $g(w^1) \geq c^n \; \forall n$, segue-se que h(w) não pode ter valor infinito. Poderíamos ter usado a proposição 6.

Propriedades Adicionais de h(w)

Vejamos algumas das propriedades mais importantes de h(w).

1. Já vimos que h(w) é bem definida para $w \geq 0$ e é não-negativa.

2. É uma função semicontínua superior, porque $G_h = \bar{G}_g$. Ora, para c fixo, $G_h = \{(c, w) : h(w) \geq c\}$ é um conjunto fechado e segue-se que o conjunto $\{w : \; h(w) \geq c\}$ é fechado e, portanto, h(w) é usc.

3. Como h(w) é função côncava para $w > 0$, é fácil mostrar que ela permanece côncava em $w \geq 0$, ou seja, em R^m_+. Sejam x e y dois pontos desse conjunto: dois vetores preço, no caso, não-negativos. Existem duas seqüências de R^m_{++} que convergem, respectivamente, para x e y, $\{x^n\}$ e $\{y^n\}$. Seja $0 \leq t \leq 1$ e

$$w(t) = tx + (1-t)y$$

e

$$w_n(t) = tx^n + (1-t)y^n$$

Mas

$$|w(t) - w_n(t)| \leq t|x - x^n| + (1-t)|y - y^n|$$

A desigualdade acima mostra que $w_n(t)$ converge para w(t) para cada t. A concavidade de h(w), para w maior que zero, $h(w) = g(w) \;\; w > 0$, implica que:

$$h(w_n(t)) \geq th(x^n) + (1-t)h(y^n)$$

A continuidade de h(w), que mostraremos como um teorema, implica que, tomando-se os limites envolvidos,

$$h(w(t)) \geq th(x) + (1-t)y$$

que era o que queríamos demonstrar. □

4. h(w) é linear homogênea.

Demonstração:

Indicaremos os passos principais. O leitor deve preencher os detalhes. Para $w > 0$ e $t > 0$,

$$\begin{aligned} G_{g(tw)} &= \{(c, tw) : g(tw) \geq c\} \\ &= \{(c, tw) : g(w) \geq c/t\} \\ &= \{t(c/t, w) : g(w) \geq c/t\}; \quad c/t = d \\ &= t\{(d, w) : g(w) \geq d\} \end{aligned}$$

Logo,

$$G_{g(tw)} = tG_{g(w)}$$

$$\bar{G}_{g(tw)} = t\bar{G}_{g(w)}$$

Agora, vem a parte principal:

$$\begin{aligned} h(tw) &= \sup\{c : (c, tw) \in \bar{G}_{g(tw)}\} \\ &= \sup\{c : (c, tw) \in t\bar{G}_{g(w)}\} \\ &\sup\{c : t(c/t, w) \in t\bar{G}_{g(w)}\} \end{aligned}$$

$$= t \sup \{c/t : t(c/t, w) \in t\tilde{G}_{g(w)}\}$$

$$= t sup\{d : (d, w) \in \tilde{G}_{g(w)}\}$$

$$= th(w)$$

5. A função h(w) é superaditiva.

Utilizaremos duas propriedades: homogeneidade linear e concavidade, nessa ordem. Sejam x e y dois vetores que representam preços dos insumos:

$$x + y = 2(x/2 + y/2)$$

Pela homogeneidade linear,

$$h(x + y) = 2h(x/2 + y/2)$$

Pela concavidade,

$$h(x + y) \geq h(x) + h(y)$$

6. A função h(w) é crescente em w.

Seja $y = x + \Delta x \quad \Delta x \geq 0$. Pela superaditividade, vem:

$$h(y) \geq h(x) + h(\Delta x)$$

Como h é não-negativa, a propriedade se verifica.

Continuidade de h(w)

Lembremos que h(w) é uma função contínua num ponto se for simultaneamente usc e lsc, ou seja, semicontínua superior e inferior. Já demonstramos que h(w) é usc, pela propriedade 2. Falta, portanto, mostrar que é lsc. Vimos que g é função côncava. E é limitada em qualquer conjunto limitado de R^m_+. Assim, satisfaz as condições do teorema seguinte.

Teorema 12 . *Seja g uma função côncava de n variáveis definida em* $R^n_{++} = \{x : x > 0\}$. *Seja g limitada superiormente em todo conjunto limitado de* R^n_+, *em que é definida. Então, a extensão de Fenchel de g, designada por h, é contínua em* R^n_+.

Demonstração:

Falta demonstrar que h é lsc. Seja Q um ponto referência e P um ponto da fronteira e qualquer, $P \geq 0$, no primeiro quadrante: $P = Q + q$ e $q = \sum_{i=1}^n t^i e^i$. Os t's podem ser nulos, positivos e negativos. Queremos todos não-negativos. Por isso, teremos 2n vetores, a partir da base de R^n_+. Quando t^i for negativo, considere-se $-t^i(-e^i)$. Como P é um ponto de fronteira, não utilizaremos todos os 2n vetores, digamos m e $1 \leq m \leq 2n$. Com essa convenção, os t's são não-negativos.

$$P = Q + \sum_{i=1}^{m} t^i e^i + \sum_{i=1}^{m} t^i Q - \sum_{i=1}^{m} t^i Q$$

Ou

$$P = (1 - \sum_{i=1}^{m} t^i)Q + \sum_{i=1}^{m} t^i(e^i + Q)$$

Vamos restringir os t's da seguinte forma:

$$s = \sum_{i=1}^{m} t^i < \delta < 1/m < 1$$

Como conseqüência,

$$|P - Q| \leq \sum_{i=1}^{m} t^i = s < \delta < 1/m < 1$$

O primeiro motivo da restrição foi para usar a definição de concavidade. O segundo motivo tornar-se-á aparente, no curso da demonstração.

$$h(P) \geq (1 - s)h(Q) + \sum_{i=1}^{m} t^i h(e^i + Q)$$

Se não tivéssemos h(w) finita, no conjunto que escolhemos operar, poderíamos encontrar uma indeterminação do tipo mais infinito menos infinito, nas expressões abaixo.

Substituindo-se s pela sua definição dada acima,

$$h(P) \geq h(Q) + \sum_{i}^{m} t^i(h(e^i + Q) - h(Q))$$

Seja

$$a = \max\{h(e^i + Q) - h(Q)\}$$

Note-se que **a** é não-negativo, porque h(w) é função crescente. Então,

$$h(P) \geq h(Q) - as$$

Como há o risco de $a = 0$, seja $b = \max(a, 1)$

Recordando-se que $s < \delta < 1/m$,

$$h(P) > h(Q) - b\delta$$

Para $\epsilon > 0$ e qualquer, seja também $\delta < \epsilon/b$. Logo,

$$h(P) > h(Q) - \epsilon$$

A desigualdade acima vale para todo Q, tal que $|P - Q| < \delta$. Assim, h(w) é lsc em R^n. Como é também usc em R^n, segue-se que é contínua em R^n. □

Comentário: O teorema continua válido, quando o conjunto é um poliedro e não apenas o primeiro quadrante. Um poliedro é o conjunto resultante de todas as combinações convexas de um número finito de vetores. Exemplos: triângulo, quadrado, hexágono, cubo e pirâmide. O círculo e a esfera não são poliedros. Vejamos um contra-exemplo.

Exemplo 4 . *O exemplo visa mostrar que, quando não se trata de um poliedro, pode acontecer que uma função côncava não seja contínua na fronteira do conjunto de definição.*

$$P = \{(a, b) : b^2 < a \ \ (a, b) \in R^2\}$$

Logo,

$$\bar{P} = \{(a, b) : b^2 \leq a\}$$

Note-se que (0,0) pertence a $\bar{P}$ e não pertence a P. Seja $g(p) = g(a, b) = -b^2/a$, que é bem definida em P. Se $b = 0$ $g(a, b) = 0$

Desenvolvimento:

1. Pela definição de P, tem-se $a > 0$.

$$G_g = \{(d, a, b) : (a, b) \in P, -b^2/a \geq d\}$$

Se d for maior ou igual a zero, então, $G_g = \emptyset$. Logo, $d < 0$. Note-se que $G_g \subset RxP$. Daí se segue que $\bar{G}_g \subset Rx\bar{P}$. É fácil verificar que $\bar{G}_g = \{(d, a, b)\ (a, b) \in \bar{P}\ d \leq 0\}$. Note-se que d depende de (a,b).

2. (0,0) pertence a $\bar{P}$. Seja $\{(0, a_n, 0)\}$. Como $g(a_n, 0) = 0$, segue-se que cada membro da seqüência pertence a G_g. Supõe-se, ainda, que a seqüência a_n convirja para zero. Logo, a seqüência que definimos converge para (0,0,0) e, como o conjunto $\bar{G}_g$ contém cada membro da mesma e é fechado, tem-se $(0,0,0) \in \bar{G}_g$. Se (d,00) pertencer a $\bar{G}_g$, então, $d \leq 0$. Portanto, $h(0,0) = \sup\{d :\ (0,0) \in \bar{G}_g\} = 0$. Considere-se agora, para $a > 0$, a seqüência $\{(-b_n^2/a, a, b_n)\}$ de G_g. Escolhemos a seqüência $\{b_n\}$ de modo que convirja para a e $b_n^2 < a$, obviamente. Resulta que (d,a,a) pertence a $\bar{G}_g$, se $d \leq -1$ que implica, pela definição de h, que $h(a, a) = -1$. Portanto, o limite de $h(a_n, a_n) = -1$, quando a_n tende para 0, e este limite é diferente de $h(0,0) = 0$, o que prova a discontinuidade de h em (0,0).

Exemplo 5 . *Este exemplo, muito simples, mostra que uma função convexa pode não ser contínua na fronteira do conjunto de definição.*

$f(t) = t$ *se* $a < t \leq b$ *e* $f(t) = 1$ *se* $t = a$ *e* $a \neq 1$

Com um pouco mais de esforço, provaremos o teorema abaixo.

Teorema 13 . *Toda função côncava, crescente e não-negativa, definida em* R_+^n *é contínua no seu interior, ou seja, em* R_{++}^n.

