



AVALIAÇÃO COMPARATIVA DE MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM E SEM *DELAY* PARA ESTUDO DO HLB EM CITROS

GUILHERME A. BRAGA¹; SÔNIA TERNES²; RAPHAEL G. VILAMIU³; FRANCISCO
LARANJEIRA⁴

Nº 12602

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático compartimental determinístico para representar a dinâmica da doença HLB em plantações de citros, considerando a existência de período de *delay* (retardo) na fase de incubação da doença na planta. Esse modelo é baseado no trabalho de Braga *et al* (2011), que analisa a dinâmica da infecção sem considerar a existência de *delay* na fase citada. Uma comparação entre os resultados obtidos pelos dois modelos é realizada.

ABSTRACT

The purpose of this work is to present a compartmental deterministic mathematical model for representing the dynamics of HLB disease in citrus orchard, considering the existence of a delay period on the incubation phase of the disease in the plants. This model is based on Braga *et al* (2011), which analyses the dynamics of the infection without considering the role of delay periods. A comparison between the results of the two models is performed.

INTRODUÇÃO

O Brasil detém cerca de 40% da produção mundial de citros, sendo a região do estado de São Paulo o maior centro produtor do país. A cultura de laranja movimenta em torno de R\$ 9 bilhões por ano e é responsável pela criação de 400 mil empregos diretos e indiretos. (Neves *et al*, 2007). Devido a essa importância, o surgimento de doenças pode causar sérios prejuízos econômicos. Atualmente, a maior preocupação

¹ Bolsista PIBIC: Graduando em Matemática Aplicada e Computacional, UNICAMP, Campinas-SP, guilhermeab@cnptia.embrapa.br

² Orientadora: Pesquisadora, Embrapa Informática Agropecuária, Campinas-SP.

³ Colaborador: Bolsista CNPq Pós-doutorado, Embrapa Informática Agropecuária, Campinas-SP.

⁴ Colaborador: Pesquisador, Embrapa Mandioca e Fruticultura, Cruz das Almas-BA.

dos produtores de citros é o HLB (*huanglongbing*, ou “doença do dragão amarelo” numa tradução literal do chinês, também conhecida como *greening*). Embora alguns estudos indiquem que a doença é centenária em algumas regiões da China, apenas em março de 2004 é que plantas com sintomas de HLB foram identificadas nos pomares paulistas. (Bové, 2006).

A doença é causada pela bactéria *Candidatus Liberibacter* ssp., a qual existe em 3 formas: *americanus*, *asiaticus* e *africanus*, sendo a primeira a mais comum no Brasil, e é transmitida principalmente pelo psíldeo *Diaphorina Citri.*, que pode adquirir a bactéria ao se alimentar da seiva das folhas de citros. Os sintomas característicos do HLB são ramos amarelados, folhas mosqueadas, sementes abortadas e frutos pequenos e assimétricos. O *huanglongbing* reduz a produtividade gerando frutos de baixa qualidade com grande tendência de quedas das plantas e, em casos extremos, leva a planta à morte. A severidade da doença se deve também ao fato de que o HLB não possui cura, pode afetar todos os tipos de citros e por possuir um período de incubação quando a planta não apresenta sintomas mas pode transmitir a doença. (Bové, 2006). A principal recomendação para o controle da doença é a retirada das plantas sintomáticas e o controle do psíldeo vetor. (MAPA, 2008)

Segundo a literatura (BELASQUE JR. *et al*, 2010), o período de incubação da doença é bastante variável, podendo ser de 6 a 18 meses em média. Essa grande variação mostra-se como uma característica biológica importante a ser considerada no processo de transmissão da HLB pela *D. Citri*, uma vez que ao se alimentar na planta em período de incubação, o psíldeo pode tornar-se infectivo.

