Uma aplicação da relaxação Lagrangeana/surrogate ao problema simétrico do caixeiro viajante usando um método de subgradientes melhorado

Marcelo Gonçalves Narciso
CNPTIA/EMBRAPA - Campinas – SP
narciso@cnptia.embrapa.br

Luiz Antonio Nogueira Lorena
LAC/INPE
Caixa Postal 515
12.201-970 São José dos Campos – SP
lorena@lac.inpe.br

Resumo: A relaxação Lagrangeana/surrogate tem sido aplicada com sucesso a problemas de otimização combinatória, mostrando-se uma alternativa eficiente à relaxação Lagrangeana, reduzindo os tempos computacionais para problemas de grande porte. O trabalho de Lorena e Narciso [31] apresentou uma aplicação da relaxação Lagrangeana/surrogate ao problema simétrico do caixeiro viajante. O tempos computacionais foram reduzidos em até 97 % para problemas grandes (acima de 1000 cidades), quando comparados com a aplicação da relaxação Lagrangeana usual. Examinamos neste trabalho o comportamento da relaxação Lagrangeana/surrogate com um método de subgradientes mais elaborado, que combina os subgradientes de duas iterações consecutivas para obter uma direção de busca. Os resultados mostram que o ganho da relaxação Lagrangeana/surrogate é reduzido e esta passa a ter quase o mesmo comportamento em tempo que a relaxação Lagrangeana usual.
Palavras-chave: Relaxação Lagrangean/surrogate, problema do caixeiro viajante, otimização combinatória.

Abstract: The Lagrangean/surrogate relaxation can be a successful substitute to the usual Lagrangean relaxation for combinatorial optimization problems, reducing the computational times for large scale problems. Lorena and Narciso [31] applied the Lagrangean/surrogate relaxation to symmetric traveling salesman problems, reducing computational times in large scales instances to 97 % of the ones of the usual Lagrangean relaxation. We examine in this work the Lagrangean/surrogate relaxation application considering a subgradient method that combines the subgradients of consecutive iterations to find the search direction. The computational results show that the computational gain was reduced and the behavior of the Lagrangean/surrogate remains similar to the usual Lagrangean.
Keywords: Lagrangean/surrogate relaxation, Traveling Salesman Problem, Combinatorial Optimization

1. Introdução

O problema do Caixeiro Viajante é certamente um dos mais estudados na literatura de Pesquisa Operacional. Muitos artigos têm sido publicados sobre o assunto e o problema permanece interessante e desafiador ainda nos dias atuais.

A interpretação mais usual ao problema busca por um caminho mais curto para um caixeiro viajante em um determinado número de cidades ou clientes. Os clientes devem ser visitados exatamente uma vez e o caixeiro deve retornar a sua cidade de origem. Veja o livro de Lawler et al. [25] para uma revisão abrangente de métodos de solução, aplicações e problemas relacionados. O problema é conhecido como sendo NP-hard [26], justificando o uso de heurísticas para sua solução, principalmente para problemas de larga escala. Johnson and McGeoch [21] apresentam uma revisão recente sobre métodos de busca local aplicados ao problema.

A relaxação Lagrangeanan é uma técnica bem conhecida e usada freqüentemente na obtenção de limitantes para problema de Otimização Combinatória. (veja por exemplo os trabalhos de revisão [9, 11] os livros [34, 38]). Held and Karp [18, 19] aplicaram com sucesso a relaxação Lagrangeana ao Caixeiro Viajante no início da década de 70. O limite da relaxação aproxima o limite conhecido atualmente como HK (Held e Karp), um limite muito bom (menor que 1% do ótimo) para uma grande classe de problemas simétricos [22]. Johnson et al. [22] comentam que o limite HK exato foi conseguido para instancias com até 33.810 cidades, usando um programa de resolver programação especialmente adaptado. Para instancias ainda maiores, é aplicado um método de subgradientes, proposto originalmente nos trabalhos de Held e Karp, mas melhorados por inúmeros recursos [2,17,36,39,40]. Como para algumas instancias grandes não conhecemos ainda as soluções ótimas, a comparação de resultados de heurísticas com o limite HK tornou-se prática comum.

