

# ANÁLISE BIOMATEMÁTICA DE ENFEZAMENTOS NA CULTURA DO MILHO

MARIANA VALERIO DA SILVA <sup>1</sup>

SÔNIA TERNES <sup>2</sup>

RAPHAEL GUSTAVO D'ALMEIDA VILAMIU <sup>3</sup>

ALEXANDRE CASTRO <sup>4</sup>

GUILHERME AUGUSTO BRAGA <sup>5</sup>

ELIZABETH DE OLIVEIRA <sup>6</sup>

**RESUMO:** Com o interesse de analisar a evolução das doenças conhecidas como enfezamentos pálido e vermelho na cultura do milho, que podem causar grande prejuízo econômico para a agricultura nacional, formulou-se um modelo matemático determinístico para avaliação da dinâmica temporal da incidência das doenças, considerando o sistema planta (milho) - inseto vetor (cigarrinha *Dalbulus maidis*). Os pontos de equilíbrio do sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve o modelo e suas condições de estabilidade foram determinados. A partir do modelo matemático foram realizadas simulações numéricas utilizando-se valores encontrados na literatura para os parâmetros do modelo.

**PALAVRAS-CHAVE:** modelo matemático, simulação, enfezamento, milho, cigarrinha.

## BIOMATHEMATICAL ANALYSIS OF CORN STUNT

**ABSTRACT:** A deterministic mathematical model is proposed to analyze the spread of the diseases known as pale stunt and red stunt in maize, which can cause great economic losses for the Brazilian agriculture. This mathematical model evaluates the temporal dynamics of those diseases for the system composed by the plant (maize) and the insect vector (*Dalbulus maidis*). The equilibrium points of the related ordinary differential equations system in stationary regime, as well their stability conditions, were determined. Numerical simulations were performed using biological data found in the literature for the parameters of the model.

**KEYWORDS:** mathematical model, simulation, stunt, maize, leafhopper.

## 1. INTRODUÇÃO

A cultura do milho é muito importante para a agricultura nacional, pois a produção de milho no Brasil está estimada em 56 milhões de toneladas, o que representa 35,1% da produção total de grãos para a safra 2010/11 (CONAB, 2011). Existem muitas doenças que afetam essa cultura, dentre elas destacam-se o enfezamento pálido (Corn Stunt Spiroplasma, CSS) e o enfezamento vermelho (Maize Bushy Stunt Phytoplasma, MBSP) causados, respectivamente, por

<sup>1</sup>Graduanda em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, marianavs@cnptia.embrapa.br

<sup>2</sup>Matemática Aplicada, Embrapa Informática Agropecuária, sonia@cnptia.embrapa.br

<sup>3</sup>Físico, Embrapa Informática Agropecuária, vilamiu@gmail.com

<sup>4</sup>Físico, Embrapa Informática Agropecuária, acastro@cnptia.embrapa.br

<sup>5</sup>Graduando em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, guilhermeab@cnptia.embrapa.br

<sup>6</sup>Fitopatologista, Embrapa Milho e Sorgo, beth@cnpms.embrapa.br

espiroplasma e fitoplasma, ambos da classe Mollicutes. Esses mollicutes são transmitidos para o milho através da cigarrinha *Dalbulus maidis* de maneira persistente propagativa. Encontram-se na literatura outras espécies de insetos transmissores dos enfezamentos, porém no Brasil só existem registros da cigarrinha *Dalbulus maidis* (OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2004).

Os enfezamentos são doenças tipicamente tropicais e a presença do seu principal inseto vetor, a *Dalbulus maidis*, está praticamente restrita à América Central e do Sul (OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2004). A incidência dos enfezamentos na cultura do milho no Brasil tem aumentado nos últimos anos, devido principalmente à sobreposição de ciclos da cultura, proporcionada por mais de uma safra ao ano.