Este trabalho apresenta um modelo matemático epidemiológico para análise da dinâmica de transmissão da HLB em citros, considerando um processo de retardo no compartimento que representa o período de incubação da doença na planta. Baseado no trabalho de Braga *et al.* (2011) que representa a dinâmica de transmissão sem retardo, comparações entre ambos os modelos são realizadas.

MODELO MATEMÁTICO

Modelo matemático sem *delay*

A Figura 1 descreve os compartimentos considerados no modelo original de Braga *et al.* (2011), que são descritos matematicamente pelo sistema de equações diferenciais ordinárias em (1), de forma que S_h é o compartimento dos hospedeiros (citros) suscetíveis à doença ; E_h é o compartimento dos hospedeiros que apresentam

a doença em período de incubação e I_h é o compartimento de hospedeiros sintomáticos, tal que $N_h = S_h + E_h + I_h$. Ainda, S_v é o compartimento dos vetores (psilídeos) não infectivos e I_v o compartimento dos vetores infectivos, de tal forma que $N_v = S_v + I_v$.

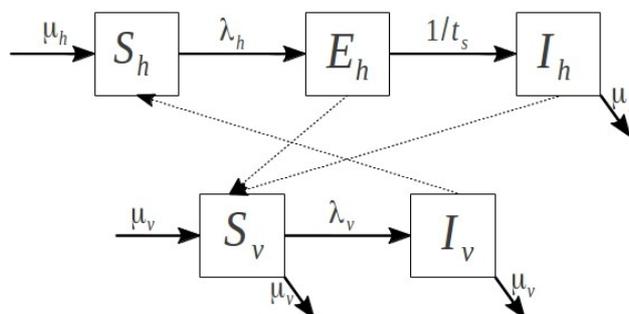


FIGURA 1. Modelo Compartmental do patossistema *Diaphorina Citri* – Planta. Setas contínuas mostram o fluxo entre compartimentos e setas tracejadas representam a influência dos compartimentos no processo de transmissão da bactéria.

Conforme apresentado por Braga *et al* (2011), os compartimentos da Figura 1 são descritos pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = \mu_h I_h - \lambda_h S_h, \\ \frac{dE_h}{dt} = \lambda_h S_h - \frac{1}{t_s} E_h, \\ \frac{dI_h}{dt} = \frac{1}{t_s} E_h - \mu_h I_h, \\ \frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - (\lambda_v + \mu_v) S_v, \\ \frac{dI_v}{dt} = \lambda_v S_v - \mu_v I_v. \end{cases}$$

A Tabela 1 apresenta o significado dos parâmetros utilizados em (1), bem como o valor numérico utilizado nas simulações.

TABELA 1. Parâmetros do Modelo (Braga *et al*, (2011))

Parâmetro	Significado	Valor
N_h	População total de plantas	2000
N_v	População total de insetos	1000
λ_h	Força de infecção nas plantas	
λ_v	Força de infecção nos insetos	
p_h	Probabilidade da planta adquirir HLB do psilídeo	0.6833
p_v	Probabilidade de aquisição do HLB pelo psilídeo	0.3650
t_s	Tempo de incubação da doença nas plantas	12
μ_v	Taxa de mortalidade natural do psilídeo	7/24
b	Taxa de troca de hospedeiro	1.216
μ_h	Taxa de retirada e replantio de plantas	

No modelo, considera-se que cada planta retirada é substituída automaticamente por uma muda nova e saudável. Considerou-se também somente a fase adulta do inseto vetor (*Diaphorina Citri*) e que todos eles só se tornam portadores do HLB nesta fase. Dessa forma, pode-se assumir que N_h e N_v são constantes. Assim, fazendo as seguintes substituições:

$$(2) \quad \frac{S_h}{N_h} = s_h \quad \frac{E_h}{N_h} = e_h \quad \frac{I_h}{N_h} = i_h \quad \frac{S_v}{N_v} = s_v \quad \frac{I_v}{N_v} = i_v$$

e derivando cada um dos termos das equações do sistema expresso em (1), o sistema em (1) passa a ser descrito por:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{ds_h}{dt} = \mu_h i_h - \lambda_h s_h, \\ \frac{di_h}{dt} = \frac{1}{t_s} (1 - s_h - i_h) - \mu_h i_h, \\ \frac{di_v}{dt} = \lambda_v (1 - i_v) - \mu_v i_v, \end{cases}$$