A relaxação Lagrangeana/surrogate tem se firmado como alternativa à relaxação Lagrangeana, onde os mesmos resultados podem ser obtidos em tempos computacionais muito menores [1, 29, 30, 31, 33, 37]. Em Lorena & Narciso [31] foi examinado o uso da relaxação Lagrangeana/surrogate com o caixeiro viajante simétrico. Para uma classe de problemas testes foram obtidos resultados semelhantes em limites aos da relaxação Lagrangeana, mas consumindo apenas 2 % do tempo computacional para problemas maiores.

Embora seja fácil de implementar e possua condições de convergência simples de controlar [8, 35], o método usual de subgradientes não é muito eficiente do ponto de vista computacional, podendo apresentar um comportamento errático em muitas iterações e gastar muito tempo. Várias são as propostas de correção deste comportamento que apareceram na literatura [3,4,5,6,24,25,27].

Estamos examinando neste trabalho a aplicação da relaxação Lagrangeana/surrogate com um método de subgradientes mais elaborado, onde uma combinação de subgradientes (iteração atual e anterior) define a direção a seguir. Espera-se que com maior informação sobre a direção de busca o ganho computacional obtido com a aplicação Lagrangena/surrogate seja diminuído, mas ainda seja compensador usar a relaxação Lagrangeana/surrogate em substituição à relaxação Lagrangeana usual.

2. A relaxação Lagrangeana/surrogate aplicada ao Caixeiro viajante simétrico

A relaxação Lagrangeana/surrogate combina de forma eficiente as relaxações Lagrangeana e surrogate de um determinado problema. A relaxação Lagrangeana é usada após a aplicação de uma relaxação do tipo surrogate em um conjunto de restrições pré-escolhido, onde as restrições são substituídas por apenas uma, modificada por um multiplicador multidimensional. Em seguida toma-se a relaxação Lagrangeana da restrição surrogate obtida. Isto induz a um dual local Lagrangeano na variável unidimensional, e esta otimização local tende a corrigir a norma do vetor de subgradientes, evitando fortes oscilações em métodos de otimização que usam subgradientes como direção de busca.

A relaxação Lagrangeana/surrogate foi aplicada com sucesso em diversos problemas de natureza combinatória [1, 29, 30, 31, 33, 37]. A otimização local (dual Lagrangeano local) não necessita ser exata e uma busca unidimensional do tipo dicotômica é empregada. Esta otimização também não se mostrou necessária em todos os passos do método subgradientes, bastando encontrar o valor do multiplicador por algumas iterações inicias do método subgradientes.

Considere um Problema do Caixeiro Viajante definido em um grafo G = (V,E) , V={1,...,n}, e seja a variável binária x_{ij} igual a 1 se a aresta (i,j) $\in$ E é usada no caminho ótimo do caixeiro. Define-se ainda a matriz de custos (ou distancias) $C = [c_{ij}]$, onde $c_{ij} = c_{ji}$ para todo i,j $\in$ V, que esta associada a E. A formulação usada é

$$\text{(P)} \qquad Min \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{subject to } \sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} = 2, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset V, \quad 3 \leq |S| \leq n-3, \tag{2}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \; i,j = 1,\ldots,n, \; i < j. \tag{3}$$

As restrições (1) especificam que cada vértice deve ter grau 2, as restrições (2) eliminam a possibilidade de subtours, e (3) representam as condições binárias.

Na aplicação da relaxação Lagrangeana ao problema (P), são usados multiplicadores $\lambda_k, k \in V$ para relaxar as restrições (1). Não faremos isso diretamente, mas preferimos olhar estes multiplicadores como multiplicadores surrogate, e $\sum_{k \in V} \lambda_k \left(\sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} - 2 \right) = 0$, como uma restrição surrogate. Tomando agora um multiplicador unidimensional t $\in$ R, e relaxando esta restrição surrogate na forma Lagrangeana temos uma versão surrogate da função Lagrangeana (denominada Lagrangeana/surrogate em [33])

$$L_t(\lambda) = Min_x \left\{ \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k \in V} t.\lambda_k \left(\sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} - 2 \right) \right\}, \tag{4}$$

onde x é uma solução viável para o problema de 1-árvore geradora de peso mínimo, que pode ser obtida tomando a menor arvore possuindo o conjunto de vértices V\{1} e duas arestas distintas de mínimo custo que ligam esta árvore ao vértice 1.