Com o intuito de analisar a dinâmica temporal da incidência da doença, desenvolveu-se um modelo matemático compartimental determinístico considerando-se o sistema planta (milho) - inseto vetor (cigarrinha *Dalbulus maidis*). A partir do sistema de equações diferenciais que descreve o modelo pode-se avaliar as condições que favorecem a ocorrência de surto de enfezamentos no Brasil e, posteriormente, estimar possíveis prejuízos econômicos causados pelos enfezamentos.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

A inexistência de estudos biomatemáticos recentes para avaliação do sistema milho – *Dalbulus maidis* infectantes pode ser atribuída à escassez de dados sobre a flutuação populacional deste inseto vetor relacionados às condições climáticas nas regiões produtoras de milho.

Com base no modelo epidemiológico para o estudo da malária proposto por Ronald Ross em 1911 (BACAËR, 2010), Vandermeer e Power (1990) desenvolveram um modelo matemático para descrever a dinâmica temporal da incidência do enfezamento em milho tendo como vetor de transmissão a cigarrinha *Dalbulus maidis*. O presente artigo propõe uma extensão do modelo de Vandermeer e Power (1990) ao considerar o período de latência da infecção na cigarrinha, quando o inseto está contaminado, mas ainda não transmite os enfezamentos.

A Figura 1 representa os compartimentos considerados no modelo matemático. A partir das hipóteses em que a população de plantas e de cigarrinha são constantes ao longo do tempo, ou seja, não há replantio nem retirada de plantas infectadas e a taxa de mortalidade da cigarrinha é igual à sua taxa de natalidade, tem-se que os compartimentos da Figura 1 são representados matematicamente pelo sistema de equações diferenciais descrito em (1).

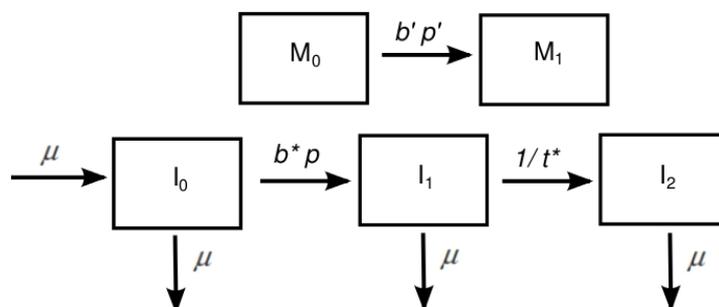


Figura 1: Compartimentos considerados no modelo matemático

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} &= b' p' I_2 (N_1 - M_1), \\ \frac{dI_1}{dt} &= b^* p (N_2 - I_2 - I_1) M_1 - \frac{1}{t^*} I_1 - \mu I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \frac{1}{t^*} I_1 - \mu I_2, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $M_0$  é a população de plantas saudáveis;  $M_1$  é a população de plantas infectadas;  $I_0$  é a população de cigarrinhas sem mollicutes;  $I_1$  é a população de cigarrinhas com mollicutes em período de latência;  $I_2$  é a população de cigarrinhas infectantes;  $p$  é a probabilidade de aquisição de mollicutes pela cigarrinha;  $p'$  é a probabilidade de transmissão de mollicutes da cigarrinha para a planta;  $N_1$  e  $N_2$  são as populações totais de plantas e cigarrinhas, respectivamente;  $\mu$  é a taxa de mortalidade/natalidade da cigarrinha;  $t^*$  é o período de latência da infecção na cigarrinha;  $b'$  é a taxa de visitas que a planta recebe por cigarrinha e  $b^*$  é a taxa de visitas que a cigarrinha realiza por planta.

Considerando  $b' = b^* = \frac{b}{N_1}$  com base no modelo de Vandermeer e Power (1990), e normalizando o sistema de equações (1) obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} &= \frac{N_2}{N_1} b p' i_2 (1 - m_1), \\ \frac{di_1}{dt} &= b p (1 - i_2 - i_1) m_1 - \frac{1}{t^*} i_1 - \mu i_1, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{t^*} i_1 - \mu i_2, \end{cases} \quad (2)$$

onde  $m_1$  é a proporção de plantas infectadas;  $i_1$  é a proporção de cigarrinhas com infecção em período de latência;  $i_2$  é a proporção de cigarrinhas infectantes.