Tomando $b' = b \frac{N_v}{N_h}$, as forças de infecção são expressas por:

$$\lambda_h = b' p_h \frac{I_v}{N_v} = \varepsilon_h i_v$$

$$\lambda_v = b p_v \frac{(E_h + I_h)}{N_h} = \varepsilon_v (1 - s_h)$$

Sejam $\varepsilon_h = b \frac{N_v}{N_h} p_h$ e $\varepsilon_v = b p_v$ tal que $\varepsilon_h, \varepsilon_v \geq 0$, então tem-se:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{ds_h}{dt} = \mu_h i_h - \varepsilon_h i_v s_h, \\ \frac{di_h}{dt} = \frac{1}{t_s} (1 - s_h - i_h) - \mu_h i_h, \\ \frac{di_v}{dt} = \varepsilon_v (1 - s_h) (1 - i_v) - \mu_v i_v, \end{cases}$$

ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Os pontos de equilíbrio do sistema em (4) significa os pontos onde não há variações nas populações, ou seja, onde as derivadas temporais são nulas. Dessa forma, igualando o sistema (4) a zero, encontramos dois pontos de equilíbrio

$P(s_h, i_h, i_v)$ tal que $P_1 = (1, 0, 0)$ e $P_2 = (s'_h, i'_h, i'_v)$, onde:

$$s'_h = \frac{\mu_h \mu_v + \varepsilon_v \mu_h}{\varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h t_s + \varepsilon_v \mu_h + \varepsilon_h \varepsilon_v}$$

$$i'_h = \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h t_s - \mu_h \mu_v + \varepsilon_h \varepsilon_v}{\varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h^2 t_s^2 + (\varepsilon_v \mu_h^2 + 2\varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h) t_s + \varepsilon_v \mu_h + \varepsilon_h \varepsilon_v}$$

$$i'_v = \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h t_s - \mu_h \mu_v + \varepsilon_h \varepsilon_v}{(\varepsilon_h \mu_h \mu_v + \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h) t_s + \varepsilon_h \mu_v + \varepsilon_h \varepsilon_v}$$

Para a análise de estabilidade de tais pontos (Edelstein-Keshet, 1988), necessitamos obter a matriz jacobina do sistema de equações (4), que é dada por:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} -\varepsilon_h i_v & \mu_h & -\varepsilon_h s_h \\ -\frac{1}{t_s} & -\frac{1}{t_s} - \mu_h & 0 \\ -\varepsilon_v (1 - i_v) & 0 & -\varepsilon_v (1 - s_h) - \mu_v \end{pmatrix}$$

Para a análise de estabilidade do ponto trivial P_1 tem-se a seguinte matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_h & -\varepsilon_h \\ -\frac{1}{t_s} & -\frac{1}{t_s} - \mu_h & 0 \\ -\varepsilon_v & 0 & -\mu_v \end{pmatrix}$$

a qual possui o seguinte polinômio característico:

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{1}{t_s} + \mu_h + \mu_v \right) + \lambda \left(\frac{\mu_h}{t_s} + \frac{\mu_v}{t_s} + \mu_h \mu_v - \varepsilon_h \varepsilon_v \right) + \left(\frac{\mu_h \mu_v}{t_s} - \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} - \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h \right)$$

Sejam:

$$a_1 = \frac{1}{t_s} + \mu_h + \mu_v$$

$$a_2 = \frac{\mu_h}{t_s} + \frac{\mu_v}{t_s} + \mu_h \mu_v - \varepsilon_h \varepsilon_v$$

$$a_3 = \frac{\mu_h \mu_v}{t_s} - \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} - \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h$$