Demonstração:

Vamos utilizar do desenvolvimento do teorema anterior. A diferença é que P é um ponto interior do conjunto e o mesmo ocorre com Q. δ tem de ser ajustado para que $Q + q$ seja sempre um ponto do interior do conjunto de definição da função. No caso, $m = 2n$.

Notando-se que $P = Q + q$, no final da demonstração do teorema 12, obtivemos a desigualdade, $h(Q) - h(Q + q) < \epsilon\quad (a)$, que é verdadeira para $|q| < \delta$.

$$h(Q) - h(Q - q) < \epsilon \quad (b)$$

Ora,

$$Q = (Q + q)/2 + (Q - q)/2$$

Como h é côncava:

$$h(Q) \geq 1/2h(Q+q) + 1/2h(Q-q)$$

Ou, equivalentemente:

$$h(Q) - h(Q-q) \geq h(Q+q) - h(Q)$$

Por b, acima:

$$h(Q+q) - h(Q) < \epsilon \quad (d)$$

Comparando-se (a) e (d),

$$|h(Q+q) - h(Q)| < \epsilon$$

que demonstra o teorema, que é uma versão simplificada de um teorema que afirma que toda função côncava é contínua no interior de um conjunto convexo.

Supergradiente

O desenvolvimento desta seção depende de um teorema de separação de conjuntos convexos, que é apenas enunciado.

Teorema 14 (Teorema de Separação) *Seja C um conjunto fechado e convexo do R_n. E z um ponto de C que não pertence ao interior, ou seja, z pertence à fronteira de C; então, existe um vetor u, que tem, pelo menos uma componente diferente de zero e tal que*

$$u * x \geq u * z \quad x \in C$$

$$u * x < u * z \quad x \notin C$$

Se $z \notin C$, há um vetor w de C, à mínima distância de z e,

$$u * x \geq u * w \quad x \in C$$

$$u * x < u * w \quad x \notin C$$

$$u * z < u * w$$

O vetor w, acima mencionado, pertence à fronteira de C.

O teorema seguinte garante a existência do supergradiente para uma função côncava que é linear homogênea. A definição virá mais abaixo.

Teorema 15 . *Seja f(x) definida em R^n e f(x) seja côncava e linear homogênea. Então, para z pertencente a R^n, existe z^*, tal que:*

$$f(z) = (z^* * z)$$

e

$$f(x) \leq (z^* * x) \quad x \in R^n$$

Demonstração:

A demonstração é feita por etapas.

1. Considere-se o conjunto:

$$A = \{(c, x) : \ c \in R \ x \in R^n \ f(x) \geq c\}$$

O conjunto A pode ser vazio para algum c. Note-se que (f(x),x) pertence à fronteira de A. Se $(f(x), x)$ pertencesse ao interior de A, poderíamos escolher $c > f(x)$ e (c,x) seria elemento de A. Mas isso contraria a definição de A.

2. Como A é um conjunto convexo e fechado, porque f(x) é côncava e continua, o teorema de separação pode ser usado para o ponto (f(z),z), que é um ponto da fronteira de A.

$$(u, v) * (f(z), z) = d \quad u \in R \quad V \in R^n$$

$$(u, v) \neq 0$$

$$(u, v) * (f(x), x) \geq d \ \forall x \in A$$

$$(u, v) * (c, x) \ < d \ \text{ se } (c, x) \notin A.$$

3. Mostrar-se-á, no item 4, que $d = 0$. Como (x,f(x)) e (-x,f(-x)) pertencem a R^n, se $v = 0$, tem-se $u * f(x) \geq 0$. Mas $u * f(-x) = -u * f(x) \geq 0$. Equivalentemente, $u * f(x) \leq 0$. Logo, $u * f(x) = 0$ para todo x de R^n. Isto implica que u é também zero,

a menos que f(x) seja identicamente nula. O teorema de separação requer que (u,v) seja diferente de zero. Segue-se que v é diferente de zero.

4. Vamos provar que $d = 0$. Seja $t > 0$. Substituindo-se x por tx e $f(tx) = tf(x)$,

$$(u, v) * (f(x), x) \ \geq d/t^2$$

Com t, pode tomar-se tão grande como se queira,

$$(u, v) * (f(x), x) \ \geq 0$$

Logo, $d = 0$. Note-se que:

$$(u, v) * (f(z), z) \ = 0$$

5. Vamos provar que $u < 0$. Lembre-se que $v \neq 0$

5a. É impossível ter-se $u = 0$

$$(0, v) * (f(x), x) \geq 0$$

Como x e -x pertencem a R^n, segue-se que $v = 0$, que vimos ser impossível.

5b. Suponha que $u > 0$. Como $f(0) = 0$, porque f é linear homogênea, segue-se que (e,0) pertence a A para qualquer $e < 0$. Segue-se que

$$(u, v) * (e, 0) \ \geq 0$$

que implica $u * e \geq 0$, que é impossível. Pois, para $u > 0$ e $e < 0$, implica ser $u * e < 0$. E tem-se $u < 0$.

Daí se segue que:

$$(u, v) * (f(x), x) \geq 0$$

ou

$$u * f(x) + (v * x) \geq 0$$

Lembrando-se que u é negativo, e dividindo-se tudo por u, virá:

$$f(x) \leq (-v/u, x)$$

Pondo-se $z^* = -v/u$, virá:

$$f(x) \leq \quad (z^*, x)$$

$$f(z) = (z^*, z)$$

O resultado acima vem de $(u, v) * (f(z) * z) = 0$.

□

Definição 13 .*[Supergradiente] O supergradiente de f(x), em x, designado por x^*, quando existe, satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$f(z) \leq f(x) + x^* * (z - x) \ \forall z \in R^n$$

Teorema 16 . *Seja f(x) côncava e linear homogênea positiva em R^n, que é um cone convexo. Seja $\partial f(x^0)$ o conjunto de supergradientes de f(x), em x^0. Então, para todo membro, x^*, de $\partial f(x^0)$*

$$f(x^0) = x^* * x^0)$$

$$f(x) \leq x^* * x$$

Demonstração:

Por definição, temos:

$$f(z) \leq f(x^0) + x^* * (z - x^0)$$

Para $z = tx^0$ e t positivo, tx^0 pertence a R^n, porque R^n é um cone.

$$f(tx^0) \leq f(x^0) + (t-1)(x^* * x^0)$$

$$f(tx^0) = tf(x^0), \text{ homogeneidade linear}$$

$$(t-1)f(x^0) \leq (t-1)(x^* * x^0)$$

t maior que 1

$$f(x^0) \leq \quad (x^* * x^0)$$

Se t for menor que 1, a desigualdade é revertida. Logo:

$$f(x^0) = x^* * x^0$$

Na definição de supergradiente, substitua z por $x + x^0$:

$$f(x + x^0) \leq f(x^0) + x^* * x$$

Como f(x) é côncava e linear homogênea, é superaditiva, $f(x + x^0) \geq f(x) + f(x^0)$. E, portanto, $f(x) \leq x^0 * x$.

Compare esse resultado com o teorema demonstrado sobre funções côncavas linear homogêneas e conclua que toda função côncava linear homogênea admite um supergradiente.

Teorema 17 . *Seja f(x) uma função côncava e diferenciável, então:* $x^* = \nabla_x f(x)$ *é o supergradiente de f(x) e ele é único.*

Demonstração:

Na definição de supergradiente x, faça $z = x + ty$

$$\frac{f(x + ty) - f(x)}{t} \leq \quad (x^* * y)$$

Deixando-se t tender para 0,

$$\nabla_x f(x) * y \leq \quad x^* * y$$

Como essa desigualdade vale para y e -y, tem-se:

$$\nabla_x f(x) * y = x^* * y$$

que mostra que o supergrandiente é único, já que y é qualquer. □

Com a finalidade de preparar o caminho para o próximo teorema, seguem-se três proposições. Sobre a primeira proposição, mais detalhes podem ser encontrados em Nikaido(1968, p. 47-49). Ele demonstra a existência de $h_+(x, y)$ e $h_-(x, y)$. E que

$$h_+(x, y) \leq \quad (x^* * y) \leq \quad h_-(x, y)$$

A derivada na direção y existirá, se e somente se $h_+(x, y) = h_-(x, y)$. Mas o fato de as derivadas parciais existirem não é suficiente para f ser diferenciável num ponto.

s

Proposição 8 . *Seja R o conjunto dos números reais e* $r < s < q$ *elementos de R. Então,* $s = \frac{s-r}{q-r}q + \frac{q-s}{q-r}r$, *ou seja, s pode ser escrito como uma combinação convexa de* r *e* q.

Demonstração: Seja $s = xq + (1-x)r$. Desejamos determinar x. Verifica-se que $s - r = x(q-r)$. Ou, $x = \frac{s-r}{q-r}$. E $(1-x) = \frac{q-s}{q-r}$. Observe-se que $0 < x < 1$ e $0 < (1-x) < 1$, em virtude da escolha de r, s e q. □

Proposição 9 . *Seja v(t) uma função côncava definida no conjunto dos números reais e contradomínio no mesmo conjunto. Então,* $p(t) = \frac{v(t+s)-v(s)}{t}$ *é função monótona decrescente de t para cada s. As derivadas à direita e à esquerda de um ponto existem e são, respectivamente, designadas por* $v_+(s)$ *e* v_s. *E* $v_-(s) \geq v_+(s)$.