### 3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO MODELO

Analisando o sistema de equações ordinárias (2) em regime estacionário obtêm-se dois pontos de equilíbrio para as populações em interação:

$$I_{(1)}^* = (0, 0, 0),$$

$$I_{(2)}^* = \left( 1, \frac{b p \mu t^*}{\mu^2 t^* + b p \mu t^* + \mu + b p}, \frac{b p}{\mu^2 t^* + b p \mu t^* + \mu + b p} \right),$$

onde  $I^* = (m_1^*, i_1^*, i_2^*)$ ,  $I_{(1)}^*$  é a solução trivial,  $I_{(2)}^*$  é a solução não trivial. Tais pontos existem sempre que os parâmetros  $b$ ,  $p$ ,  $t^*$ ,  $\mu$  e  $N_1$  são não nulos.

Para avaliar a estabilidade dos pontos de equilíbrio (EDELSTEIN-KESHET, 1988) construiu-se a matriz Jacobiana do sistema de equações (2), calculada nos pontos  $I_{(1)}^*$  e  $I_{(2)}^*$ , dadas por  $A_{(1)}$  e  $A_{(2)}$ , respectivamente:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b p' N_2}{N_1} \\ b p & -\frac{1}{t^*} - \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^*} & -\mu \end{pmatrix},$$

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-b^2 p p' N_2}{N_1 (\mu^2 t^* + b p \mu t^* + \mu + b p)} & 0 & 0 \\ \frac{b p \mu^2 t^* + b p \mu}{\mu^2 t^* + b p \mu t^* + \mu + b p} & -\frac{1}{t^*} - \mu - b p & -b p \\ 0 & \frac{1}{t^*} & -\mu \end{pmatrix}.$$

Com base no critério de Routh-Hurwitz (EDELSTEIN-KESHET, 1988) para análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio, tem-se que a solução trivial é sempre instável e a solução não trivial é sempre estável.

#### 4. ANÁLISE NUMÉRICA DO MODELO

Com o intuito de analisar a dinâmica da incidência da doença a partir de um estágio inicial considerando-se os valores dados na Tabela 1, 1% da população inicial de cigarrinhas infectantes, nenhuma planta infectada e nenhuma cigarrinha com mollicutes em período de latência, foi realizado uma simulação numérica.

Tabela 1: Valores dos parâmetros biológicos para enfezamentos pálido (EP) e vermelho (EV)

Parâmetros	Unidade	EP	EV	Referência
$\mu^1$	dias <sup>-1</sup>	0.129	0.129	(VANDERMEER; POWER, 1990)
$b$	–	2	2	(VANDERMEER; POWER, 1990)
$\frac{N_2}{N_1}$	–	1	1	(VANDERMEER; POWER, 1990)
$p$	–	0.46	0.46	(VANDERMEER; POWER, 1990)
$p'$	–	0.835	0.835	(VANDERMEER; POWER, 1990)
$t^*$	dias	20	25	(OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2004)

A simulação numérica foi realizada a partir do sistema de equações diferenciais representado em (2) com o uso do software MATLAB, versão 7.8.0 (R2009a). Para a solução numérica desse sistema, utilizou-se a função do MATLAB denominada ode45, a qual implementa o método de Runge-Kutta de ordem (4, 5). A dinâmica obtida nas simulações é mostrada nos gráficos da Figura 2.