Pelo critério de Routh-Hurwitz (Edelstein-Keshet, 1988), as seguintes condições devem ser satisfeitas para que o ponto de equilíbrio seja considerado estável:

$a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$. Assim as condições para P_1 são:

1. $\mu_h + \mu_v > \frac{-1}{t_s}$
2. $\frac{\mu_h \mu_v}{t_s} > \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} + \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h$
3. $\left(\frac{1}{t_s} + \mu_h + \mu_v \right) \left(\frac{\mu_h}{t_s} + \frac{\mu_v}{t_s} + \mu_h \mu_v - \varepsilon_h \varepsilon_v \right) > \frac{\mu_h \mu_v}{t_s} - \frac{\varepsilon_h \varepsilon_v}{t_s} - \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h \Rightarrow$
 $(\mu_h + \mu_v)^2 \frac{1}{t_s} + (\mu_h + \mu_v) \left(\mu_h \mu_v + \frac{1}{t_s} \right) > \varepsilon_h \varepsilon_v \mu_h$

A partir do estudo analítico das expressões acima observa-se que as condições 2 e 3 podem não ser satisfeitas conforme os valores dos parâmetros, e portanto a solução trivial P_1 é um ponto de equilíbrio instável.

Para a análise de estabilidade do ponto P_2 não foi realizado o estudo analítico devido à complexidade dos valores obtidos.

Modelo matemático com *delay*

O modelo com *delay* considera os mesmos compartimentos e introduz o tempo de incubação da doença como um processo de *delay* t_s , conforme descrito em (6):

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_h I_h(t) - \lambda_h(t) S_h(t), \\ \frac{dE_h(t)}{dt} = \lambda_h(t) S_h(t) - \lambda_h(t - t_s) S_h(t - t_s), \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = \lambda_h(t - t_s) S_h(t - t_s) - \mu_h I_h(t), \\ \frac{dS_v(t)}{dt} = \mu_v N_v - (\lambda_v(t) + \mu_v) S_v(t), \\ \frac{dI_v(t)}{dt} = \lambda_v(t) S_v(t) - \mu_v I_v(t). \end{cases}$$

Assumindo que N_h e N_v são constantes e fazendo as mesmas substituições que em (2), o sistema em (6) passa a ser descrito por:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{ds_h(t)}{dt} = \mu_h i_h(t) - \lambda_h(t) s_h(t), \\ \frac{di_h(t)}{dt} = \lambda_h(t - t_s) s_h(t - t_s) - \mu_h i_h(t), \\ \frac{di_v(t)}{dt} = \lambda_v(t) (1 - i_v(t)) - \mu_v i_v(t). \end{cases}$$

Tomando $b' = b \frac{N_v}{N_h}$ e sejam $\varepsilon_h = b \frac{N_v}{N_h} p_h$ e $\varepsilon_v = b p_v$ tal que $\varepsilon_h, \varepsilon_v \geq 0$. As forças de infecção são expressas por:

$$\begin{aligned} \lambda_h &= b' p_h \frac{I_v(t)}{N_v} = \varepsilon_h i_v(t) \\ \lambda_v &= b p_v \frac{(E_h(t) + I_h(t))}{N_h} = \varepsilon_v (1 - s_h(t)) \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (7) o modelo matemático com *delay* é representado por:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{ds_h}{dt} = \mu_h i_h(t) - \varepsilon_1 i_v(t) s_h(t), \\ \frac{di_h}{dt} = \varepsilon_1 i_v(t - t_s) s_h(t - t_s) - \mu_h i_h(t), \\ \frac{di_v}{dt} = \varepsilon_2 (1 - s_h(t)) (1 - i_v(t)) - \mu_v i_v(t). \end{cases}$$

A dinâmica do sistema em (8) é explorada por meio de simulações numéricas.