Observe que na expressão (4), quando o multiplicador t for fixado no valor 1 , tem-se a relaxação Lagrangeana usual, isto é, L(λ) = $L_1(\lambda)$. O limite Lagrangeano local é melhorado procurando-se a solução do dual D(λ) = $Max_\lambda \{L_t(\lambda)\}$ (observe que não importa o valor de t que o dual irá encontrara o mesmo limite). Entretanto, para um dado λ, um dual local pode ser identificado como $D_t(\lambda)$ = $Max_t \{L_t(\lambda)\}$. É imediato que v[$D_t(\lambda)$] $\geq$ v[L(λ)], isto é, o dual local proporciona um limite melhorado em relação a relaxação Lagrangeana usual (v[(.)] é um valor ótimo do problema(.)). O dual local é resolvido aproximadamente por uma busca unidimensional rápida, devolvendo o melhor valor do parâmetro t. Pode-se notar ainda que , no caso de t = 1 a otimização local não é realizada (o mesmo para qualquer valor fixado para t).

3. Os métodos subgradientes

Um método de subgradientes foi aplicado por Held e Karp [18, 19, 20] para resolver o problema D(λ), encontrando limites HK aproximados para o problema (P). No trabalho de Lorena e Narciso [31] este mesmo método tradicional foi aplicado com a relaxação Lagrangeana/surrogate. Os resultados mostraram que os passos tomados na direção dos subgradientes, que são usados na implementação do método tradicional, não são adequados (várias outras abordagens de correções destes passos foram sugeridas na literatura [3,4,5,6,17, 24,25,27, 35, 39]).

As correções dos multiplicadores foram realizadas com a seguinte fórmula

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i + \beta\,[v_f - v(L_t(\lambda^i)]g_t^{\lambda^i} / \left\| g_t^{\lambda^i} \right\|^2 ,\; 0 \le \beta \le 2 \qquad (5)$$

onde i é uma iteração do algoritmo, v_f é o valor de uma solução viável para o problema (P) e g_t^{λ} é um subgradiente.

É fácil observar que as seqüências de limites das relaxações Lagrangeana (t fixado em 1) e Lagrangeana/surrogate (t determinado por busca dicotômica) são diferentes, pois os subgradientes são distintos, $g_t^{\lambda} \neq g_1^{\lambda}$ (em geral). O controle do parâmetro β é o mesmo sugerido nos trabalhos de Held and Karp [18, 19], onde $0 \le \beta \le 2$, começando com β = 2. Se após 20 iterações $v[L_t(\lambda)]$ não aumenta, β é atualizado para $\beta = \beta / 2$.

O subgradiente usado em (5) é facilmente obtido a cada iteração e dado por

$$g_t^{\lambda^i} = \left(\sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} - 2 \right).$$

Estamos examinando neste trabalho o comportamento da relaxação Lagrangeana/surrogate quando um método de subgradientes melhorado for usado. Vamos examinar o método que faz uma combinação de subgradientes da iteração atual e iteração anterior, especificamente, usa como direção de busca $d_t^i = 0.7\, g_t^{\lambda^i} + 0.3\, g_t^{\lambda^{i-1}}$, sugerida por Reinelt [36].

4. Resultados computacionais

Um conjunto de instancias simétricas foi selecionado da biblioteca de problemas TSPLIB (http://www.iwr.uni-heidelberg.de/iwr/comopt/soft/TSPLIB95/tsp) e usado nos testes computacionais.

As instancias são conhecidas como: uly16m; uly22m; att48; berlin52; kroA100; tsp225; pcb442; pr1002; d1291, rl1304; nrw1379; d1655; vm1748; rl1889; u2152 u2319; pr2392, pcb3038 e fnl4461 (referidas a seguir simplesmente como: 16, 22, 48, 52, 100, 225, 442, 1002, 1291, 1304, 1379, 1655, 1748, 1889, 2152, 2319, 2392 3038, e 4461)).

Seja gap = (solução ótima - relaxação)/solução ótima. A tabelas 1 e 2 mostram parta cada instancia o melhor gap Lagrangeano (%) e o tempo decorrido (tempo1) para encontrar este gap, o melhor gap Lagrangeano/surrogate (%) e o tempo decorrido para encontrar o melhor gap Labrangeano (tempo2), e finalmente a razão entre os tempos: tempo2/tempo1 (%).