Demonstração:

Obtivemos $s = \frac{s-r}{q-r}q + \frac{q-s}{q-r}r$. Como v(t) é uma função côncava,

$$v(s) \geq \frac{s-r}{q-r}v(q) + \frac{q-s}{q-r}v(r)$$

Multiplicando-se a desigualdade acima por $q - r$, virá

$$(q-r)v(s) \geq (s-r)v(q) + (q-s)v(r) \quad (1)$$

Ao último parêntesis da direita, some r e $-r$. Depois de manipulações simples, virá:

$$\frac{v(s)-v(r)}{s-r} \geq \frac{v(q)-v(r)}{q-r} \quad (2)$$

Adicione-se q e $-q$ ao primeiro parêntesis da direita de (1) e obtém-se

$$\frac{v(q)-v(s)}{q-s} \leq \frac{v(q)-v(r)}{q-r} \quad (3)$$

Comparando-se as desigualdades (2) e (3), tem-se:

$$\frac{v(s)-v(r)}{s-r} \geq \frac{v(q)-v(r)}{q-r} \geq \frac{v(q)-v(s)}{q-s} \quad (4)$$

Na desigualdade (4), faça $r = s + t$ e $q = s + z$. Observe-se que $t < 0$ e $z > 0$.

$$\frac{v(s)-v(s+t)}{-t} \geq \frac{v(s+z)-v(s+t)}{z-t} \geq \frac{v(s+z)-v(s)}{z}$$

Equivalentemente,

$$\frac{v(s+t)-v(s)}{t} \geq \frac{v(s+z)-v(s+t)}{z-t} \geq \frac{v(s+z)-v(s)}{z} \qquad (5)$$

Como $t < z$, a primeira e a última desigualdade de (5) mostram que $p(t)$ é função decrescente de t Notando-se que t é negativo, quando t converge para zero, portanto cresce, o quociente da esquerda da desigualdade (5) decresce. Mas ele é limitado, inferiormente, pelo quociente da direita, porque estamos mantendo z fixo. Conseqüentemente, o limite de p(t) existe quando t tende para zero, por valores menores que zero. Quando z tende para zero por valores maiores que zero, z decresce; portanto, o quociente da extrema direita de (5) cresce. Mas ele é limitado pelo quociente da extrema esquerda de 5. Como o quociente é uma função monótona decrescente de z, aquele quociente converge. Demonstramos, assim, a existência de $v_+(s) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{v(s+t)-v(s)}{t}$ e de $v_-(s) = \lim_{z\uparrow 0} \frac{v(s+z)-v(s)}{z}$. Não há dificuldade de verificar que $v_-(s) \geq v_+(s)$. Como s é qualquer, demonstramos a existência das derivadas à direita e à esquerda em R. Em vez de R, poderíamos ter escolhido um conjunto convexo aberto de R, tomando-se o cuidado de ter r, s e q como seus elementos. Na aplicação que iremos fazer, necessitamos da existência do limite à direita e de saber que $p(t)$ é monótona decrescente. □

Proposição 10 . *Seja f(x) uma função côncava e linear homogênea. Defina*

$$h(t,x,y) = f(x+ty) - f(x)$$

e

$$h_+(x,y) = \lim_{t\downarrow 0}(f(x+ty) - f(x))/t$$

Então, (i) $h(t,x,y)$ é uma função côncava de t e também de y. (ii) $h_+(x,y)$ é função côncava e linear homogênea de y.

Demonstração: Precisamos preparar o caminho para a demonstração. Seja $0 \leq r \leq 1$ e $t \neq 0$.

$$h(rt_1 + (1-r)t_2, x, y) = f(r(x+t_1y) + (1-r)(x+t_2y)) - f(x)$$

Como f(x) é uma função côncava, segue-se que

$$h(rt_1 + (1-r)t_2, x, y) \geq r(f(x+t_1y) - f(x)) + (1-r)(f(x+t_2y) - f(x))$$
$$= rh(t_1,x,y) + (1-r)h(t_2,x,y)$$

Logo, h(t,x,y) é função côncava de t. Pela proposição 9, $h_+(x, y)$ existe.

Como f(x) é linear homogênea,

$$f(x + t(ry_1 + (1 - r)y_2) - f(x) = t[f(r(x/t + y_1) + (1 - r)(x/t + y_2) - f(x/t)]$$

Como f(x) é uma função côncava,

$$f(x+t(ry_1+(1-r)y_2)-f(x) \geq t[r(f(x/t+y_1)-f(x/t))+(1-r)(f(x/t+y_2)-f(x/t))]$$

$$= r(f(x + ty_1) - f(x)) + (1 - r)(f(x + ty_2) - f(x))$$

Portanto,

$$h(t, x, ry_1 + (1 - r)y_2) \geq rh(t, x, y_1) + (1 - r)h(t, x, y_2)$$

Logo, h(t,x,y) é função côncava de y.

Item (ii)

A função $h_+(x, y)$ é linear homogênea em y. Seja r diferente de zero.

$$(f(x + rty) - f(x))/t = r(f(x + rty) - f(x))/rt$$

Da igualdade acima decorre que $h_+(x, y)$ é linear homogênea em y.

A função $h_+(x, y)$ é côncava em y. Seja $0 \leq r \leq 1$. Como h(t,x,y) é côncava em y.

$$h(t, x, ry_1 + (1 - r)y_2)/t \geq rh(t, x, y_1)/t + (1 - r)(h(t, x, y_2)/t$$

Deixando-se t tender para zero por valores maiores que zero,

$$h_+(x, ry_1 + (1 - r)y_2)/t \geq rh_+(x, y_1) + (1 - r)h_+(x, y_2)$$

Observação: dá proposição 9, obtivemos $v_-(s) \geq v+(s)$. Daí se segue que $h_-(x, y) \geq h_+(x, y)$.

Seja x^* o gradiente de f(x) em x. Para $t > 0$, $(f(x+ty)-f(x))/t \leq x*y$. Deixando-se t tender para zero por valores positivos, segue-se que $h_+(x, y) \leq x^* * y$.

Da definição de gradiente, tem-se $f(x+ty)-f(x) \leq x^* * ty$. Para $t < 0$, dividindo-se por t, reverte-se o sinal da desigualdade, $(f(x + ty) - f(x))/t \geq x^* * y$. Deixando-se t tender para zero por valores negativos, tem-se $h_-(x, y) \geq x^* * y$. Decorre, então, que $h_-(x, y) \geq x^* * y \geq h_+(x, y)$.

O teorema seguinte mostra que, se o supergradiente for único, então f(x) será diferenciável. Logo, uma função côncava, que é linear homogênea, é diferenciável, se e somente se o gradiente for único.

Teorema 18 . *Seja f uma função côncava e linear homogênea, definida em R^n e contradomínio nos números reais. Se o supergradiente no ponto x for único, então f(x) diferenciável em x.*

Demonstração:

Temos de mostrar que, se

$$g(y) = f(x+y) - f(x) - x^* * y$$

então, o limite de $|g(y)/|y|$ é nulo, quando y tende para zero, sendo x fixo. É fácil ver que g(y) é côncava e linear homogênea.

1. Supergradiente de g(y), em $y = 0$, é nulo. Note-se que, se isso acontecer, pela primeira desigualdade abaixo, segue-se que $g(y) \leq 0 \quad (i)$.

$$g(0+y) \leq g(0) + (0^* * y)$$

$$ou$$

$$f(x+y) - f(x) - (x^* * y) \leq (0^* * y)$$

$$ou$$

$$f(x+y) - f(x) \leq (x^* + 0^* * y)$$

Como supergradiente de f(x) é único

$$x^* + 0^* = x^*$$

$$E, portanto, \quad 0^* = 0$$

$$g(y) \leq 0 \quad (i)$$

Pelo teorema 15,

$$h_+(x,y) \leq \quad (u_x^* * y)$$

$$h_+(x,x) = (u_x^* * x)$$

ou

$$\lim_{t\downarrow 0}(f(x+ty)-f(x))/t \leq (u_x^* * y)$$

Pela proposição 9, o quociente da esquerda é função decrescente de t e $t>0$

$$(f(x+ty)-f(x))/t \leq (u_x^* * y)$$

t=1 virá

$$f(x+y)-f(x) \leq (u_x^* * y)$$

Como o gradiente é único,

$$u_x^* = x^*$$

4. Como $h_+(x,x) = (u_x^* * x)$, segue-se que $h_+(x,x) = (x^* * x)$.

$$g(ty)/t = (f(x+ty)-f(x))/t - (x^*, y)$$

$$\lim_{t\downarrow 0} g(tx)/t = \lim_{t\downarrow 0}(f(x+tx)-f(x))/t - (x^* * x) = 0 \quad (*)$$

5. Precisamos demonstrar que $\lim_{|y|\to 0}|g(y)/|y|| = 0$, o que faremos a seguir. Seja $\{u : |u| = 1\}$. Podemos expressar $y = t_y u_y$ $t_y > 0$ e $|u_y| = 1$. Sejam $e^1, e^2, \ldots, e^m$, tais que o conjunto $\{u : |u| = 1\}$ esteja contido no fecho convexo desses m vetores.

$$u_y = \sum_{i=1}^{m} t_y^i e^i \quad 0 \leq t_y^i \leq 1; \ i = 1, 2, \ldots, m$$

E os t's somam 1.

$$g(t_y u_y)/t_y = (g(t_y \sum_{i=1}^{n} t_y^i (e^i))/t_y$$

$$= (g(\sum_{i=1}^{n} t_y^i (t_y e^i)))/t_y$$

Por causa da concavidade de g,

$$\geq (\sum_{i=i}^{m} t_y^i g(t_y e^i))/t_y$$

$$\geq \min_i \{t_y^i g(t_y e^i)/t_y\} \quad (**)$$

Como $0 \leq t_y^i \leq 1$

$$\min_i \{t_y^i g(t_y e^i)/t_y\}$$

tende para zero com t_y, por causa de (*), acima.

Por (i) acima, $g(y) \leq 0$, que implica que $g(t_y u_y)/t_y \leq 0$. E lembremos que $t_y * u_y = y$. Logo, por (**) virá:

$$\min_i \{t_y^i g(t_y e^i)/t_y\} \leq g(t_y u_y)/t_y \leq 0$$

E segue-se que $\lim\{(g(t_y u_y))/t_y\} = 0$, porque esta expressão é maior do que uma outra que tende para zero com t_y e também menor que zero. Ou

$$\lim |g(y)/|y|| = \lim\{g(t_y u_y)/|t_y u_y|\} = \{|\lim\{g(t_y u_y)/t_y|\} = 0$$

Nas manipulações feitas, observe-se que $|u_y| = 1 \;\; t_y > 0$. Vimos que, se uma função é contínua, linear homogênea e côncava, ela admite um supergradiente, com as propriedades enunciadas no teorema. Isso nos proporciona um teorema importante para a função custo, que é linear homogênea, contínua e côncava no vetor preços dos insumos.