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As simulações numéricas foram realizadas com o uso do software MATLAB 7.8 (R2009a), a partir do sistemas de equações (4) (sem *delay*) e (8) (com *delay*), considerando que o patossistema inicia-se com todas as plantas saudáveis e com 10% da população de insetos portadoras do HLB. Para determinar o valor do parâmetro b , que representa a quantidade de troca de hospedeiro que o psíldeo realiza durante a sua vida, utilizou-se o valor de $b = 1.216$, estimado pelo número de psíldeo por armadilhas multiplicado pelo número de armadilhas e pela proporção de insetos em relação ao total de plantas num pomar⁵.

⁵LARANJEIRA, Francisco Ferraz (Engenheiro Agrônomo, Embrapa Mandioca e Fruticultura). Comunicação pessoal, 2011.

As simulações foram realizadas utilizando os valores apresentados na Tabela (1) para os valores de $\mu_h = 0.0$, sem remoção nem replantio de novas mudas; $\mu_h = 0.4761$, correspondente à taxa de detecção das plantas sintomáticas no campo segundo Belasque Jr. *et al* (2009); e $\mu_h = 1.0$, que representa a remoção de todas as plantas infectadas, considerando cenários com população total de 400 insetos e com 1500 insetos.

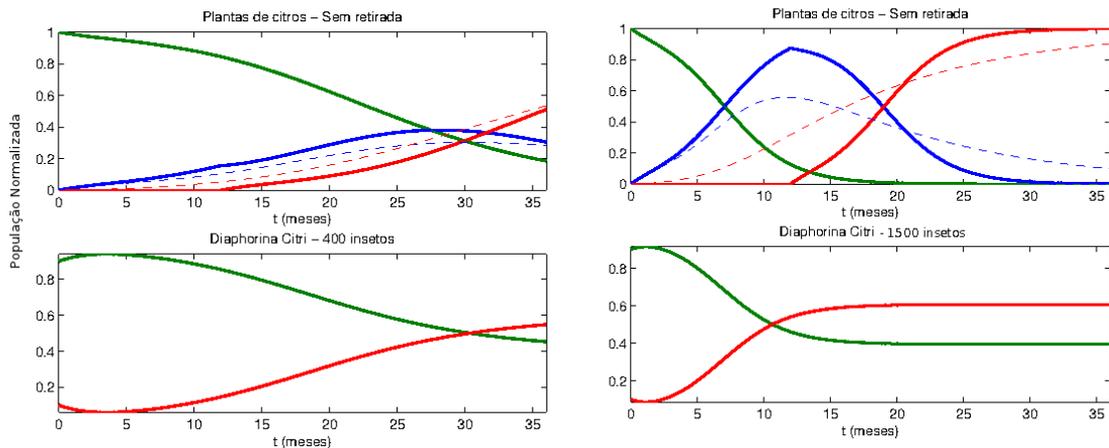


FIGURA 2. Simulações com valores de $N_v = 400$ (esquerda) e $N_v = 1500$ (direita) para o valor de $\mu_h = 0.0$ (sem remoção de plantas) (Obs: legenda apresentada na Figura 5).

Na Figura 2 observa-se uma grande diferença na dinâmica do sistema apenas com a variação no número de insetos. É possível notar a diferença entre os modelos com *delay* (linhas contínuas) e o modelo sem *delay* (linhas tracejadas).