A tabela 1 refere-se aos resultados obtidos no trabalho de Lorena e Narciso [31], onde a direção de busca é o subgradiente local. A relaxação Lagrangean/surrogate se mostrou muito importante neste caso, corrigindo passos errados no método de subgradientes e conseguindo resultados expressivos para os problemas de grande escala . Por exemplo, usando apenas 2.6 % do tempo empregado pela relaxação Lagrangeana para atingir seu melhor limite no caso do problema 1889 , 2.8% para o problema 1002, 3.7% para o problema 1748, 5.3% para o problema 1304, 2.6% para o problema 2139, 6.5% para o problema 2392 e 5.3% para o problema 3038. Na média entre todas as instancias, o Lagrangeano/surrogate usou apenas 28.8 % do tempo requerido pelo Lagrangeano.

Na tabela 2 apresentamos os resultados com a combinação de subgradientes $d_t^i = 0.7\, g_t^{\lambda^i} + 0.3\, g_t^{\lambda^{i-1}}$ sugerida em Reinelt [36]. Pode-se verificar que o ganho da relaxação Lagrangena/surrogate em relação a relaxação usual foi muito pequeno neste caso. A média entre os tempos passou para 98.29%. Isso já era de se esperar e vem confirmar que um método de subgradientes mais elaborado introduz mais informação ao processo de busca e menores correções são necessárias. O Lagrangeano/surrogate perde vantagem nestes casos. Algo semelhante aconteceu na aplicação da relaxação Surrogate contínua ao problema de Máxima Cobertura no trabalho de Galvão, Espejo e Boffey [10]. Uma informação de qualidade foi dada ao método de subgradientes, no caso, um ponto inicial de qualidade, que foi obtido usando-se características do problema. Verificou-se que os ganhos computacionais do Surrogate contínuo foram reduzidos e equiparados com a aplicação direta do Lagrangeano.

5. Conclusões

A relaxação Lagrangean/surrogate tem sido aplicada com vantagens computacionais (tempo) em relação à relaxação Lagrangeana usual. No trabalho de Lorena e Narciso [31], aplicamos a relaxação Lagrangeana/surrogate ao problema simétrico do caixeiro viajante. Os ganhos computacionais em relação a relaxação Lagrangeana usual foi de até 97% para problemas de grande porte. Entretanto o método usual de subgradientes empregado nos trabalhos de Held e Karp [18, 19] foi experimentado. Sabíamos de antemão que este não seria o mais recomendado, bastando verificar na literatura especializada o grande número de sugestões para métodos alternativos, bem como passos alternativos para correção da direção de busca.

Examinamos neste trabalho o comportamento da relaxação Lagrangeana/surrogate quando usada em um método de busca que combina subgradientes de iterações consecutivas. Quando comparado ao Lagrangeano, verificamos os tempos e limites foram praticamente iguais não proporcionado vantagens para qualquer método.

O Lagrangeano/surrogate evidencia-se portanto como um método que pode substituir o Lagrangeanno usual no caso de falta de informações, onde os passos de métodos subgradientes são corrigidos melhor e com maior freqüência. Este trabalho também mostra que o Lagrangeano/surrogate pode ser usado com outros métodos subgradientes. Deixamos como sugestão a investigação do uso do Lagrangeano/surrogate com um método tipo *bundle* [6], de uso crescente nos últimos anos.

Agradecimentos: *Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (proc. 99/06954-7) pelo suporte financeiro. O segundo autor agradece também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (proc. 300837/89-5).*