Teorema 19 . *Se x^* é um supergradiente de C(w,y), w e y fixos, então, x^* pertence ao conjunto de soluções do problema de minimização, ou seja, $C(w, y) = w * x^*$.*

Demonstração:

Como C(w,y) é linear homogênea e côncava, pelo teorema 16, e seja x^* o supergradiente em w^o,

$$C(w^o, y) = (w^o * x^*)$$

e

$$C(w, y) \leq (w * x^*) \;\; e \;\; w > 0$$

As desigualdades acima indicam que o conjunto de supergradientes de C(w,y), em w, pertence ao conjunto de soluções do problema de minimização.

Vejamos outro teorema importante:

Teorema 20 . *Sejam y^o e w^o fixos. O conjunto de supergradientes de $C(w^o, y^o)$ em w^o é exatamente igual ao conjunto de soluções do problema de minimização:*

$$\min_x \{w^o * x, \;\; st \;\; F(x) \geq y^o\}$$

Demonstração:

Suponha que não. Então, existe, pelo teorema 19, uma solução, x, que não é supergradiente de $C(w^o, y^o)$. Duas coisas podem acontecer:

1.

$$C(w^o, y^o) > (w^o * x) \quad (*)$$

Chegamos a uma contradição. A desigualdade (*) indica que x não pode ser factível e, por hipótese, x é factível.

2.

$$C(w^o, y^o) < (w^o * x)$$

Neste caso, x nem solução do problema de minimização é. □

Um importante teorema, já demonstrado, indicou-nos que, se um conjunto de supergradientes de uma função linear homogênea e côncava for único, ela é diferenciável. Vimos também que, se uma função linear homogênea e côncava for diferenciável, o supergradiente é único. Logo, o teorema abaixo é imediato.

Teorema 21 . *A condição necessária e suficiente para que uma função linear homogênea e côncava seja diferenciável num ponto é que o supergradiente daquele ponto seja único.*

Vamos fornecer uma condição suficiente para a unicidade do supergradiente da função custo.

Teorema 22 *Seja F(x) não-negativa, contínua, semicôncava estrita, definida no primeiro quadrante de R^n, $F(0) = 0$ e $x \geq z$ implica que $F(x \geq F(z)$. Então, para todo $y^0 > F(0)$, a função custo é diferenciável com respeito aos preços dos insumos.*

Demonstração:

1. Suponha que existam duas soluções para o problema de minimização, x e z. Por causa da continuidade de F(x), $F(x) = F(z) = y^o$. Seja $F(x) > y^o$. Como $F(0) = 0$, a continuidade de F(x) implica que existe $0 < k < 1$, e tal que $F(kx) = y^o$ e kx é factível. Mas $w * kx = k(w * x) < w * x$. E x não é solução do problema de minimização.

2. Seja $s = (x + z)/2$. Como F(x) é semicôncava estrita, $F(s) > y^o$. Novamente existe $0 < k < 1$ e tal que $F(ks) = y^0$. Portanto, ks é factível.

$$w * ks < w * s = w * x = w * z$$

Logo, x e z não seriam soluções do problema de minimização e, pelo teorema 20 C(w,y), é diferenciável. □

Exercício: Sejam $a > 0$ e $b > 0$ e $F(x, y) = \min\{x/a, y/b\}$. Derive a função custo. Resposta: $C(w, y) = aw_1 + bw_2$. A função custo é diferenciável. Mostre que F(x) não é semicôncava e nem diferenciável. Logo a condição dada é apenas suficiente.

Teorema de Dualidade

Mostraremos como recuperar a função de produção, dada a função custo. Restringiremos o conjunto em que y varia:

$$\{y \in R : y \geq 0 \ \ \{x \geq 0 : F(x) \geq y\} \neq \emptyset\}$$

A fim de facilitar comparações, listaremos as propriedades que a função custo tem, as quais foram demonstradas neste e no Capítulo I.

No teorema de dualidade, imaginamos que temos uma função, que simbolizamos C(w,y), sendo w e y positivos. O leitor deve anotar, no desenvolvimento que faremos, quais propriedade exigimos dela. Talvez fosse melhor termos usado outra notação para evitar confusão com a função custo. A partir da função imaginada, recuperamos a função de produção. Usando-se a função de produção recuperada, definimos a função $D(w, y)$ e mostramos que ela é igual a C(w,y), ou seja, igual à função custo, baseada na qual a função de produção foi definida. Portanto, se utilizarmos a nossa função custo, cujas propriedades serão listadas, para definir a função de produção, a função D(w,y) será igual a ela. No Capítulo I há um teorema de dualidade de concepção mais simples que tem, basicamente, o mesmo significado. Aconselho o leitor a reler a seção sobre dualidade do primeiro capítulo. O leitor deverá notar, também, que estamos diante de um problema de otimização, que tem um número infinito, não-denumerável, de restrições. É, assim, muito complexo.

Recordemos as propriedades da nossa velha conhecida, a função custo.

1. $C(w,y) > 0 \ y > 0 \ w > 0$; $\ C(w, 0) = 0$.

2. C(w,y) é linear homogênea em w.

3. C(w,y) é crescente em w.

4. C(w,y) é côncava em w.

5. C(w,y) é contínua em w.

6. C(w,y)é crescente em y, w fixo.

7. C(w,y) é lsc em y.

8. Se $w > 0$ e y cresce sem limite, C(w,y) tende para o infinito.

Proposição 11 . *Seja*

$$Y = \{0 \leq y \leq \bar{y}\}$$

Portanto, um conjunto compacto. Manteremos $w > 0$. *Defina a transformação:*

$$h_w(x) = \{y \in Y : C(w, y) \leq (w * x)\}$$

Esta transformação é fechada.

Demonstração:

$$x^v \to x$$

$$y^v \in h_w(x^v)$$

$$y^v \to y$$

Note-se que y pertence a Y, que é compacto. Temos de mostrar:

$$y \in h_w(x)$$

Tomando o limite supremo de

$$C(w, y^v) \leq (w * x^v),$$

virá: $\limsup C(w, y^v) \leq (w * x)$. Como C(w,y) é lsc em y, virá

$$\limsup C(w, y^v) \geq C(w, y)$$

Logo,

$$C(w, y) \leq (w * x)$$

Logo, $y \in h_w(x)$ □

Proposição 12 . *A transformação*

$$H_w(x) = \cap_{w>0} h_w(x)$$

$$= \{y \in Y, \ C(w, y) \leq (w * x) \ \forall w > 0\}$$

é fechada e, como Y é compacto, ela é scs.

Demonstração:

Nas preliminares de matemática, vimos que a interseção de conjuntos de transformações fechadas é uma transformação fechada. O contradominio são os subconjuntos de Y, e Y é compacto; segue-se que $H_w(x)$ é uma transformação semicontinua superior. Note-se que, para cada x, $H_w(x)$ é um conjunto compacto, subconjunto fechado de um conjunto compacto, Y. □

Definição 14

$$F(x) = \max_{y \in H_w(x)} \{y\}$$

$$= \max_{y} \{y \in Y : \ C(w, y) \leq (w * x) \ \forall \ w > 0\}$$

É fundamental que o leitor observe que o máximo não pode ser tomado num conjunto vazio. Se estivermos usando a nossa velha conhecida função custo, sabemos que o conjunto da segunda igualdade é não-vazio. Se utilizarmos outra função, temos de demonstrar que ele é não-vazio. Vejamos as propriedades de F(x).

1. F(x) é função real bem definida e é usc, semicontinua superior. E tem-se $F(0) = 0$.

O conjunto $H_w(x)$ é compacto. Por isso, y atinge um máximo nele e y varia nos números reais. Logo, F(x) é bem definida e tem contradomínio nos números reais. Um dos teoremas do Máximo mostra que F(x) é usc. Se $x = 0$, $H_w(x)$ só contém o conjunto, cujo único elemento é 0(zero). Logo, $F(0) = 0$. □

2. F(x) é semicôncava.

Seja $0 \leq t \leq 1$, $F(x) \geq y$ e $F(z) \geq y$. Temos de mostrar que, se $u(t) = tx + (1-t)z$, então, $F(u(t)) \geq y$. As duas primeiras desigualdades acima implicam que:

$$C(w,y) \leq (w * x) \ \forall w > 0$$

$$C(w,y) \leq (w * z) \ \forall w > 0$$

multiplicando-se por t a primeira relação

e por(1-t) a segunda e somando-se, virá:

$$C(w,y) \leq (w * u(t)) \ \forall w > 0$$

A desigualdade acima mostra que y é factível para o problema de maximização, quando x é fixado em u(t). Nesse caso, o máximo tem de ser maior ou igual a y. Portanto,

$$F(u(t)) \geq y$$

e F(x) é semicôncava. □

3. Se $x \geq z$, então, $F(x) \geq F(z)$

Pela definição de $h_w(x)$, se $x \geq z$, $h_w(z) \subset h_w(x)$. E daí decorre que $H_w(z) \subset H_w(x)$, que implica que

$$F(z) \leq F(x)$$

□

Teorema 23 (Teorema de Dualidade) . *Seja F a função que acabamos de definir e demonstrar as propriedades. Defina a partir dela, para $w > 0$ e $y > 0$, a função de custo D(w,y). Então, $D(w,y) = C(w,y)$*

$$D(w,y) = \min_{x} \{w * x : \ F(x) \geq y\}$$

Demonstração:

1. A função C(w,y) é côncava e linear homogênea; admite, portanto, um supergradiente em (w^o, y^0), designado por x^o. Pelo que sabemos sobre supergradientes de funções

côncavas e linear homogêneas, virá para $y > 0$:

$$C(w^o, y^o) \leq (w * x^o) \ \forall w > 0 \quad (*)$$

$$C(w^o, y^o) = (w^o * x^o) \quad (**)$$

Como, pela propriedade 1 de C(w,y),

$$C(w^0, y^0) > 0$$

segue-se que

$$x^0 \neq 0$$

Por definição,

$$F(x^o) = \max_y \{y : C(w, y) \leq (w * x^o) \ \forall w > 0\}$$

O leitor não terá dificuldade de se convencer que y^o é factível para o problema de maximização, que define F(x), definição 14. Observem-se, para isto, as desigualdades (*) e (**) que definem o supergradiente de $C(w^o, y^o)$. Logo, $F(x^o) \geq y^o$.