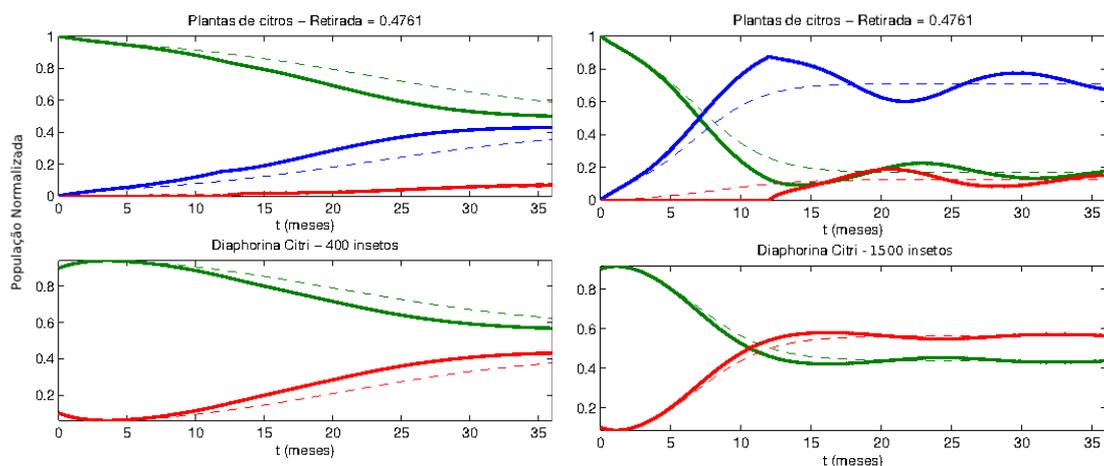


FIGURA 3. Simulações com valores de $N_v = 400$ (esquerda) e para para $N_v = 1500$ (direita) para o valor de $\mu_h = 0.4761$ (Obs: legenda apresentada na Figura 5).

Na Figura 3, considerando $\mu_h = 0.4761$, a mesma variação entre os modelos com e sem *delay* é observada. É possível notar também a diminuição da proporção de plantas sintomáticas (i_h) em ambas as simulações devido à retirada das plantas.

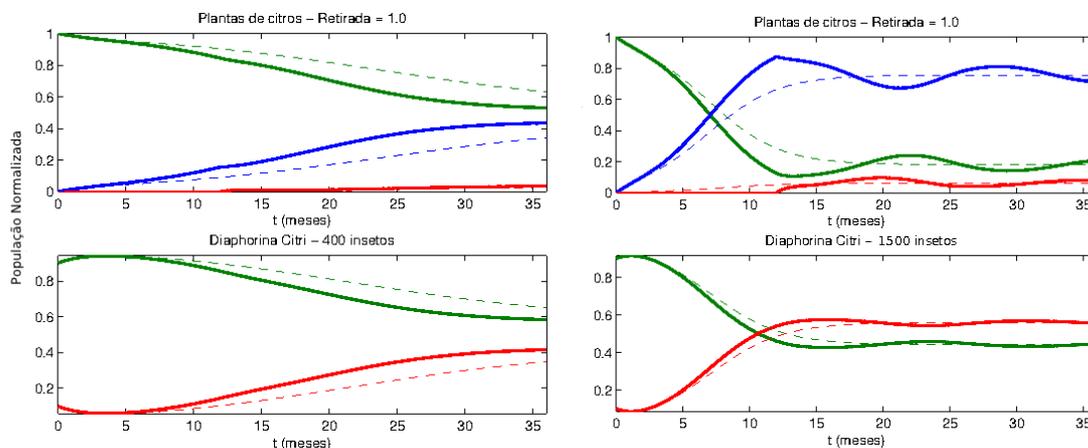


FIGURA 4. Simulações com valores de $N_v = 400$ (esquerda) e para para $N_v = 1500$ (direita) para o valor de $\mu_h = 1.0$. (Obs: legenda apresentada na Figura 5)

Na Figura 4, considerando a retirada de todas as plantas infectadas, observa-se novamente o mesmo padrão de variação para os modelos com e sem *delay*.