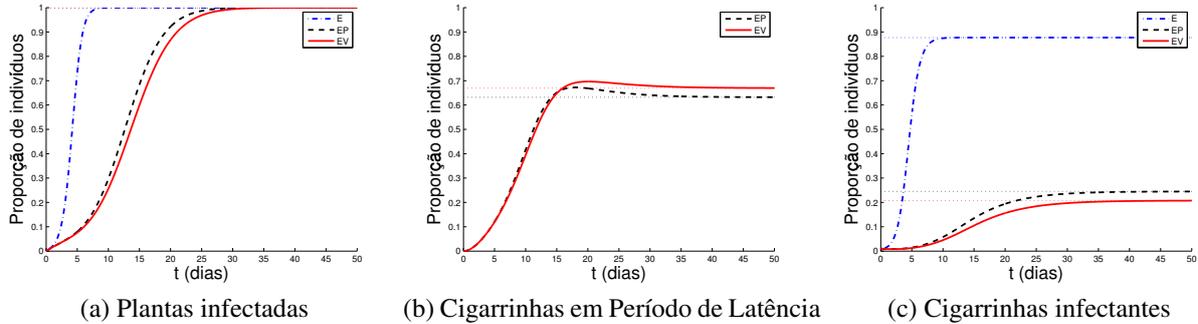


Figura 2: Dinâmica das evoluções dos enfezamentos pálido (EP), vermelho (EV) e sem período de latência (E)

## 5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Observando-se a Figura 2a, pode-se perceber que não há diferenças significativas entre as dinâmicas das incidências de enfezamentos pálido e vermelho na cultura de milho. Um resultado semelhante foi encontrado por Oliveira et al. (2002), onde não foram observadas diferenças acentuadas entre as detecções de fitoplasma e espiroplasma em experimentos de campo.

Através da análise de estabilidade do sistema tem-se que o ponto de equilíbrio  $I_{(2)}^*$  é sempre estável, sendo assim a proporção de plantas infectadas tende para 1, se o ponto inicial é diferente do trivial, resultado semelhante ao obtido no trabalho de Vandermeer e Power (1990).

Comparando a dinâmica dos enfezamentos desenvolvidas nesse trabalho (Equação 2), com a dinâmica dos enfezamentos sem o período de latência (Vandermeer e Power, 1990), tem-se que a dinâmica da proporção de cigarrinhas infectantes apresenta diferença acentuada (Figura 2c). Tal fato resulta em uma convergência mais lenta da proporção de plantas infectadas para o ponto de equilíbrio, quando o período de latência é considerado. Tal comportamento deixa clara a importância de se incorporar o período de latência aos modelos de enfezamentos.

O modelo proposto apresenta potencial para estudos prospectivos da dinâmica de evolução de enfezamentos na cultura do milho, uma vez que experimentos sejam realizados para calibração de seus parâmetros. Estudos futuros irão considerar outros fatores biológicos importantes, além de faixas de variação nos parâmetros relacionados às condições climáticas, medidos em determinadas regiões brasileiras.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pela concessão da bolsa PIBIC sob a qual o trabalho está sendo desenvolvido.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACAËR, N.A **short history of mathematical population dynamics**. Bondy, France: Springer, 2010.

CONAB. **Acompanhamento da Safra Brasileira: Grãos - Safra 2010/11 - Oitavo Levantamento**. Disponível em: <[http://www.conab.gov.br/OlalaCMS/uploads/arquivos/11\\_06\\_02\\_10\\_59\\_38\\_graos\\_-\\_boletim\\_maio-2011..pdf](http://www.conab.gov.br/OlalaCMS/uploads/arquivos/11_06_02_10_59_38_graos_-_boletim_maio-2011..pdf)>. Acesso em: 3 Maio.2011.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. Birkhäuser mathematics series. 1988.

OLIVEIRA, E. D.; CARVALHO, R. V. D.; DUARTE, A. P.; ANDRADE, R. A. D.; RESENDE, R. D. O.; OLIVEIRA, C. M. D.; RECCO, P. C. Molicutes e vírus em milho na safrinha e na safra de verão. **Revista Brasileira de Milho e Sorgo**, v.1, n.2, p. 38–46. 2002.

OLIVEIRA, E. D.; OLIVEIRA, C. M. D. **DOENCAS EM MILHO: molicutes, vírus, vetores, mancha por Phaeosphaeria**. Brasília, DF: Embrapa. 2004.

VANDERMEER, J.; POWER, A. An epidemiological model of the corn stunt system in central america. **Ecological Modelling**, v. 52, p. 235–248. 1990.