A definição de D(w,y) implica que:

$$D(w^o, y^o) = \min_x \{(w^o * x) \ F(x) \geq y^o\}$$

Como $F(x^o) \geq y^o$, segue-se que:

$$D(w^o, y^o) \leq (w^o * x^o) = C(w^o, y^0) \quad (1)$$

2. Seja

$$D(w^o, y^o) = min_x\{(w^o * x) \ F(x) \geq y^o\} = (w^o * \bar{x})$$

Logo, $F(\bar{x}) \geq y^o$.

3.

$$F(\bar{x}) = \max_y \{y \in Y : C(w, y) \leq \ w * \bar{x} \ \forall w > 0\}$$

Isto implica que:

$$C(w, y^o) \leq (w * \bar{x}) \quad \forall w > 0, \ ou$$

$$C(w^o, y^o) \leq (w^o * \bar{x}) = D(w^O, y^o) \quad (2)$$

Os resultados obtidos em 1 e 2, acima, provam o teorema.

Referências

AVRIEL, M.; DHIEWERT, W. E.; SCHAIBLE, S.; ZANG, I. **Generalized concavity**. New York: Plenum Press, 1988.

BERGE, C. **Topological spaces**. New York: The Macmillan, 1963.

NIKAIDO, H. **Convex structures and economic theory**. New York: Academic Press, 1968.

OTANI, Y.; El-HODIRI, M. **Microeconomic theory**. New York: Springer-Verlag, 1987

ROCKAFELLER, R. T. **Convex analysis**. Princeton, New Jersey: Princeton University Pres, 1970.

CAPÍTULO 3

Aplicações da Função Distância

Nos dois primeiros capítulos, admitimos que apenas um produto era produzido. Evitou-se, assim, ter de definir uma função de produção que comportasse vários produtos. Neste capítulo, a combinação de insumos tem n componentes, portanto, $x \in R^n_+$ $n \geq 1$, e a combinação de produtos tem m componentes, ou seja, $y \in R^m_+$ $m \geq 1$. Exige-se também mais esforço do leitor para completar lacunas deixadas nas demonstrações.

Função Custo

Definição 1 . *Seja V uma transformação fechada, com domínio em* R^m_+ *e contradomínio nos subconjuntos de* $2^{R^n_+}$. *Para cada y, V(y) é um conjunto não-vazio e contém todas as combinações de insumos que produzem, pelo menos, y, e a transformação V(y) satisfaz as seguintes pressuposições:*

1. $0 \in V(0)$.

2. *Se y é diferente de zero,* $0 \notin V(y)$.

3. *V(y) é uma transformação fechada.*

4. *se* $z \geq x$ *e x pertence a V(y),* $z \in V(y)$.

5. *se* $u \geq y$, $V(u) \subset V(y)$.

6. *Se x pertence a V(y), o raio λx, $\lambda \geq 0$ intercepta todos os V(y).*

Uma boa maneira de o leitor concretizar essas pressuposições é traçar um mapa qualquer de isoquantas e verificar quando uma delas é violada. Para mais detalhes, consulte Färe (Färe, 1988). Exercício: Demonstre que $V(0) = R^n_+$.

O passo seguinte é definir a função custo e demonstrar que ela tem as mesmas propriedades da função custo definidas nos capítulos um e dois. Precisamos estar atentos para a necessidade de reformular alguns conceitos, como, por exemplo: $y_1 \geq y_2$ significa que o primeiro vetor tem cada componente maior ou igual àquela correspondente do segundo vetor. O leitor não terá dificuldades em realizar as demonstrações, imitando aquelas do primeiro e segundo capítulos. Para ilustrar, demonstraremos duas propriedades. O problema da extensão para $w \geq 0$ é resolvido da mesma maneira como foi no Capítulo II. Por isto, não repetiremos o desenvolvimento lá feito.

Definição 2 .*Função Custo para $w > 0$,*

$$C(w, y) = \min_{x \in V(y)} \{w * x, \ w > 0\}$$

Proposição 1 . *A função C(w,y) é côncava em w.*

Demonstração:

Sejam $w_1 > 0$ e $w_2 > 0$ dois vetores que representam preços dos insumos. Sejam x e z as respectivas soluções do problema de minimização, quando y é fixo. E seja, para $0 \leq t \leq 1$, $w(t) = tw_1 + (1-t)w_2$ $0 \leq t \leq 1$ e x(t) a solução ótima e, por isso, x(t) é factível. A definição da função custo requer o seguinte:

$$w_1 * x \leq w_1 * x_t$$

$$w_2 * z \leq w_2 * x(t)$$

Multiplique a primeira desigualdade por $0 < t < 1$ e a segunda por $1 - t$ e obtenha:

$$tC(w_1, y) + (1-t)C(w_2, y) \leq w(t) * x(t)$$

Como w_1, t, w_2 e y são arbitrários, segue-se que C(w,y) é função côncava de $w > 0$ e, portanto, contínua, em R^n_{++}, que é um conjunto aberto □

Proposição 2 . *A função C(w,y) é semicontínua inferior (lsc) em y.*

Demonstração:

Seja y^v uma seqüência do R_+^m que converge para y. Como toda seqüência convergente é limitada, existem vetores y_1 e y_2, sendo $y_1 < y_2$ e $y1 \leq y^v \leq y_2$. Considerem-se as seguintes soluções dos respectivos problemas de minimização, x_1, x_2 e x^v, quando o vetor w é fixo, e lembre-se que a função custo é crescente em y.

Seja $A = \{x : \ w * x_1 \leq w * x \leq w * x_2\}$. Como $w > 0$, é fácil mostrar que o conjunto **A** é compacto, e, ainda, que a sequência x^v $\forall v$ pertence a **A**. Conseqüentemente, existe uma subseqüência convergente, z^v de x^v, que converge para z. Não é complicado ver-se que

$$\limsup w * x^v \geq \limsup w * z^v = w * z \quad (1)$$

Seja r^v a subsequência de y^v que corresponde a z^v. Desse modo, $z^v \in V(r^v)$. Como r^v converge para y e V(y) é uma transformação fechada, segue-se que $z \in V(y)$. Observe-se que a hipótese que afirma que V(y) é uma transformação fechada é crucial. Não é suficiente supor-se que V(y) é um conjunto fechado. Aliás, V(y) é, para cada y, um conjunto fechado, porque a transformação é fechada.

Função Distância

Definição 3 . *Função Distância para y e x fixos:*

$$D(x, y) = \sup_{t>0}\{t : \ x/t \in V(y)\}$$

Comentário: na definição, tendo-se que x pertence a V(y), procura-se contrair x, o máximo possível. O vetor resultante ainda está em V(y), porque V(y) é um conjunto fechado.

Vejamos alguns fatos importantes sobre D(x,y). Note-se que $D(x, y) \geq 0$.

1. Se y é maior do que o vetor **0** e x pertence a V(y), então, $D(x, y) \geq 1$. Se t for menor que **1**, segue-se que $x/t \geq x$ e, pela pressuposição 4, $x/t \ \in V(y) \ \forall \, t < 1$. O supremo, na definição de D(x,y), não pode ser infinito, porque o vetor zero não pertence a V(y), se $y \neq 0$. Logo, $1 \leq D(x, y) < \infty$, neste caso.

2. Ainda $y \neq 0$ e $x \notin V(y)$. Observe-se que $x/t < x$ para $t > 1$ e, pela pressuposição 2, $x/t \notin V(y)$ para $t \geq 1$. Seja $\hat{t} = \sup_{t>0}\{t : x/t \in V(y)\}$. Logo, $\hat{t} \leq 1$. Mas $x/\hat{t} \in V(y)$, porque V(y) é um conjunto fechado. Isso implica que não se pode ter $\hat{t} = 1$, porque x não pertence a V(y). E, assim, conclui-se que $D(x, y) < 1$. Como $D(qx, y) = qD(x, y) \geq 1$, porque qx é um elemento de V(y), tem-se $1/q \leq D(x, y) < 1$.

3. Não existe um número real $q > 1$ e tal que $qx \in V(y)$. Neste caso, define-se $D(x, y) = 0$. Como pode expandir-se raio $(1/t)x$ ilimitadamente sem, em nenhum instante, produzir **y**, e isso equivale a deixar t tender para zero, e define-se $D(x, y) = 0$, como sendo este limite. Note-se que $y \not\leq 0$.

4. O caso $y = 0$. Como $0 \in V(0)$. E pela pressuposição 4, x pertence a V(0), qualquer que seja $x \geq 0$, segue-se que $x/t \in V(y)$ para todo $t > 0$. Temos, assim, $D(x, 0) = \infty$.

Comentário: para $y > 0$, D (x,y) é uma função real bem definida. Poderíamos ter usado o máximo, no lugar do supremo, na sua definição. Se incluirmos $y = 0$, então, D (x,y) tem o contradomínio no conjunto dos números reais estendidos, que inclui os números reais e os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ e as operações que podem ser realizadas com estes símbolos. Note-se que $x = 0$ e $y > 0$, $x/t \notin V(y)$ $\forall t > 0$ e, portanto, $D(0, y) = 0$. Se $y = 0$, segue-se que $0/t \in V(y)$ para todo $t > 0$ e tem-se $D(0, 0) = \infty$. Vamos listar as propriedades de D(x,y) e demonstrar algumas, deixando as demais como exercícios para o leitor. Mas necessitamos de um lema importante, quando y é fixo. Se y for igual a zero, o lema é verdadeiro, porque $V(0) = R_+^n$. Por isso, admitimos $y \neq 0$.

Lema 1

$$A = \{x : D(x, y) \geq 1\} = V(y)$$

Demonstração:

1. Se x pertence a V(y), segue-se que, como vimos, $D(x, y) \geq 1$ e, portanto, $x \in A$.
2. Se x não pertence a V(y), e como y é diferente de zero, segue-se que $D(x, y) < 1$.

Conseqüentemente, x não pertence a A. Os itens 1 e 2 demonstram a proposição. □

Proposição 3 .