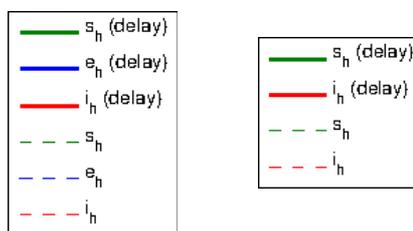


FIGURA 5. Legenda para os gráficos apresentados nas figuras 2, 3 e 4. A caixa da esquerda refere-se aos compartimentos da população de plantas e a da direita relaciona-se aos compartimentos da população de insetos.

CONCLUSÃO

Comparando-se os resultados dos dois modelos apresentados (com e sem *delay*) pode-se observar uma grande diferença na dinâmica do patossistema, como apresentado nas figuras 2, 3 e 4. Conclui-se que as equações com *delay* são mais realísticas, pois a partir da chegada dos psilídeos no pomar, somente depois do tempo de incubação é que as primeiras plantas começarão a apresentar os sintomas de HLB. Embora os dois tipos de equações sempre converjam para o mesmo ponto de equilíbrio ao longo do tempo, a dinâmica nos primeiros meses é o que realmente irá influenciar as tomadas de decisões dos agricultores em relação a doença. Além disso, através da análise das figuras 2, 3 e 4, pode-se concluir que a remoção de plantas, em

conjunto com o controle do psíldeo vetor, são fundamentais para o controle da doença no campo, dado que a proporção de plantas infectadas, ao final do período observado, diminui com a retirada precoce de plantas sintomáticas (dada por μ_h) e com a existência de baixos níveis populacionais do inseto vetor (dado por N_v). Tais resultados condizem com as instruções do MAPA para controle da doença (MAPA, 2008).

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte a este trabalho por meio da concessão de bolsas PIBIC (Proc. 120661/2011-0) e de pós-doutorado (Proc. 560461/2010-0)

REFERÊNCIAS

- BELASQUE JR, J.; FILHO, A. B.; BASSANEZI, R. B.; BARBOSA, J. C.; FERNADES, N. G.; YAMAMOTO, P. T.; LOPES, S. A.; MACHADO, M. A.; JUNIOR, R. P. L.; AYRES, A. J.; MASSARI, C. A. Base científica para a erradicação de plantas sintomáticas e assintomáticas de Huanglongbing (HLB, Greening) visando o controle efetivo da doença. **Tropical Plant Pathology**. Vol. 34, 3, p. 137-145. 2009.
- BELASQUE JR, J.; YAMAMOTO, P. T.; MIRANDA, M. P. D.; BASSANEZI, R. B.; AYRES, A. J.; BOVÉ, J. M. Controle do huanglongbing no estado de São Paulo, Brasil. **Citrus Research & Technology**, Cordeirópolis, Vol. 31, p. 53–63. 2010.
- BOVÉ, J. M. Huanglongbing: A destructive, Newly-emerging, Century-old disease of Citrus. **Jornal of Plant Pathology**. Vol. 88, 1, p. 7 – 37. 2006.
- BRAGA, G. A.; TERNES, S.; VILAMIU, R. G. d'A.; CASTRO, A.; SILVA, M. V.; LARANJEIRA, F. F. Modelagem Matemática da Dinâmica Temporal do HLB em Citros. In: VIII Congresso Brasileiro de Agroinformática, 2011, Bento Gonçalves. **Anais do VIII Congresso Brasileiro de Agroinformática**, 2011.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. Birkhäuser mathematics series. 1988.
- MAPA. **Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento: Instrução Normativa Nº. 53, de 16 de outubro de 2008**. Disponível em: <http://extranet.agricultura.gov.br/sislegis-consulta/consultarLegislacao.do?operacao=visualizar&id=19130>. Acesso em: 12 Junho. 2012.
- NEVES, M. F.; LOPES, F. F.; TROMBIN, V. G.; AMARO, A. A.; NEVES, E. M.; JANK, M. S. **Caminhos para a citricultura - Uma Agenda para Manter a Liderança Mundial**, 1ª. ed. (Editora Atlas, 2007).