Problema	Melhor gap Lagrangeano %	Tempo1 (Seg) Melhor gapLagrangeano	Melhor gap Lagrangeano /surrogate %	Tempo2 (Seg) Melhor gap Lagrangeano/ surrogate	$\frac{Tempo2}{Tempo11}\%$
16	0.1	2.	0.1	1.03	51
22	0.1	9.1	0.1	4.6	51
48	0.3	19.	0.3	8.	42
52	0.3	5.	0.3	5.	100
100	2.	27.	2.	14.	51
225	4.	495.	4.	392.	92
442	1.	4054.	1.	997.	24
1002	4.	36714.	2.	1054.8	2.8
1291	3.	13431.	3.	3230.	24
1304	5.	28094.3	2.	1511.	5.3
1379	2.	9465.7	2.	3147.	33
1655	3.	29368.	2.	3029.	10
1748	5.	48413.	2.	1802.	3.7
1889	5.	87568.	2.	2275.4	2.6
2152	2.	31334.	1.	3648.	11.6
2319	10.	92819.	1.	2503.	2.6
2392	4.	63401.	2.	4141.	6.5
3038	2.	80661.	2.	4294.	5.3
Média					28.8

Tabela 1: Lagrangeana versus Lagrangeana/surrogate - método subgradientes

Problema	Melhor gap Lagrangeano %	Tempo1 (Seg) Melhor gapLagrangeano	Melhor gap Lagrangeano /surrogate %	Tempo2 (Seg) Melhor gap Lagrangeano/ surrogate	$\frac{Tempo2}{Tempo11}\%$
16	0.1	1.	0.1	1.	100
22	0.1	1.	0.1	2.	200
48	0.3	4.	0.3	10.6	265
52	0.3	5.	0.3	0.37	7.4
100	2.	33.	2.	4.	12.1
225	4.	146.	4.	86.	58.9
442	1.	177.	1.	114.	64.4
1002	1.	7321.	1.	7737.	105
1291	2.	6300.	2.	11335.	179.9
1304	2.	2361.	2.	3501.	148.
1379	2.	2928.	2.	1131.	38.62
1655	3.	5176.	3.	2265.	43.75
1748	3.	3815.	2.	851.	22.3
1889	2.	12626.	2.	13891.	110
2152	1.	11279.	1.	16385.	145
2319	0.3	14919.	0.3	35239.	236
2392	2.	10520.	2.	3241.	30.8
3038	2.	8671.	2.	2911.	33.5
4461	2.	80492.	2.	53995.	67
Média					98.29

Tabela 2: Lagrangeana versus Lagrangeana/surrogate – subgradientes combinados

6. Referências

1. Almiñana, Marcos e Pastor, T. J. "An adaptation of SH heuristic to the location set covering problem". European Journal of Operational Research, 100, 586-593, 1997.
2. Allen, E., Helgason, R., Kennington, et al. "A generalization of Poliak's convergence results for subgradient optimization". Mathematical Programming, 37, 309-317, 1987.
3. Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. "On the choice of step size in subgradient optimization". European Journal of Operational Research, 7, 380-388, 1981.
4. Brännlund, U., "A Generalized subgradient method with relaxation step", Mathematical Programming 71 (1995) 207-219.
5. Camerini, P. ; Fratta, L. and Maffioli F., "On improving relaxation methods by modified gradient techniques" Mathematical Programming Study, 3, (1975) 26-34.
6. Correa, R. and Lemaréchal, C, "Convergence of some algorithms for convex minimization", Mathematical Programming 62 (1993) 261-275.
7. Dyer, M. E. "Calculating surrogate constraints". Mathematical Programming, 19, 255-278, 1980.
8. Ermol'ev, Y. M. "Methods for solving nonlinear extremal problems". Cybernetics, 16/1, 1-14, 1966.
9. Fisher, M. L. "The lagrangian relaxation method of solving integer programming problems". Management Science, 27, 1-18, 1981.
10. Galvão, R. D., Espejo, L. G. A. and Boffey, B. "A Comparison of Lagrangean and Surrogate Relaxations for the Maximal Covering Location Problem". European Journal of Operational Research, 124: 377-389, 2000.
11. Geoffrion, A. " Lagrangean relaxation and its uses in integer programming". Mathematical Programming Study, 2, 82-114, 1974.
12. Glover, F. "Surrogate constraints". Operations Research, 16(4):741-749, 1968.
13. Glover, F. "Surrogate Constraints Duality in Mathematical Programming". Operations Research, 23, 434-451, 1975.
14. Goffin, J. L. "On convergence rates of subgradient optimization methods", Mathematical Programming, 13, 329-347, 1977.
15. Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P. "Surrogate Mathematical Programming". Operations Research, 18, 924-939, 1970.
16. Handler, G., Zang, I. "A dual algorithm for the constrained shortest path problem". Networks, 10, 193-310, 1980.
17. Helbig-Hansen, K. H., Krarup, J. "Improvements of the Held-Karp algorithm for the symmetric traveling salesman problem". Mathematical Programming, 7, 87-96, 1974.
18. Held, M., Karp, R. M. " The Traveling salesman problem and minimum spanning trees". Operations Research, 18,1138-1162, (1970).
19. Held, M., Karp, R. M. " The Traveling salesman problem and minimum spanning trees: Part II". Mathematical Programming 1, 6-25, (1971).
20. Held. M., Wolfe, P., Crowder, H. P. "Validation of subgradient optimization", Mathematical Programming, 6, 62-88, 1974.
21. Jonhson, D.S., McGeoch, L.A. "The traveling salesman problem: a case study in local optimization". In Local search in Combinatorial optimization, E. H. L. Aarts and J. K. Lenstra (eds.), John Wiley & Sons, New York, 1997.
22. Jonhson, D.S., McGeoch, L.A., Rothberg, E. E. "Asymptotic Experimental Analysis for the Held-Karp Traveling Salesman Bound. Proceedings of the7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 341-350, 1996.
23. Karwan, M. H., Rardin, R. L. "Some relationships between lagrangian and surrogate duality in integer programming". Mathematical Programming, 17, 320-334, 1979.
24. Kim, S. and Um, B. S., "Polyak's subgradient method with simplified projection for nondifferentiable optimization with linear constraints", Optimization 20 (1989) 451-456.