1. $D(x,0) = +\infty$ *para todo* $x \in R^n_+$. *E* $D(0,y) = 0$ *para todo y diferente de zero.*

2. $D(rx,y) = rD(x,y)$ *para* $r > 0$.

3. *Para todo* $y \in R^m_+$ *e* $x \geq z$, *tem-se* $D(x,y) \geq D(z,y)$.

4. $D(x,u) \leq D(x,y)$ *para* $y \geq u$. *Lembre-se que, pela pressuposição 5,* $V(y) \subset V(u)$.

5. *D(x,y) é uma função semicontínua superior em* R^{n+m}_+.

6. *D(x,y) é côncava em x, se V(y) for um conjunto convexo.*

Demonstração:

Item 1: No desenvolvimento acima, o leitor encontrará os passos necessários à demonstração desta propriedade. Deve justificá-los e considerar a possibilidade em que D(x,y) é igual a infinito.

Item 2: Deixamos o seguinte exercício para o leitor. Se $r > 1$, obtém-se $D(rx,y) > D(x,y)$ se $y \neq 0$.

Item 3: Note-se que, quando y é o vetor zero, a igualdade prevalece. Se y é diferente do vetor zero, analise as seguintes possibilidades: (i) x e z pertencem a V(y). Como $x \geq z$ implica que $x/D(z,y) \geq z/D(z,y)$ e, pela pressuposição 4, $x/(D(z,y) \in V(y))$, e, portanto, D(x,y) não pode ser menor que D(z,y). Logo, $D(x,y) \geq D(z,y)$. (ii) Se z não pertence a V(y) e $x \in V(y)$, obtém-se $D(x,y) \geq 1$ e $D(z,y) < 1$. Logo, $D(x,y) \geq D(z,y)$. (iii) Existe q, tal que qz pertence a V(y). Como $qx \geq qz$, segue-se que $qx \in V(y)$, pela pressuposição 4. Pelo item (i) acima, $D(qx,y) \geq D(qz,y)$. E, pelo item 2, $D(x,y) \geq D(z,y)$. (iv). Não existe q tal que qz pertença a V(y). Neste caso, $D(z,y) = 0$, e, portanto, $D(x,y) \geq D(z,y)$. Se (y=0), tem-se $D(x,0) = D(z,0) = \infty$.

Item 4: Decorre da pressuposição 5, sobre V(y). Deixamos a demonstração, como um exercício.

Item 5: A função D(x,y) é semicontinua superior(usc) em (x,y). No Capitulo II, demonstramos que D(x,y) é usc, se e somente se $B(d) = \{(x,y) : D(x,y \geq d)\}$ for um conjunto fechado para cada número real d. Suponha que B(d) não seja um conjunto fechado. Existe, portanto, d' e $B(d')$ não é um conjunto fechado. Existe, assim, $(x'y') \in \bar{B}(d')$ e (x', y') não pertence a $B(d')$. Há, portanto, uma seqüência de $B(d')$, (x^v, y^v) que converge para (x', y'). Note-se que (d', x^v, y^v) pertence ao gráfico de V(y): $Gr = \{(d, x, y) : D(x, y) \geq d\}$. No caso, d' é fixo e variável (x, y). Como o gráfico de uma transformação fechada é um conjunto, fechado, segue-se que (d', x', y)' pertence ao gráfico Gr e, portanto, $D(x', y') \geq d'$ $(*)$. Mas, como (x', y') não pertence a $B(d')$, tem-se $D(x', y') < d'$, que contradiz (*). Portanto, B(d) é um conjunto fechado para todo número real d e f(x,y) é usc.

Item 6: A função D(x,y) é côncava em x. Sejam x e z dois vetores de V(y); decorre, dessa condição, que $D(x, y) \geq 1$ e $D(z, y) \geq 1$. Pela definição de D(x,y), $x/D(x, y)$ e $z/D(z, y)$ pertencem a V(y). O leitor deverá verificar a seguinte igualdade:

$$\frac{x+y}{D(x,y)+D(z,y)} = (\frac{D(x,y)}{D(x,y)+D(x,z)})(\frac{x}{D(x,y)}) + (\frac{D(z,y)}{D(x,y)+D(x,z)})(\frac{z}{D(z,y)})$$

Verifique que os coeficientes de $x/D(x, y)$, que pertence a V(y), e de $z/D(z, y)$, que também pertence a V(y), somam 1 e têm 0, como limite inferior, e 1, como limite superior. Conseqüentemente, $\frac{x+z}{(D(x,y)+D(z,y))} \in V(y)$ e, pelo lema 1, $D(\frac{x+z}{(D(x,y)+D(x,z))}, y) \geq 1$. Logo, pelo item 2, $D(x + z, y) \geq D(x, y) + D(z, y)$. Conclui-se ser D(x,y) superaditiva em x.

Seja para $0 \leq t \leq 1$, $h(t) = tx + (1 - t)(z)$. Tem-se que h(t) pertence a V(y), que, por hipótese, é um conjunto convexo. E sendo D(x,y) superaditiva e linear homogênea em x, conclui-se que

$$D(x(t), y) \geq D(tx, y) + D((1 - t)z, y) = tD(x, y) + (1 - t)D(z, y)$$

Desse modo, D(x,y) é côncava em x e, portanto, contínua em $x > 0$. □

Exercício: Seja $y = 1,2x^{0,5}z^{0,4}$. Desenvolva a função distância. Sugestão: escreva a função Lagrange e obtenha o máximo que a definição implica.

Dualidade

O teorema de dualidade, que esta seção discutirá, é muito semelhante àquele do Capítulo I. Não disporemos, contudo, da hipótese de que, se expandirmos adequadamente qualquer componente de um vetor x que não produz y, chegaremos a um vetor de V(y), ou seja, a hipótese de que $\lim_{x_i \to \infty} F(x) = \infty$ não é feita. Nem sequer dispomos de uma função de produção. A pressuposição 6, sobre V(y), é um substituto muito menos forte do que aquela hipótese. Mas não será usada na demonstração do teorema seguinte. Para facilitar ao leitor, indicaremos quais as pressuposições sobre V(y) serão utilizadas na demonstração.

Teorema 1 .*[Dualidade] Seja V(y) o conjunto de vetores do R^n_+ que produzem pelo menos y e V(y) satisfaz as seguintes pressuposições:*

1. *Se y é um vetor diferente do vetor zero, $0 \notin V(y)$ e $V(0) = R^n_+$.*
2. *Se $x \geq z$ e z pertence a V(y), então $x \in V(y)$.*
3. *V(y) é um conjunto convexo para todo y.*
4. *V(y) é um conjunto fechado para qualquer y. Não precisamos da hipótese de que V(y) seja uma transformação fechada.*

Como conseqüência dessas pressuposições, tem-se:

$$V^*(y) = \{x : w * x \geq C(w, y) \ \forall w > 0\} = V(y)$$

Comentário: Nas condições do teorema, conhecida a função custo, é possivel recuperar-se V(y). Por isso, ele é considerado um teorema de dualidade. Operacionalmente, a recuperação é complexa. Trata-se de um problema de programação, com um número infinito de restrições.

Demonstração:

1. Seja x um vetor qualquer de V(y) e y diferente do vetor zero. Pela definição da função custo, decorre que $w * x \geq C(w, y)$ para todo $w > 0$ e, portanto, tem-se $V(y) \subset V^*(y)$.

2. Suponha que V(y) seja um subconjunto próprio de $V^*(y)$. Existe, portanto, um vetor z, de $V^*(y)$, que não é elemento de V(y). Como esse conjunto é fechado, z não pertence à fronteira de V(y). Como V(y) não contém o vetor zero, V(y) é conjunto próprio de R^n_+. É também não-vazio. Por hipótese, V(y) é um conjunto convexo.

3. Pelo teorema de separação de conjuntos convexos, existe um vetor P diferente do vetor zero, tal que:

$$\inf_{x \in V(y)} P * x > P * z$$

4. O vetor P não tem nenhuma componente negativa. Sem perda de generalidade, suponha que a sua primeira componente seja negativa, $P_1 < 0$. Seja q um vetor qualquer que produza y. Quando incrementamos sua primeira componente, mantendo as demais fixas, ele contínua produzindo y, pela pressuposição 4. Aumentando essa componente indefinidamente, num dado momento, encontramos um vetor m de V(y) e tal que $P * m < P * z$, uma contradição, portanto. Temos, assim, $P \geq 0$.

5. Como $P * x > P * z$, existe um vetor $Q > 0$ de componentes, de mesmo valor, e cada uma delas igual a $\epsilon > 0$ e tal que $P * x > (P + Q) * z$ para todo x de V(y). Isso decorre do fato de que $\inf_{x \in V(y)} P * x > p * z$. Logo, defina $P' = P + Q$ e ter-se-á $P' * x > P' * z$ para todo x de V(y). Pela definição de C(w,y), existe $\hat{x}$, de V(y) e $C(P', y) = P' * \hat{x}$. Encontramos, assim, um z de $V^*(y)$ e um vetor de componentes positivas, P', e tais que,

$$P'\hat{x} = C(P', y) > P' * z$$

e, pela definição de $V^*(y)$, isso não pode ocorrer. Logo, $V(y) = V^*(y)$, quando V(y) satisfaz as pressuposições enunciadas. □

Teorema 2 . *Suponha que V(y) não seja conjunto convexo, mas que satisfaça às demais pressuposições. Seja* $C^*(w, y) = \min_{x \in V^*(y)}\{w * x\}$. *Então,* $C(w, y) = C^*(w, y)$.

Demonstração: Imitar a demonstração do Capítulo I.

Comentário: Seja $y \neq 0$ que implica ter $C(w, y) > 0,\ w > 0$. Mas $\{x : w * x \geq C(w, y) w > 0\}$ é equivalente a $\{x : w/C(w, y) * x \geq 1 = C(w, y)/C(w, y) = C(\frac{w}{C(w,y)}, y)\ \ w > 0\}$, porque C(w,y) é linear homogênea em w. Fazendo-se $w' =$

$w/C(w, y)$, e para $y \neq 0$,

$$V^{\bullet}(y) = \{x : w' * x \geq 1\}$$

Como $C(w', y) = 1$, podemos conjecturar a seguinte proposição:
Proposição 4

$$V^{\bullet}(y) = B = \{x : w * x \geq 1, \textit{ quando } C(w, y) \geq 1 \ \ w > 0\}$$

Demonstração:

1. Suponha que $x \in V^{\bullet}(y)$. Tem-se, então, $w * x \geq C(w, y)$. No caso de se ter $C(w, y) < 1 \ \forall w > 0$, não temos como decidir se x pertence a B. Mas $C(w, y) < 1 \ \forall w > 0$ é impossível. Faça $w' = w/C(w, y) \ \ w > 0$ e $x \in V^{\bullet}(y)$ e tem-se $1 = C(w, y)/C(w, y) = C(w/C(w, y), y) = C(w', y)$ e $w' * x \geq 1$. Por outro lado, quando $C(w, y) \geq 1$, segue-se, de $w * x \geq C(w, y)$, $w * x \geq 1$. E conclui-se que $x \in B$.

2. Suponha que $x \notin V^{\bullet}(y)$. Existe $w' > 0$ e tal que $w' * x < C(w', y)$. Segue-se que $(w'/C(w', y)) * x < 1$. Defina $w^o = w'/C(w', y)$. Tendo-se em conta que C(w,y) é linear homogênea em w, conclui-se que $C(w^o, y) = 1$. Mas $w^o * x < 1$ e $C(w^o, y) = 1$ implicam que x também não pertence a B.

Por 1 e 2 acima, a proposição é verdadeira. □

Estamos preparados para demonstrar um teorema que estabelece a dualidade entre as funções custo e distância.

Teorema 3 *.[Dualidade] Seja* **x** *um vetor de V(y) que satisfaz todas as pressuposições do teorema 1; portanto, trata-se de um conjunto convexo. Segue-se que*

$$D(x, y) = \inf_{w>0}\{w * x \quad C(w, y) \geq 1, \ \ x \in V(y)\}$$

Demonstração:

Como $V(y) = V^{\bullet}(y)$, tem-se $D(x, y) = \sup_{t>0}\{t : x/t \in V^{\bullet}(y)\} = \sup_{t>0}\{t : w * x/t \geq 1, C(w, y) \geq 1 \ \forall w > 0\}$. Equivalentemente,

$$\sup_{t>0}\{t : w * x \geq t, \ \ C(w, y) \geq 1, \ \ \forall w > 0\}$$

Seja $\hat{t}$ o valor do supremo, o qual é finito, porque $x \in V(y)$. Do desenvolvimento acima, segue-se que

$$w * x \geq \hat{t}, \forall w > 0 \text{ e } C(w, y) \geq 1$$

Portanto, o maior valor de t, $\hat{t}$, tem que coincidir com $\inf_{w>0}\{w * x : C(w,y) \geq 1\}$, que demonstra o teorema. □

A próxima seção cuidará de decompor a função custo no produto de duas funções, uma só depende de y e a outra, de w. Voltamos a considerar y como um número real não-negativo. Produz-se, assim, um só produto. Na definição de homoteticidade, tem-se $F(x) = R(G(x))$ Simplificaremos para $RG(x)$. R e G são funções definidas a seguir.

Homoteticidade

Vamos recordar a definição de função de produção homotética.

Definição 4 . *A função de produção diz-se homotética se* $F(x) = RG(x)$, *e R(y) é uma função real monótona crescente estrita, não-negativa. R(y) satisfaz as seguintes condições:* $R(0) = 0$; $R(y) > 0$ $y \neq 0$; $\lim_{t\to\infty} R(ty) = \infty$ $y \neq 0$; *e, finalmente, R(y) é semicontínua superior(usc). E G é uma função de produção que é linear homogênea. G é definida em* R^n_+ *e tem contradomínio nos números reais não-negativos.*

O fato de R ser uma função monótona crescente tem importância fundamental nas manipulações que faremos. Seja, por exemplo, $RG(x) \geq y$. A inversa de R, que existe porque R é monótona crescente estrita, designada por r, é também função monótona crescente. Assim, $r(RG(x)) \geq r(y)$, ou seja, $G(x) \geq r(y)$. Se $G(x) \geq 1$, então, $RG(x) \geq R(1)$. Como temos, agora, uma função de produção, $V(y) = \{x : F(x) \geq y\} = \{x : RG(x) \geq y\}$. A proposição que se segue é auxiliar na demonstração do teorema principal. Nela, $y \neq 0$.

Proposição 5 . *A função inversa de R(x) é designada por r(x). Por definição,* $V(y) = \{x : RG(x) \geq y\}$. *Segue-se que* $V(y) = r(y)V(R(1))$.

Demonstração:

Note-se que $r(y) > 0$ $y \neq 0$. Então, segue-se que $V(y) = \{x : RG(x) \geq y\}$ é igual a $\{x : G(x) \geq r(y)\}$. Como G é linear homogênea, tem-se $V(y) = \{x : G(x/r(y)) \geq 1\}$. Ou, ainda, $V(y) = r(y)\{x/r(y) : G(x/r(y)) \geq 1\}$. Faça $u = x/r(y)$ e virá $V(y) = r(y)\{u : G(u) \geq 1\}$. Ou, equivalentemente, $V(y) = r(y)\{u : RG(u) \geq R(1)\}$. O termo entre colchetes é igual a $V(R(1)$. Logo, $V(y) = r(y)VR(1)$.

Teorema 4 . *A função custo é homotética, se e somente se:*

$$C(w, y) = r(y)h(w)$$

Demonstração

Note-se que não se invocou nenhuma condição de diferenciabilidade.

1. **Necessidade:** Por definição,

$$C(w, y) = \min_x \{w * x \; x \in V(y)\}$$

Pela proposição anterior,

$$C(w, y) = \min_x \{w * x \; x \in r(y)V(R(1))\}$$

Depois de manipulações simples, tem-se:

$$C(w, y) = \min_x r(y)\{w * x/r(y) : \; x/r(y) \in V(R(1))\}$$

Ou ainda:

$$C(w, y) = r(y) \min_x \{w * x/r(y) : \; x/r(y) \in V(R(1))\} = r(y)C(w, R(1))$$

Tendo-se em conta que C(w,R(1)) só depende de w, podemos escrever $C(w, R(1)) = h(w)$, segue-se que $C(w, y) = r(y)h(w)$. Logo, h(w) é função linear homogênea e côncava em w, porque C(w, R(1)) tem essas propriedades. A função h(w) é, ainda, contínua para $w > 0$, porque é côncava.

2. **Suficiência:**

O teorema 3 é a base da demonstração. Considerem-se $x \in V(y)$ *e* $y \neq 0$. Note-se que $r(y) > 0$.

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \inf_{w>0} \{w * x : \; C(w, y) \geq 1\} \\ &= \inf_{w>0} \{w * x : \; r(y)h(w) \geq 1\} \\ &= \inf_{w>0} \{w * x : \; h(r(y)w) \geq 1\} \end{aligned}$$

porque h(w) é linear homogênea.

$$= \inf_{w>0} \{r(y)w * x/r(y) : \; h(r(y)w) \geq 1\}$$

$$= (1/r(y)) \inf_{w>0} \{r(y)w * x : h(r(y)w) \geq 1\}$$

Faça $r(y)w = w' > 0$. Como estamos mantendo y fixo, w' alcança todos os valores que w pode alcançar. Portanto, podemos tomar o ínfimo em relação a w'.

$$= (1/r(y)) \inf_{w'>0} \{w' * x : h(w') \geq 1\}$$

Faça $L(x) = \inf_{w'>0} \{w' * x : h(w') \geq 1\}$ e ter-se-á:

$$D(x, y) = (1/r(y))L(x)$$

Pelo lema 1,

$$V(y) = \{x : D(x, y) \geq 1 = \{x : L(x)/r(y) \geq 1\}$$

$$V(y) = \{x : L(x) \geq r(y)\}$$

Lembrando-se que a inversa da função r(y) é R(y),

$$V(y) = \{x : RL(x) \geq y\}$$

O teorema estará demonstrado se for mostrado que L(x) tem as propriedades de uma função de produção que faremos a seguir, como uma proposição. □

Proposição 6 . *A função L(x)tem as propriedades de uma função de produção e é linear homogênea.*

Demonstração: Por definição, $L(x) = \inf_{w'>0} \{w' * x : h(w') \geq 1\}$. Observe-se que x é fixo e w' variável.

1. Se $x = 0$, $L(x) = 0$. Na definição de L(x), o lado direito é zero para qualquer $w' > 0$, quando $x = 0$.

2. Se $x \geq z$ implica $L(x) \geq L(z)$. Basta notar que $w' * x \geq w' * z$, qualquer que seja $w' > 0$, se $x \geq z$.

3. Para $t \geq 0$, $L(tx) = tL(x)$, segue-se que L(x) é uma função linear homogênea. Para $t = 0$, $L(tx) = L(0) = 0 = 0L(x)$.
   Seja $t > 0$, $L(tx) = \inf_{w'>0} \{w' * tx : h(w') \geq 1\}=$
   $t \inf_{w'>0} \{w' * x : h(w') \geq 1\} = tL(x)$.

4. L(x) é superaditiva: $L(x+y) \geq L(x) + L(y)$. Da definição de L(x), decorre que

$$L(x) \leq w' * x \;\; \forall w' > 0, \;\; h(w') \geq 1$$

Portanto, tem-se:

$$L(x) + L(z) \leq w' * (x + z), \;\; \forall w > 0 \, , h(w') \geq 1$$

Logo,

$$L(x) + L(z) \leq \inf_{w'>0} \{w * (x+z) \;\; w' > 0 \;\; h(w') \geq 1\} = L(x+z)$$

5. L(x) é uma função côncava de x. Seja $q(t) = tx + (1-t)z$. Como L(x) é superaditiva e linear homogênea, $L(q(t)) \geq tL(x) + (1-t)L(z)$. Assim, L(x) é côncava em x. E, portanto, é contínua para $x > 0$.