25. Kim, S. and Um, B. S., "An improved subgradient method for constrained nondifferentiable optimization", Operations Research Letters 14 (1993) 61-64.
26. Laporte, G. "The traveling salesman problem: an overview of exact and approximate algorithms". European Journal of Operational Research, 59, 231-247, 1992.
27. Larsson, T. ; Patriksson, M. and Strömberg, A-B., "Conditional subgradient optimization - theory and applications", European Journal of Operational Research 88, 382-403, 1996.
28. Lawler, E. L. ; Lenstra, J. K. ; Rinnooy Kan, A. H. G. and Shmoys, D. B., "The traveling salesman problem, John Wiley and Sons, Chichester, 1985.
29. Lorena, L. A. N., Lopes, F. B. " A surrogate heuristic for set covering problems". European Journal of Operational Research. 79(1), 138-150, 1994.
30. Lorena, L. A. N., Narciso, M. G. "Relaxation heuristics for a generalized assignment problem". European Journal of Operational Research, 91(1), 600-610, 1996.
31. Lorena, L. A. N., Narciso, M. G. "Using logical surrogate information in Lagrangean relaxation: na application to symmetric traveling salesman problems" European Journal of Operational Research, 2001 – to appear. Disponível em http://www.lac.inpe.br/~lorena/ejor/98296.pdf.
32. Minoux, M.. "Plus courts chemins avec constraints: Algorithmes et applications", Annals of Telecommunications, 30, 383-394, 1975.
33. Narciso, M. G., Lorena, L. A.N. "Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problems". European Journal of Operational Research,114(1), 165-177, 1999.
34. Parker, R. G., Rardin, L. R. "Discrete Optimization". Academic Press, INC, London, 1988.
35. Poljak, B. T. "Minimization of unsmooth functionals". USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 9, 14-29, 1969.
36. Reinelt. G. "The traveling salesman problem: computational solutions for TSP applications". Lecture Notes in Computer Science 840, Springer Verlag, Berlin, 1994.
37. Senne, E. L. F. and Lorena, L. A. N. "Lagrangean /Surrogate Heuristics for p-Median Problems". In Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research (Eds.: M. Laguna and J. L. Gonzales-Velarde). Kluwer Academic Publishers, New York, pp. 115-130, 2000.
38. Shapiro, J. F. "Generalized lagrange multipliers in integer programming". Operations Research, 19, 68-76, 1971.
39. Volgenant, T., Jonker, R. "A branch and bound algorithm for the symmetric traveling salesman problem based on the 1-tree relaxation". European Journal of Operational Research, 9, 83-89, 1982.
40. Valenzuela, C. L., Jones, A J. "Estimating Held-Karp lower bond for the geometric TSP", 1995.