6. L(x) é semicontínua superior(usc). Como é contínua para $x > 0$, é também usc. Resta mostrar que é usc para $x \geq 0$. Precisamos mostrar que $A = \{x : \; L(x) \geq d\}$ é um conjunto fechado para todo número real d. Suponha que não. Existe, portanto, z em $\bar{A}$ e $z \notin A$, que implica, pela definição de L(x), que existem $\hat{w}'$ e d', tais que $\hat{w}' * z < d', \;\; h(\hat{w}') \geq 1$. Pela definição de fecho, existe uma seqüência de A, z^v que converge para z. Logo,

$$\hat{w}' * z^v \geq d'$$

Deixando-se v tender para o infinito, virá:

$$\hat{w}' * z \geq d'$$

Chegamos, assim, a uma contradição. E conclui-se que L(x) é usc.

7. $\lim_{t \to \infty} L(tx) = \infty$ se $L(x) > 0$. Esta propriedade é conseqüência da homogeneidade linear de L(x).

Desse modo, L(x) tem as propriedades de uma função de produção.

Caminho de Expansão

Quando a função de produção é homotética, o caminho de expansão é um raio, a partir da origem, ou seja, se z resolve o problema de minimização, kz, qualquer que seja $k > 0$, também o resolve para algum $y > 0$. Mais precisamente, sejam $w > 0$ e

$$LE(w) = \{x : w * x = C(w, y) \;\; y > 0 \;\; F(x) = RG(x) = y\}$$

Teorema 5 . *As seguintes afirmações são equivalentes, quando a função de produção é homotética e, na sua definição, tanto R como G são funções contínuas:*

1. *Se x pertence LE(w) e $k > 0$, segue-se que $kx \in LE(w)$.*

2. $C(w, y) = r(y)h(w)$

Se as condições 1 e 2 forem equivalentes, então, a função de produção é homotética.

Demonstração:

1. Seja $\hat{x}$ um elemento de LE(w), que tomaremos como referência, e $\hat{y}$, o correspondente y. Logo, $C(w, \hat{y}) = w * \hat{x}$ (1). Considere-se $y > 0$ e desejamos encontrar C(w,y). É fácil ver que existe $k > 0$ e $RG(k\hat{x}) = y$. Daí decorre que $kG(\hat{x}) = r(y)$. Como $G(\hat{x}) > 0$, tem-se $k = r(y)/G(\hat{x})$. Como $k\hat{x}$ pertence a LE(w), existe y', tal que $C(w, y') = w * k\hat{x}$. Mas y' satisfaz a restrição $RG(k\hat{x}) = y'$ e, conseqüentemente, $y' = y$. Portanto,

$$C(w, y) = kw * \hat{x} = r(y)(w * \hat{x}/G(\hat{x})$$

E por (1) acima,

$$C(w, y) = r(y)C(w, \hat{y})/G(\hat{x})$$

Como $(\hat{x}, \hat{y})$ é um par fixo, segue-se que $C(w, y) = r(y)h(w)$ e $h(w) = C(w, \hat{y})/G(\hat{x})$. É fácil verificar-se que h(w) é homogênea de grau 1, porque assim o é $C(w, \hat{y})$.

2. Seja $C(w, y) = r(y)h(w)$. Seja z um elemento de LE(w). Temos de mostrar que $kz \in LE(w)$ $k > 0$. Sejam $RG(z) = y_z$ e $RG(kz) = y_k$. Como a função inversa de R é bem definida e igual a r, segue-se que $G(z) = r(y_z)$ $(*)$ e $kG(z) = kr(y_z) = r(y_k)$ $(**)$, porque G é uma função linear homogênea. Mas $C(w, y_k) = r(y_k)h(w))$ e, por (**),

$C(w,y) = kr(y_z)h(w)$. Contudo, $r(y_z)h(w) = C(w,y_z)$. Logo, $C(w,y) = kC(w,y_z) = w * (kz)$. Portanto, kz pertence a LE(w). □

O leitor pode verificar que, se 1 e 2 acima forem equivalentes, então, a função de produção é homotética, porque o item 2 implica, como já vimos, que a função de produção seja homotética. □

Exercício: Seja F(x) uma função real contínua, definida em R^n_+, $\lim_{t\to\infty} F(tx) = \infty$, e $F(0) = 0$. Demonstre que, se $y \geq 0$, existe $x \in R^n_+$, tal que $F(x) = y$. Em que parte do último teorema se utilizou essa propriedade?

Referências

FÄRE, R. **Fundamentals of production theory.** New York: Spring Verlag, 1988.

SHEPARD, R. W. **Theory of cost and production functions.** Princeton: Princeton University Press, 1970.

A Função Custo: Complementos

I. Falhas de Digitação

Pág. 6, item 4, matriz hessiana e não, hensiana. Pág 9: substituir y por p. Fica $C(w,y) = w * x(w,y)$. Pág. 15, primeira equação, depois do primeiro $=$, é $C((1+a)w)/2,y)$. Pág. 22: Consequentemente.

$$C(w,y) = w * k(y)\bar{x} = R(y)(w * x/\bar{z}) \quad (*)$$

Pág 23: 1. $y > 0$. Pág 28: na primeira equação é $C(tw,y)$ e não $C(w,y)$. Pág 31. depois de "Observe-se que":= $(1/C(w,y))\partial C(w,y)/\partial w_i$ Pág 33 primeira equação $= (1/C(w,y))\partial C(w,y)\partial w_i = x_i/C(w,y)$. Pág 34: Definição 4 é $V^d(y)$. Pág 35: Como z pertence a $V^d(y)$. Em seguida, $\geq C(w,y)\ \forall w > 0$. Págs 36 e 37: escreve-se Leontief. Depois de "Para simplificar..."(pág 36)é $w_1(x_1 - a_1 y) < 0$ e $w_1 > 0$. Pág 41: seção **Custo Médio**, limite é de $M(w,y)$ e não $C(w,y)$. Pág 44: "Pela identidade 1.8,"mudar para Pela igualdade 1.8. Pág 45: linha seguinte à Demonstração: o correto é $\lambda(a) \neq 0$. Pág 54: primeira linha depois de Demonstração: eliminar "porque T é scs". Pág 55 Proposição 2 mudar $f(x_n$ para $f(x_n)$. Pág 56: Eliminar "Como ϵ é arbitrário". A primeira desigualdade muda para $\limsup f(x_n) \leq f(x) + \epsilon$. Substituir, "Consequentemente,"por Como ϵ é arbitrário....Pág 57: quarta linha, é $f(x_{nk})$. Logo depois da desigualdade, "Como f(x) é lsc..."é Como f(x,y) é lsc... Pág 58, item 1, eliminar "pelo teorema 6". Note-se que uma função usc passa por um máximo num conjunto compacto. Pág 59, item 5 é "Logo para $x \in U'(\bar{x})$. Pág 61: item 2, substituir sci por lsc e scs por usc. Em observações item 3 ...e conjunto compacto e f é função contínua. Pág 64 Depois de "consequentemente..."substituir (*) por (**). Pág 65: depois de "Mas", mudar para

$$A(w) = \{x \geq 0 : w_1 * x \leq w * x \leq w^2 * x^2\ w_1 \leq w \leq w_2\}$$

Pág 66: Caso 1, a equação correta é $w^v * h^v e^v = w * \hat{x} = w * x^2$. Pág 67: Definição 12 leia-se $h(w) = \sup\{(c,w) \in \tilde{G}_g\}$. Pág 68: Proposição 7, o correto é: Se $w > 0$. Pág 71: última linha, o correto é $a = \max_i\{h(e^i + q) - hQ\}$. Pág 72: O parágrafo que começa por "A desigualdade acima"substituir R^n por R^n_+. Pág 82 e 83 corrigir: $|g(y)/|y|$ para $|g(y)/|y||$. Pág 96: item 3 ...pela proposição 4, é $x/D(x,y) \in V(y)$. Última linha é $B(d) = \{(x,y) : D(x,y) \geq d\}$. Pág 102: Teorema 4, no enunciado, substitua **função custo** por **função de produção**.Pág 105: Note-se que $C(w,y) = r(y)C(w,\hat{y})/r(\hat{y})$. Como $\hat{y}$ é fixo e qualquer, $C(w,\hat{y})/r(\hat{y})$ é constante e só depende de w.

II. Proposições e Teoremas

Proposição 2, página 18: A demonstração vale para $t > 0$ e $F(t) > 0$. Ora $F'(t) = F(t)/t$. Mostre que $F''(t) = 0$. Logo, $F'(t) = g(x)$. Integrando-se, $F(t) = g(x)t + C$. Como $F(0) = 0$, segue-se que $F(t) = g(x)$ para qualquer **t** e, assim, $F(1) = f(x) = g(x)$ e, portanto, $f(tx) = tf(x)$.

Teorema 6, página 19. Somente a metade foi demonstrada. Note-se que sendo $C(w,y) = R(y)h(w)$, segue-se que $C_y(w,y) = R'(y)h(w) = \lambda$. Logo,

$$R(y)h(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i * x_i = \lambda(\frac{\sum_{i=1}^{n} G_i(x)x_i}{R'(y)})$$

Depois de manipulações simples virá $R(y) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x)x_i$. Ou, $G(x) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x)x_i$. Pela proposição 2, G(x) é linear homogênea.

Teorema do Envelope, página 44. O enunciado implicitamente incorpora o parágrafo anterior. Adicionar ao enunciado: $x(a)$ é derivável em relação às componentes de a $x \geq 0$.

Pág 96 item 5. Demonstração confusa. Ora para $d > 0$ e fixo, $\{x : D(x,y) \geq d\} = \{x : D(x/d,y) \geq 1\} = V(y)$ porque D(x,y) é linear homogênea em x e Lema 1. Logo para $d > 0$,

$$\{(x,y) : D(x,y) \geq d\} = \{(x,y) : D(x/d,y) \geq 1\} = (V(y),y)$$

Como o gráfico de uma transformação fechada é um conjunto fechado (conjunto da extrema direita), segue-se que o conjunto da extrema esquerda é fechado para $d > 0$ e qualquer. Se $d \leq 0$, o conjunto da esquerda é igual a $R^n_+ x R^m_+$ que é fechado. Logo, D(x,y) é usc em (x,y).